

УДК: 519.83

Влияние нерыночного преимущества на равновесие в модели Хотеллинга

А. И. Косачева

Финансовый университет при Правительстве РФ,
факультет прикладной математики и информационных технологий,
Россия, 125993, ГСП-3, г. Москва, Ленинградский проспект, д. 49

E-mail: aikosacheva@gmail.com

Получено 3.02.2016, после доработки – 10.05.2016.

Принято к публикации 15.05.2016.

В работе исследуется модификация модели Хотеллинга, в которой одна из фирм обладает нерыночным преимуществом, введенным по аналогии с валентностью, используемой в задачах политической экономии. Нерыночное (валентное) преимущество может интерпретироваться как реклама (узнаваемость фирмы). Установлено, что при аддитивной функции полезности потребителей, зависящей квадратично от расстояния до фирмы, существует единственное равновесие по Нэшу. Это равновесие значительно «богаче» равновесия в исходной модели Хотеллинга. В частности, дополнительное нерыночное преимущество может быть избыточным и его использование — неэффективным.

Ключевые слова: модель Хотеллинга, равновесие по Нэшу, нерыночное преимущество

UDC: 519.83

Impact of the non-market advantage on equilibrium in A Hotelling model

A. I. Kosacheva

Financial University under the Government of the Russian Federation,
Faculty of Applied mathematics and information technologies, GSP-3,
49 Leningradskiy prospect, Moscow, 125993, Russia

E-mail: aikosacheva@gmail.com

Retrieved 3.02.2016, after completion – 10.05.2016.

Accepted for publication 15.05.2016.

The principle of minimal differentiation, based on the Hotelling model, is well known in the economy. It is applicable to horizontal differentiated goods of almost any nature. The Hotelling approach to modeling competition of oligopolies corresponds to a modern description of monopolistic competition with increasing returns to scale and imperfect competition. We develop a modification of the Hotelling model that endows a firm with a non-market advantage, which is introduced alike the valence advantage known in problems of political economy. The non-market (valence) advantage can be interpreted as advertisement (brand awareness of firms). Problem statement. Consider two firms competing with prices and location. Homogeneous consumers vary with its location on a segment. They minimize their costs, which additively includes the price of the product and the distance from them to the product. The utility function is linear with respect to the price and quadratic with respect to the distance. It is also expected that one of the firms (for certainty, firm № 1) has a market advantage d . The consumers are assumed to take into account the sum of the distance to the product and the market advantage of firm 1. Thus, the strategy of the firms and the consumers depend on two parameters: the unit t of the transport costs and the non-market advantage d . I explore characteristics of the equilibrium in the model as a function of the non-market advantage for different fixed t . The aim of the research is to assess the impact of the non-market advantage on the equilibrium. We prove that the Nash equilibrium exists and it is unique under additive consumers' preferences depending on the square of the distance between consumers and firms. This equilibrium is 'richer' than that in the original Hotelling model. In particular, non-market advantage can be excessive and inefficient to use.

Keywords: Hotelling model, Nash equilibrium, non-market advantage

Введение

В работе исследуется конкуренция двух олигополий при существовании нерыночного преимущества одной из них. В качестве олигополий рассмотрены две фирмы с одинаковым ассортиментом. Хорошо известно, что при совершенной конкуренции и свободном входе на рынок прибыль равна нулю. С увеличением участников цены будут снижаться, соответственно, и прибыли тоже, пока не станут равны нулю. Напротив, при не совершенной конкуренции в модели дуополии по Курно, где фирмы конкурируют только объемами выпуска, в равновесии прибыль будет положительна. Тем не менее, конкурируя ценами (по Бертрону), а не объемами выпуска, фирмы вынуждены опускать цены до величины издержек и уменьшать прибыль до нуля. В противном случае одна из фирм, опуская свою цену, завоевывает весь рынок.

Парадокс Бертрона связан с неожиданным равновесием в классической дилемме заключенного. В этой задаче теории игр, в отсутствие сговора, дуополии выбирают стратегии, которые приводят к менее удовлетворительному результату, чем в случае, когда фирмы могли бы договориться. Справедливость качественных выводов, следующих из дилеммы заключенного, до сих пор неясна. Роберт Аксельрод исследовал расширение сценария дилеммы заключенного, рассматривая динамическую задачу. Он показал возможный механизм эволюции альтруистического поведения из механизмов, которые изначально чисто эгоистические, через естественный отбор. («Эволюция кооперации», 1984). Дурлауф отмечает, что в мире несовершенной информации доверие к незнакомым членам общества, а не только к близким друзьям и семье, а также членство в группах позволяют облегчить поиск необходимых партнеров для кооперации [Durlauf, Fafchamps, 2005].

Парадокс Бертрона также можно разрешить в рамках пространственной экономики. Модели пространственной экономики принимают во внимание расстояние между рыночными агентами. В результате у фирмы появляется еще один параметр оптимизации — выбор местоположения. Стандартная модель показывает, что, подчеркивая свою индивидуальность, в том числе с помощью выбора местоположения, олигополии сохраняют положительную прибыль. Их оптимальной стратегии соответствует принцип наибольшей дифференциации.

После введения модели монополистической конкуренции Дикситом и Стиглицем [Dixit & Stiglitz, 1977] и формализации принципов международной торговли Кругманом [Krugman, 1991] современная экономическая география переживает определенный бум. В ее рамках определяются оптимальный размер города [Glaeser & Kohlhase, 2003; Tabuchi, Thisse, Zeng, 2005; Fujita, Krugman, Venables, 1999], эффективная налоговая политика [Anderson & Forslid, 2003], принципы концентрации отраслей [Ellison, Glaeser, 1999; Ellison, Glaeser, Kerr, 2010; Cavailhès, Tabuchi, Thisse, 2007], влияние миграции на экономику и благосостояние [Card, 2005; Покровский, Шаповал, 2015].

В модели Хотеллинга [Hotelling, 1929] фирмы расположены в линейном городе и конкурируют ценами и местоположением. Модель Хотеллинга описывает поведение участников рынка, на которых влияют два фактора: цены и затраты на транспортные расходы. Предпочтения потребителей предполагаются аддитивными по ценам и расстоянию до фирм. Однако если оба слагаемых входят в функцию полезности потребителя как линейные функции, то равновесие по Нэшу отсутствует. Если расстояние входит в функцию полезности как квадратичная функция, то в модели появляется единственное равновесие.

Принцип минимальной дифференциации, основанный на модели Хотеллинга, хорошо известен в экономике [Гончаренко, Попов, 2013]. Он применим к горизонтально распределенным товарам практически произвольной природы. После работы Доунса [Downs, 1957] идеи Хотеллинга стали применяться также к изучению конкуренции политических партий. Более экзотические приложения включают в себя, например, конкуренцию за радиочастоты и анализ роли репутации фирмы при ведении бизнеса. В 1963 году Стокс ввел в модель политической конкуренции нерыночное преимущество одного из кандидатов и показал, что равновесие в новых условиях значительно ближе к наблюдаемым результатам голосов [Stokes, 1963]. В политэкономии нерыночное преимущество называется валентным. Оно отражает харизму политических

лидеров (административные ресурсы и тому подобное). Обзор приложения валентного преимущества к задачам политической конкуренции дают работы Захарова [Zakharov, 2008] и Серры [Serra, 2010]. В своей работе мы переносим понятие валентного преимущества в модель Хотеллинга.

Подход Хотеллинга к моделированию конкуренции олигополий соответствует современному описанию монополистической конкуренции с возрастающей отдачей от масштаба и несовершенной конкуренцией [Combes, Mayer, and Thisse, 2008]. В основе конкуренции олигополий лежит выбор потребителей, которые выбирают товар, ориентируясь на его качество, цену и издержки, связанные с доставкой этого товара. Из-за пространственных ограничений рынок товаров оказывается сегментирован на несколько подрынков, ориентированных на проживающих в окрестности потребителей. В статье рассматривается простейший подрынок, на котором представлены две фирмы-олигополии. Предполагается, что одна из них обладает нерыночным (валентным) преимуществом, из-за которого покупатель готов покупать у нее товар по более высокой цене. Фактически размер этого преимущества определяется дополнительным расстоянием, которое готов преодолеть покупатель, чтобы приобрести товар по той же цене. Олигополии конкурируют друг с другом, назначая цены на свой товар и выбирая место продажи товаров.

Цель работы данной работы — оценить влияние нерыночного преимущества фирмы-лидера на равновесие в пространственной модели Хотеллинга.

Для решения задачи используется стандартный двухшаговый метод Хотеллинга. Первый шаг заключается в том, что фирмы независимо друг от друга выбирают свое оптимальное местоположение. Вторым шагом будет установление оптимальной цены независимо друг от друга, но уже при известном расположении. Технический аппарат, связанный с решением задач оптимизации, решается стандартными методами математического анализа. Предполагается, что две фирмы конкурируют ценами и расположением. Однородные потребители различаются своим расположением на отрезке. Они минимизируют свои затраты, в которые аддитивно входят цена товара и расстояние до фирм, причем цена в функцию полезности входит линейно, а расстояние — квадратично. Предполагается также, что одна из фирм (для определенности — первая фирма) имеет нерыночное преимущество. Стратегии фирм и потребителей зависят от двух параметров: затрат на единицу транспортных расходов и нерыночного преимущества. Фактически потребитель принимает во внимание сумму расстояния и нерыночного преимущества, так что при равных ценах может выбрать и более удаленную фирму, если она обладает нерыночным преимуществом. Конкуренция фирм моделируется в соответствии с теоретико-игровым подходом. Определяется игра и устанавливается, что в ней существует единственное равновесие по Нэшу. Проводя сравнительную статистику по нерыночному преимуществу, исследуется его влияние на равновесие.

В работе получены следующие результаты. Во-первых, установлено, что существует единственное равновесие по Нэшу при условии, что фирмы расположены на концах отрезка, одна из фирм имеет нерыночное преимущество, а расстояние в функцию полезности потребителей входит линейно. Во-вторых, единственное равновесие по Нэшу существует без каких-либо ограничений на расположение фирм, но при условии, что расстояние в функцию полезности потребителей входит квадратично. В-третьих, показано, что при увеличении нерыночного преимущества до определенного уровня фирма-лидер имеет возможность повышать цены и увеличивать прибыль. Однако превышение нерыночным преимуществом некоторого уровня d^* является неэффективным для фирмы-лидера. В равновесии ее прибыль уменьшается как функция от нерыночного преимущества d при $d > d^*$. Поэтому при наличии избыточного нерыночного преимущества ($d > d^*$), действуя оптимально, фирма-лидер должна его скрыть и придерживаться оптимальной стратегии, соответствующей нерыночному преимуществу $d = d^*$.

Формулировка модели

Модель конкуренции двух фирм формулируется с помощью теории игр. Определим игру двух игроков: фирма-лидер (фирма № 1) и фирма № 2. Модельный город представляет собой отрезок $[0; 1]$, в котором равномерно распределены потребители.

Стратегии $S_i = (p_i, x_i)$, $i = 1, 2$, фирм заключаются в выборе оптимального расположения и установке цены $P_i > 0$. Расположение и цены выбираются в следующем порядке. Сначала фирмы независимо друг от друга выбирают расположение на отрезке $[0; 1]$. Затем, при известных расположениях, каждая из фирм, независимо друг от друга, устанавливает цену. Для определения *выигрышей* фирм необходимо описать оптимизационную задачу потребителя. Рассмотрим потребителя, который находится в $x \in [0; 1]$. Выбирая фирму, потребитель видит цены p_1, p_2 и знает расположение фирм x_1, x_2 и принимает во внимание нерыночное преимущество d . Как свойственно любому потребителю, он стремится минимизировать свои затраты. Потребитель выбирает ту фирму, покупка товара у которой связана с меньшими издержками; $U = \min(C_1, C_2)$, где C_1 или C_2 — издержки потребителя. В издержки на приобретение товара у фирмы № 1 цена и расстояние входят аддитивно, причем цена — линейно, а расстояние — квадратично. Рассмотрено квадратичное расстояние, так как при более простом случае, когда расстояние входит линейно, равновесия нет. Фирма № 1 обладает нерыночным преимуществом d . Оно выражается в том, что издержки для фирмы № 2 становятся заведомо больше: $C_2 = p_2 + t(x - x_2 + d)^2$. Именно поэтому фирма № 1 ранее была названа фирмой лидером.

$$U = \min((p_1 + t(x - x_1)^2; p_2 + t(x - x_2 + d)^2), \quad (1)$$

где p_i — цена i -ой фирмы,

x_i — расположение i -ой фирмы,

d — нерыночное преимущество фирмы-лидера (фирмы № 1).

Выражение (1) описывает функции полезности потребителя.

Выигрышами фирм № 1 и № 2 являются прибыли Π_1 и Π_2 , которые определяются как произведение цены p_i и спроса D_i . Спрос D_i получается в результате решения задачи потребителя (1). В результате прибыли имеют вид

$$\Pi_1 = p_1 D_1(p_1, p_2), \quad (2)$$

$$\Pi_2 = p_2 D_2(p_1, p_2), \quad (3)$$

где p_i — цена i -ой фирмы,

x_i — расположение i -ой фирмы,

d — нерыночное преимущество фирмы-лидера (фирмы № 1).

Игра полностью определена.

Равновесие по Нэшу. Найдем равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Стратегии фирм S_1 и S_2 назовем равновесными, если они являются «лучшими ответами» на стратегию соперника, т. е. максимизируют собственные прибыли при заданной стратегии оппонента. Стратегии P_1 и P_2 находятся путем оптимизации соответствующих функций прибыли Π_1 и Π_2 (формулы (2), (3)).

Согласно стандартной модели Хотеллинга, где фирмы расположены в линейном городе и конкурируют ценами и расположением, т. е. в случае равнозначных фирм ($d = 0$) равновесие существует. Проверим, сохранится ли это равновесие при нерыночном преимуществе одной из фирм ($d > 0$).

Воспользуемся стандартной схемой построения равновесия, двухшаговым методом Хотеллинга. Первый шаг (подыгра G1): рассмотрим фиксированное расположение обеих фирм и определим их стратегии, соответствующее выигрышам, которые задаются функцией прибыли (2) и (3) для фирмы № 1 и фирмы № 2 соответственно. Необходимо найти равновесные оптимальные цены фирм.

Лемма 1. равновесные цены p_1^* и p_2^* при фиксированном расположении определяются в соответствии с формулами (4) и (5):

$$p_1^* = \frac{1}{3} \left(d + t(x_2^2 - x_1^2 + 2x_2 - 2x_1 - 2x_2 d - 2d) \right), \quad (4)$$

$$p_2^* = \frac{1}{3} \left(-d + t(x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 d - 4x_1 + 4x_2 - 4d) \right). \quad (5)$$

Зная решение подыгры $G1$, подставим найденные оптимальные значения цен в функцию прибыли. Теперь прибыли являются функциями от расположений фирм (x_1 и x_2), а d рассматривается как параметр.

$$\Pi_1^* = p_1^* D_1(p_1^*, p_2^*) = \frac{1/9(d + t(x_2^2 - x_1^2 - 2x_1 + 2x_2 - 2x_2d - 2d))^2}{2t(x_2 - x_1 - d)}, \quad (6)$$

$$\Pi_2^* = p_2^* D_2(p_1^*, p_2^*) = \frac{1/9(-d + t(x_1^2 - x_2^2 - 4x_1 + 4x_2 + 2x_2d - 4d))^2}{2t(x_2 - x_1 - d)}. \quad (7)$$

Доказательство леммы сводится к элементарному вычислению экстремума.

Второй шаг заключается в определении оптимального расположения фирм.

Лемма 2. При известных оптимальных ценах существуют оптимальные позиции фирм, которые задаются уравнениями (8) для фирмы № 1 и (9) для фирмы № 2.

$$4x_1x_2t - d - tx_2^2 - 3tx_1^2 + 2tx_2 - 2tx_1 - 4tx_1d + 2tx_2d - 2td = 0, \quad (8)$$

$$4x_1x_2t + d - 3tx_2^2 - tx_1^2 + 4tx_2 - 4tx_1 - 4tx_1d + 6tx_2d - 4td - 4td^2 = 0. \quad (9)$$

Решим задачу численно. Задавая определенные затраты на транспортные расходы (t), построим график, который представляет собой гиперболы, имеющие одинаковые асимптоты.

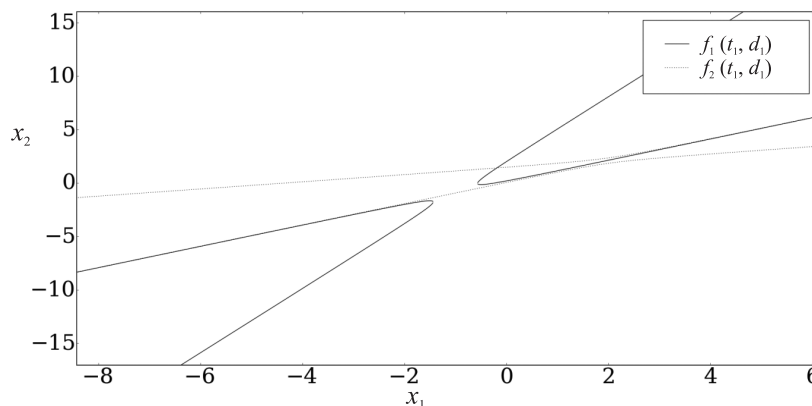


Рис. 1. Решение системы уравнений (8) и (9); зависимость x_2 (расположение фирмы № 2) от x_1 (расположение фирмы-лидера), где t_1 — затраты на единицу транспортных расходов, а d_1 — рыночное преимущество

Решением системы (8), (9) будет пересечение соответствующих гипербол. Оно и определяет равновесие, зависящее от параметра t .

Влияние рыночного преимущества

Для каждого значения затрат на транспортные расходы (t) равновесие существует только до определенного значения рыночного преимущества (примерно до 1.5). При дальнейшем его увеличении равновесие исчезает и цены становятся отрицательными. Так, на рис. 2 видно, что при незначительных транспортных затратах и небольшом рыночном преимуществе решение системы существует (обе фирмы находятся практически в центре), а при увеличении рыночного преимущества решение пропадает. Аналогичное происходит и при больших затратах на транспортные издержки (но фирмы начинают отдаляться друг от друга), что похоже на решение известной модели Хотеллинга без существования рыночного преимущества. Там, оптимальное положение для фирм было на концах отрезков.

Далее рассмотрим, как при различных транспортных затратах будет изменяться расположение фирм в равновесии при увеличении нерыночного преимущества.

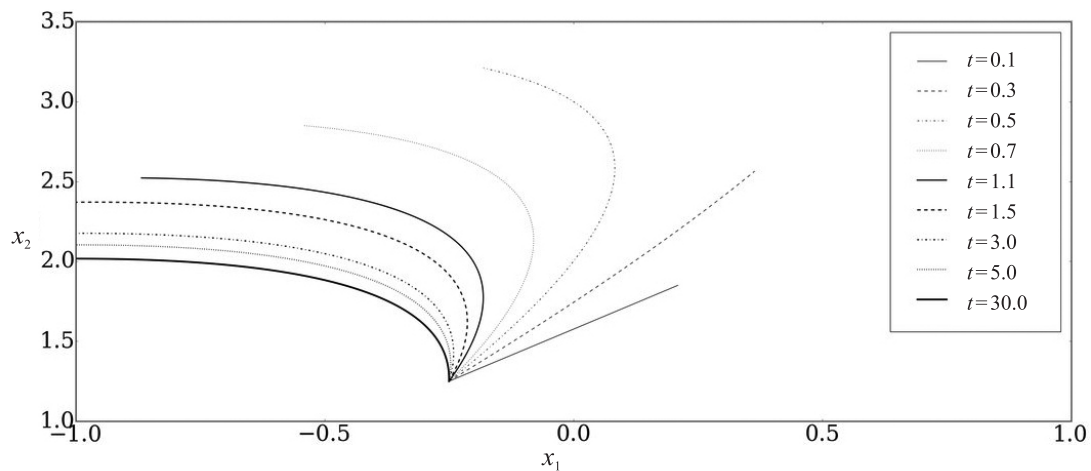


Рис. 2. Зависимость x_2 (расположения фирмы № 2) от x_1 (расположение фирмы-лидера) в равновесии при увеличении нерыночного преимущества (d), при различных t — затратах на единицу транспортных расходов

Из графика видно, что при незначительных транспортных затратах фирма-лидер будет двигаться к центру и далее, вытесняя конкурента. Заметим, что при увеличении нерыночного преимущества больше определенного уровня фирма начинает двигаться обратно, а ее цены начинают падать и, соответственно, прибыль уменьшается.

Фирмы конкурируют ценами и местоположением. Когда t (затраты на единицу транспортных издержек) мало, цены составляет основную часть полезности потребителя. При увеличении t фирмы начинают конкурировать расстоянием, так как транспортные издержки влияют на функцию полезности потребителя. Рассмотрим два предельных случая конкуренции: конкуренция в ценах и конкуренция местоположением.

1. При незначительных затратах t на транспорт для покупателей имеет значение цена.

Как мы знаем, когда две фирмы равнозначны, т. е. ни у одной из фирм нет нерыночного преимущества, для достижения равновесия оптимальное расположение фирм будет $x_1^* = -1/4$ и $x_2^* = 5/4$. Таким образом, фирмы будут находиться вне рынка. Смысла располагать фирму на болоте или в поле нет, поэтому мы ограничиваем месторасположение фирм так, чтобы они не выходили за пределы рынка тогда получаем $x_1^* = 0$ и $x_2^* = 1$. Этот результат говорит о том, что ценовая конкуренция является мощным фактором, и фирмам хочется отойти друг от друга. Так происходит потому, что пространственное разделение ослабляет ценовую конкуренцию.

В нашем случае, при существовании нерыночного преимущества фирмы-лидера, ситуация меняется.

При малых t , с увеличением нерыночного преимущества (d), фирма-лидер движется к центру, вытесняя фирму-конкурента.

При $t = 1$ до определенного момента фирму № 1 устраивает свое расположение, а фирма № 2 отдаляется от нее. Но после увеличения нерыночного преимущества (d) больше 0.72 фирма № 1 начинает отдаляться от центра, а фирма № 2, наоборот, стремится попасть в центр, увеличивая свою прибыль.

2. При увеличении t фирмы начинают конкурировать местоположением, так как расстояние до фирм имеет значение для покупателей. Обе фирмы движутся в противоположные стороны. Фирма № 1 смещается дальше от центра, но по-прежнему вытесняет конкурирующую фирму № 2 из центра.

При $t > 1$ равновесие существует до определенного d^* , и это способствует увеличению прибыли фирмы № 1. При дальнейшем увеличении $d > d^*$ равновесие существует, однако оно

не выгодно фирме № 1, так как ее прибыль уменьшается, в то время как у фирмы № 2 прибыль начинает расти.

У фирмы с нерыночным преимуществом больше возможностей. При слишком большом преимуществе, которое уменьшает ее прибыль, фирма имеет возможность скрыть часть своего преимущества. Другими словами, при увеличении нерыночного преимущества до определенного уровня цены у фирмы-лидера растут и прибыль, соответственно, увеличивается. Местоположение фирм изменяется так, что при затратах на единицу транспортных расходов (t) меньше единицы фирма-лидер двигается ближе к центру, вытесняя конкурирующую фирму. При затратах на единицу транспортных расходов больше единицы обе фирмы двигаются в противоположенные стороны. Однако превышение нерыночным преимуществом некоторого уровня d^* не приносит пользы фирме-лидеру. В равновесии ее прибыль уменьшается как функция от d при нерыночном преимуществе больше определенного уровня. Поэтому при большом нерыночном преимуществе оптимальной стратегией фирмы-лидера, видимо, является стратегия, при которой он не будет использовать свое нерыночное преимущество в полной мере.

Выводы

В данной работе построена модель Хотеллинга при наличии нерыночного (валентного) преимущества одной из фирм и оценено влияние нерыночного преимущества на равновесие в пространственной модели. Рассмотрена функция полезности потребителей, в которой затраты на перемещение являются квадратичной функцией от расстояния. На основе проделанной работы установлено, что при добавлении малого нерыночного преимущества ($d > 0$) для фирмы-лидера (№ 1) существует равновесие. Найденное равновесие оказывается намного богаче. В частности, оценив влияние нерыночного преимущества, мы показали, что при увеличении до некоторого фиксированного значения прибыли фирмы-лидера возрастает. Фирма-лидер вытесняет с рынка конкурента, увеличивая свою прибыль. Вытеснение происходит в прямом смысле, так что другая фирма вынуждена удалиться из центра города. А чрезмерное преимущество фирмы-лидера оказывается избыточным, так как вторая фирма имеет возможность в ответ увеличить свою прибыль. Следовательно, можно сделать вывод, что меньшее нерыночное преимущество было выгоднее для фирмы-лидера. Показано, что, действуя оптимально, фирма должна его скрыть.

Список литературы (References)

- Методы оптимальных решений в экономике и финансах / Под ред. В. М. Гончаренко, В. Ю. Попова. — М.: КНОРУС. — 2013. — 400 с.
Metody optimalnyh reshenij v ehkonomie i finansah / Ed. V. M. Goncharenko, V. Yu. Popov. — M.: KNORUS. — 2013. 400 p. (in Russian).
- Покровский Д. А., Шаповал А. Б. Распределение предпринимательских способностей и миграция: структура занятости, неравенство доходов и благосостояние // Журнал новой экономической ассоциации. — 2015. — № 2. — С. 36–62.
Pokrovsky D. A., Shapoval A. B. Raspredelenie predprinimatelskih sposobnostej i migraciya: struktura zanyatosti, neravenstvo dohodov i blagosostoyanie [Distribution of entrepreneurial skills and migration: the structure of employment, income inequality and wealth] // Journal of the New Economic Association. — 2015. — No. 2. — P. 36–62 (in Russian).
- Andersson F. and Forslid R. Tax Competition and Economic Geography // Journal of Public Economic Theory, Association for Public Economic Theory. — 2003. — Vol. 5(2). — P. 279–303.
- Card D. Is the new immigration really so bad? // The Economic Journal. — 2005. — Vol. 115 (507).
- Cavallès J., Gaigné C., Tabuchi T., Thisse J.-F. Trade and the Structure of Cities // Journal of Urban Economics. — 2007. — Vol. 62. — P. 383–404.

- Combes P.-P., Mayer T., and Thisse J.-F.* Economic Geography. The integration of regions and nations. — Princeton University Press, 2008.
- Dixit K., Stiglitz E.* Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // The American Economic Review. — 1997. — Vol. 67, No. 3. — P. 297.
- Downs A.* An Economic Theory of Political Action in a Democracy // Journal of Political Economy. — The University of Chicago Press, 1957. — Vol. 65, No. 2. — P. 135–150.
- Durlauf S., Fafchamps M.* Handbook of Economic Growth. — 2005. — Vol. 1, No. 1. — L.: Elsevier.
- Ellison G., Glaeser E. L., Kerr W. R.* What causes industry agglomeration? Evidence from coagglomeration patterns // American Economic Review. — 2010. — Vol. 100(3).
- Ellison G., Glaeser E. L.* The geographic concentration of industry: Does natural advantage explain agglomeration? // American Economic Review. — 1999. — Vol. 89(2).
- Fujita M., Krugman P., and Venables A. J.* The spatial economy: cities, regions, and international trade. — MIT, 1999.
- Glaeser E. and Kohlhase J.* Cities, regions and the decline of transport costs // Papers in Regional Science. — Springer, 2003. — Vol. 83(1). — P. 197–228.
- Hotelling H.* Stability in competition // Economic Journal. — 1929. — No. 39.
- Krugman P.* Increasing Returns and Economic Geography // The Journal of political Economy. — The University of Chicago Press, 1991. — Vol. 99, No. 3. — P. 483–499.
- Meagher K. J., Zauner K. G.* Location-then-price competition with uncertain consumer tastes // Economic theory. — Springer, 2005. — Vol. 25 (4). — P. 799–818.
- Serra G.* Polarization of What? A Model of Elections with Endogenous Valence // The journal of Politics. — Southern Political Science Association, 2010. — Vol. 72, No. 2. — P. 426–437.
- Stokes D.* Spatial Models of Party Competition // The American Political Science Review. — American Political Science Association, 1963. — Vol. 57, No. 2. — Spatial Models of Party Competition. — P. 368–377
- Tabuchi T., Thisse J.-F., and Zeng D.-Z.* On the number and size of cities // Journal of Economic Geography. — Oxford University Press, 2005. — Vol. 5(4). — P. 423–448.
- Thisse J.-F., Combes P.-P., Mayer T.* Economic Geography: The Integration of Regions and Nations. — Princeton University Press, 2008. — P. 233.
- Zakharov A.* A model of candidate location with endogenous valence // LLC. — 2008.