

УДК: 536.24

Математическое моделирование интервально-стохастических тепловых процессов в технических системах при интервальной неопределенности определяющих параметров

А. Г. Мадера^а, П. И. Кандалов

ФГУ ФНИЦ «Научно-исследовательский институт системных исследований РАН»,
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский просп., 36, к. 1.

E-mail: ^а agmprof@mail.ru

Получено 2.03.2016, после доработки – 18.04.2016.

Принято к публикации 28.04.2016.

Математическое и компьютерное моделирование тепловых процессов в технических системах, проводимое в настоящее время, основано на допущении, согласно которому все параметры, определяющие тепловые процессы, полностью и однозначно известны и определены, то есть являются детерминированными. Между тем практика показывает, что параметры, определяющие тепловые процессы, носят неопределенный интервально-стохастический характер, что, в свою очередь, обуславливает интервально-стохастический характер тепловых процессов в технической системе. Это означает, что реальные значения температуры каждого элемента в технической системе будут случайным образом распределены внутри интервалов своего изменения. Поэтому детерминированный подход к моделированию тепловых процессов, при котором получают конкретные значения температур элементов, не позволяет адекватно рассчитывать температурные распределения в технических системах. Интервально-стохастический характер параметров, определяющих тепловые процессы, обуславливается тремя группами факторов: (а) статистическим технологическим разбросом параметров элементов при изготовлении и сборке системы; (б) случайным характером факторов, обусловленных функционированием технической системы (флуктуациями токов, напряжений, мощностями потребления, температурами и скоростями потоков охлаждающей жидкости и среды внутри системы; (с) случайностью параметров окружающей среды (температурой, давлением, скоростью). Интервально-стохастическая неопределенность определяющих факторов в технических системах является неустранимой, поэтому пренебрежение ею приводит к ошибкам при проектировании технических систем. В статье развивается метод, позволяющий моделировать нестационарные нелинейные интервально-стохастические тепловые процессы в технических и, в частности, электронных системах при интервальной неопределенности определяющих параметров. Метод основан на получении и последующем решении уравнений для нестационарных статистических мер (математических ожиданий, дисперсий, ковариаций) распределений температуры в технической системе при заданных интервалах изменения и статистических мерах определяющих параметров. Рассмотрено применение разработанного метода к моделированию интервально-стохастического теплового процесса в конкретной электронной системе.

Ключевые слова: математическое моделирование, тепловой процесс, техническая система, интервальный, стохастический, нелинейный, нестационарный, статистические меры, математическое ожидание, дисперсия, ковариация

UDC: 536.24

Mathematical modeling of the interval stochastic thermal processes in technical systems at the interval indeterminacy of the determinative parameters

A. G. Madera, P. I. Kandalov

Scientific Research Institute for System Analysis, RAS
36/1 Nakhimovsky Prospekt, Moscow, 117218, Russia

E-mail: ^a agmprof@mail.ru

Retrieved 2.03.2016, after completion – 04.18.2016.

Accepted for publication 28.04.2016.

The currently performed mathematical and computer modeling of thermal processes in technical systems is based on an assumption that all the parameters determining thermal processes are fully and unambiguously known and identified (i.e., determined). Meanwhile, experience has shown that parameters determining the thermal processes are of undefined interval-stochastic character, which in turn is responsible for the interval-stochastic nature of thermal processes in the electronic system. This means that the actual temperature values of each element in a technical system will be randomly distributed within their variation intervals. Therefore, the determinative approach to modeling of thermal processes that yields specific values of element temperatures does not allow one to adequately calculate temperature distribution in electronic systems. The interval-stochastic nature of the parameters determining the thermal processes depends on three groups of factors: (a) statistical technological variation of parameters of the elements when manufacturing and assembling the system; (b) the random nature of the factors caused by functioning of a technical system (fluctuations in current and voltage; power, temperatures, and flow rates of the cooling fluid and the medium inside the system); and (c) the randomness of ambient parameters (temperature, pressure, and flow rate). The interval-stochastic indeterminacy of the determinative factors in technical systems is irremediable; neglecting it causes errors when designing electronic systems. A method that allows modeling of unsteady interval-stochastic thermal processes in technical systems (including those upon interval indeterminacy of the determinative parameters) is developed in this paper. The method is based on obtaining and further solving equations for the unsteady statistical measures (mathematical expectations, variances and covariances) of the temperature distribution in a technical system at given variation intervals and the statistical measures of the determinative parameters. Application of the elaborated method to modeling of the interval-stochastic thermal process in a particular electronic system is considered.

Keywords: mathematical modelling, thermal process, technical system, interval, stochastic, non-linear, unsteady, statistical measures, mathematical expectation, variance, covariance

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 501–520 (Russian).

Введение

Методы математического и компьютерного моделирования, применяемые в настоящее время при тепловом проектировании технических и, в частности, электронных систем (ЭС), основаны на допущении, при котором все параметры, определяющие тепловые процессы, полностью известны и однозначно определены, то есть являются детерминированными. Между тем практика показывает, что определяющие параметры в ЭС отнюдь не являются детерминированными. Так, сравнение параметров, определяющих тепловые процессы в различных экземплярах идентичных ЭС, как правило, существенно различаются между собой. Например, измерения тепловых сопротивлений или мощностей потребления у различных экземпляров микросхем одного и того же типа показывают, что их значения подвержены значительному разбросу и изменяются внутри некоторых интервалов, границы которых определяются как технологией изготовления, так и последующим выходным контролем микросхем.

Действительно, различные экземпляры идентичных ЭС содержат множество взаимозаменяемых электронных элементов (микропроцессоры, микросхемы, электро- и радиоэлементы), причем конкретные значения параметров элементов в каждом экземпляре ЭС априори не известны, а известно лишь, что эти значения изменяются в пределах некоторых интервалов. Границы интервалов изменения параметров могут быть установлены посредством статистической обработки результатов измерений достаточно большой выборки из партии однотипных элементов, однако конкретное значение параметра у данного экземпляра элемента остается неизвестным. Другими словами, определяющие параметры элементов ЭС не являются детерминированными, а носят неопределенный интервальный характер.

Интервальная неопределенность определяющих параметров элементов ЭС обуславливает, в свою очередь, интервальную неопределенность температуры элементов. Это означает, что реальные значения температуры каждого элемента в ЭС будут случайным образом распределены внутри интервалов своего изменения. Поэтому детерминированный подход к моделированию тепловых процессов в ЭС, при котором получаются конкретные точечные значения температур элементов, не позволяет адекватно рассчитывать температурные распределения в ЭС, что приводит к ошибкам проектирования ЭС.

Интервально стохастический характер параметров, определяющих характер тепловых процессов в ЭС, обуславливается тремя группами факторов, также носящих интервально стохастический характер:

- (1) статистическим технологическим разбросом параметров элементов при их изготовлении, а также сборке и монтаже в ЭС;
- (2) случайным характером факторов, обусловленных функционированием ЭС: токами и напряжениями электропитания, мощностями потребления элементов ЭС, температурами и скоростями потоков жидкости внутри ЭС;
- (3) случайностью параметров окружающей среды: температурой, давлением, скоростью потока.

Отметим, что интервально стохастическая неопределенность определяющих факторов и параметров в ЭС является принципиальной и неустранимой. Поэтому проблема математического и компьютерного моделирования тепловых процессов при воздействии интервально стохастических определяющих факторов и параметров чрезвычайно актуальна для осуществления адекватного теплового проектирования ЭС.

Аналізу и моделированию стохастических тепловых процессов посвящено достаточно большое количество работ. В большей части работ стохастический теплоперенос рассматривается для тел простой формы и при воздействии отдельных стохастических факторов (начальная температура, температура среды, температура или тепловой поток на границе, интенсивность внутренних источников теплоты, теплофизические свойства материалов, степень черноты, скорость жидкости) [Campo, Yishimura, 1979; Chantasiriwan, 2006; Emery, 2004; Georgiadis, 1991; Madera, 1994; Nakamura, Fujii, 2006; Saleh, El-Kalla, Ehab, 2007; Srivastava, 2005; Stefanou, 2009].

Во многих работах принимаются нереалистические допущения, согласно которым стохастические определяющие факторы имеют вид гауссовых белых шумов или процессов типа броуновского движения, в то время как в реальных технических системах подобные процессы на практике не встречаются. В то же время работы, относящиеся к моделированию нестационарных интервально стохастических тепловых процессов в сложных технических системах представлены явно недостаточно [Мадера, 2005; Мадера, Кандалов, 2014, 2015; Keller, Antonetti, 1979; Madera, 1994], при этом развитые в них подходы и методы не позволяют использовать их в практике моделирования и теплового проектирования ЭС.

В данной статье развивается метод математического и компьютерного моделирования нестационарных нелинейных, интервально стохастических тепловых процессов в ЭС. Метод основан на получении уравнений для статистических мер (математических ожиданий, дисперсий, ковариаций) тепловых процессов при заданных статистических мерах входных интервально стохастических определяющих параметров. Приведен пример конкретной ЭС, показывающий применение разработанного метода.

Математическая модель нестационарных интервально стохастических тепловых процессов в электронной системе

Электронная система состоит из множества (N) электронных элементов, находящихся в тепловом взаимодействии между собой, потоками жидкости (воздуха), протекающими внутри ЭС, и окружающей средой. Часть элементов ЭС (активная) потребляет энергию от внешних источников питания (микропроцессоры, микросхемы, резисторы и другие электро-, радиоэлементы с тепловыделением) и нагревает элементы ЭС, другая часть элементов (пассивная) не потребляет энергию (теплоотводы, электрические разъемы, конденсаторы, элементы конструкции). Все элементы участвуют в теплообмене между собой и средой как внутри, так и вне ЭС.

Тепловая модель ЭС может быть представлена в виде системы N изотермических тел [Ellison, 2011; Мадера, 2005], которая получается при дискретизации конструкции ЭС на отдельные элементы. Дискретизация конструкции ЭС осуществляется вплоть до размеров элементов, при которых с достаточной для практики точностью можно принять, что распределения температуры в полученных элементах являются изотермическими. Степень дискретизации конструкции ЭС на элементы должна соответствовать цели и требуемому уровню адекватности моделирования теплового процесса в ЭС. Распределение температуры жидкости внутри ЭС априори неизвестно и определяется процессами теплообмена между элементами ЭС и участками жидкости внутри ЭС, имеющими различные температуры, плотности и скорости. С достаточной для инженерной практики точностью можно принять, что распределение температуры жидкости внутри ЭС незначительно отличается от изотермического. Для воздушной среды, которая обычно заполняет внутреннее пространство ЭС, данное положение достаточно хорошо выполняется на практике, так как полные теплоемкости элементов в ЭС значительно превышают полную теплоемкость воздуха. В этом случае изотермическая жидкостная среда внутри ЭС включается в тепловую модель в качестве $N+1$ -го элемента (рис. 1).

Тепловой процесс в ЭС однозначно определяется факторами: форма, размеры и пространственная компоновка элементов в ЭС; мощности тепловыделений элементов; граничные условия на поверхностях элементов и ЭС и характер теплообмена (вынужденная или естественная конвекция, излучение, кондукция); температура жидкости на входе в ЭС; температура окружающей среды; начальные условия; теплофизические характеристики материалов элементов ЭС и среды (плотность, теплопроводность, теплоемкость, вязкость, степень черноты). Если определяющие параметры являются детерминированными, то тепловой процесс будет также детерминированным, а описывающая его математическая модель — детерминированной. В случае когда хотя бы один из определяющих параметров теплового процесса является интервально стохастическим, тепловой процесс в ЭС будет носить интервально стохастический характер и описываться стохастической математической моделью. Учитывая, что тепловые процессы

в ЭС нелинейно зависят от значений температуры элементов и среды внутри вне ЭС, являются нестационарными и интервально стохастическими, адекватная математическая модель, описывающая тепловые процессы в реальных ЭС, должна быть нелинейной, нестационарной и интервально стохастической. Интервально стохастические тепловые процессы, имеющие место в реальных ЭС и рассматриваемые в математической модели, обладают конечной дисперсией, а их реализации вместе с первыми производными являются непрерывными и ограниченными для всех $(t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega$, где Ω — пространство элементарных событий ω в вероятностном пространстве $\{\Omega, U, P\}$, U — σ -алгебра подмножеств Ω ; P — вероятность на U .

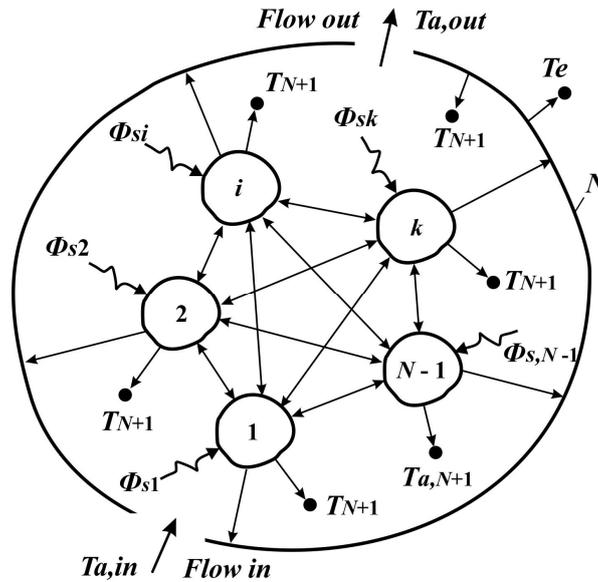


Рис. 1. Тепловая модель ЭС в виде системы $N + 1$ изотермических элементов, заключенных в оболочку ЭС (элемент N), находящихся во взаимодействии между собой, потоком жидкости внутри ЭС (элемент $N + 1$) с температурой T_{N+1} и окружающей средой вне ЭС с температурой T_e

Стохастическая математическая модель, описывающая интервально стохастические температуры $T_i(t, \omega)$ элементов i ($i = 1, 2, \dots, N$) в тепловой модели ЭС (рис. 1), следует из интегрального уравнения теплового баланса [Дьярмати, 1974; Мадера, 2005], и имеет вид:

$$h_i \frac{dT_i(t, \omega)}{dt} + J_i(t, \omega) = \Phi_i(t, \omega), \quad (t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega, \quad (1)$$

где $h_i = \rho_i c_i V_i$ — полная теплоемкость i -го элемента объемом V_i , плотностью материала ρ_i , удельной теплоемкостью c_i ; $J_i(t, \omega)$ — интервально стохастический тепловой поток с поверхности S_i элемента i ко всем остальным элементам тепловой модели ($i = 1, 2, \dots, N$), в среду внутри ЭС ($i = N + 1$) и окружающую среду вне ЭС; $\Phi_i(t, \omega)$ — интервально стохастическая мощность внутренних источников теплоты в i -ом элементе.

Стохастическая математическая модель теплообмена элементов ЭС с жидкостью, протекающей внутри ЭС, следует из интегрального уравнения теплового баланса в жидкости [Дьярмати, 1974; Мадера, 2005]. Приняв, что жидкость (элемент $N + 1$ в тепловой модели, рис. 1) внутри ЭС несжимаема и ее скорость много меньше скорости звука, получим уравнение теплового баланса в изотермической жидкости с температурой $T_{N+1}(t, \omega)$:

$$h_{N+1} \frac{dT_{N+1}(t, \omega)}{dt} - J_{N+1}(t, \omega) + Q_a(t, \omega) = 0, \quad (t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega, \quad (2)$$

где $J_{N+1}(t, \omega)$ — интервально стохастический тепловой поток с поверхности всех элементов $i = 1, 2, \dots, N$ в жидкость; $Q_a(t, \omega)$ — интервально стохастический поток теплоты, уносимый жидкостью, протекающей через ЭС; $h_{N+1} = \rho_{N+1} c_{N+1} V_{N+1}$ — полная теплоемкость жидкости внутри ЭС объемом V_{N+1} , плотностью ρ_{N+1} , удельной теплоемкостью c_{N+1} .

В уравнении (1) тепловые потоки $J_i(t, \omega)$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, складываются из тепловых потоков $J_{ij}(t, \omega)$, поступающих от каждого i -го элемента ко всем остальным элементам тепловой модели

$$J_i(t, \omega) = \sum_{j=1, i \neq j}^{N+1} J_{ij}(t, \omega), \quad (3)$$

а тепловой поток $J_N(t, \omega)$ — из тепловых потоков $J_{Nj}(t, \omega)$ от элемента N (оболочка ЭС) ко всем остальным элементам $j = 1, 2, \dots, \dots, N-1, N+1$ и в окружающую среду $J_{Ne}(t, \omega)$, то есть

$$J_N(t, \omega) = \sum_{j=1, j \neq N}^{N+1} J_{Nj}(t, \omega) + J_{Ne}(t, \omega). \quad (4)$$

Тепловой поток $J_{N+1}(t, \omega)$ в уравнении (2) равен сумме тепловых потоков $J_{N+1,j}(t, \omega)$, поступающих от элементов $j = 1, 2, \dots, N$ тепловой модели в жидкость (элемент $N+1$) внутри ЭС, то есть

$$J_{N+1}(t, \omega) = \sum_{j=1}^N J_{N+1,j}(t, \omega). \quad (5)$$

Отметим также, что потоки теплоты J_{ij} между двумя изотермическими элементами i и j с температурами T_i и T_j в общем случае одновременно переносятся потоками кондукции ($J_{i,j}^{cond}$), конвекции ($J_{i,j}^{conv}$) и излучения ($J_{i,j}^{rad}$), причем $J_{ij} = J_{i,j}^{cond} + J_{i,j}^{conv} + J_{i,j}^{rad}$. Для элементов ЭС тепловые потоки $J_{i,j}^{(cond, conv, rad)}$ в ЭС могут быть представлены в виде [Ellison, 2011]:

$$J_{i,j}^{(cond, conv, rad)} = g_{i,j}^{(cond, conv, rad)} (T_i - T_j), \quad (6)$$

где $g_{i,j}^{(cond, conv, rad)}$ — тепловые проводимости (кондукции, конвекции, излучения) между элементами i и j , которые для конвекции и излучения определяются равенством $g_{i,j}^{(conv, rad)} = \alpha_{i,j}^{(conv, rad)} S_{i,j}^{(conv, rad)}$; $S_{i,j}^{(conv, rad)}$ — поверхность элемента, участвующая в теплообмене; $\alpha_{i,j}^{(conv, rad)}$ — коэффициенты теплоотдачи конвекцией и излучением. Коэффициенты теплоотдачи $\alpha_{i,j}^{(conv, rad)}$ нелинейно зависят от температуры, так, коэффициент теплоотдачи при естественной конвекции $\alpha_{i,j}^{conv} \sim (T_i - T_j)^n$, $0 < n \leq 1$, а коэффициент теплоотдачи излучением $\alpha_{i,j}^{rad} \sim (T_i^4 - T_j^4) / (T_i - T_j)$ [Ellison, 2011].

В уравнении (2) поток теплоты, уносимый жидкостью, протекающей внутри ЭС, равен

$$Q_a(t, \omega) = c_a G_a(t, \omega) \cdot (T_{a,out}(t, \omega) - T_{a,in}(t, \omega)),$$

где $G_a = \rho_{a,in} v_{a,in} S_{a,in} = \rho_{a,out} v_{a,out} S_{a,out}$ — массовый расход жидкости, поступающей со скоростью $v_{a,in}$ через входные отверстия оболочки ЭС площадью $S_{a,in}$ и выходящей через выходные отверстия оболочки ЭС площадью $S_{a,out}$ со скоростью $v_{a,out}$; $T_{a,out}(t, \omega)$ и $T_{a,in}(t, \omega)$ — интервально стохастические температуры жидкости на выходе и входе ЭС.

Приняв, что средняя температура жидкости внутри ЭС связана с входной и выходной температурами жидкости соотношением $T_{N+1} = 0,5 \cdot (T_{a,in} + T_{a,out})$, получим, что тепловой поток в жидкости (элемент $N+1$) может быть записан в виде

$$Q_a(t, \omega) = 2c_{N+1}G_a \cdot (T_{N+1}(t, \omega) - T_{a,in}(t, \omega)). \quad (7)$$

Отметим, что расход жидкости G_a в общем случае зависит от температуры жидкости $T_{a,in}(t, \omega)$ на входе ЭС, температуры $T_{N+1}(t, \omega)$ внутри ЭС, а также от температуры окружающей среды $T_e(t, \omega)$, то есть $G_a(t, \omega) = G_a(T_{a,in}(t, \omega), T_{N+1}(t, \omega), T_e(t, \omega))$. При естественной вентиляции воздуха через входные и выходные отверстия ЭС расход G_a будет нелинейно зависеть от температуры воздуха внутри и снаружи ЭС и температуры воздуха на входе в ЭС, причем обычно $T_{a,in} = T_e$. При охлаждении внутреннего пространства ЭС принудительно нагнетаемой жидкостью (в том числе воздухом) расход G_a будет зависеть в основном от скорости жидкости на входе в ЭС и в меньшей степени от температуры жидкости внутри и вне ЭС. Для герметичной конструкции ЭС расход жидкости внутри ЭС равен нулю.

Таким образом, потоки теплоты $J_{ij}, J_{Nj}, J_{Ne}, J_{N+1,j}$ в (1)–(5) являются интервально стохастическими нестационарными и нелинейными функциями от интервально стохастических температур элементов $T_i = T_i(t, \omega), i = 1, 2, \dots, N + 1$, температуры окружающей среды $T_e = T_e(t, \omega)$, температуры жидкости $T_{a,in} = T_{a,in}(t, \omega)$ на входе в ЭС и интервальных случайных величин кондуктивных тепловых проводимостей $g_{ij}(\omega) = g_{ij}^{cond}$ (далее верхний индекс в g_{ij}^{cond} опускается), то есть

$$J_{ij} = J_{ij}(T_i, T_j, T_e, T_{a,in}, g_{ij}, t, \omega), J_{Nj} = J_{Nj}(T_N, T_j, T_e, T_{a,in}, g_{ij}, t, \omega), \\ J_{Ne} = J_{Ne}(T_N, T_e, t, \omega), J_{N+1,j} = J_{N+1,j}(T_{N+1}, T_j, T_{a,in}, t, \omega).$$

Стохастическая математическая модель, описывающая нестационарные, нелинейные, интервально стохастические тепловые процессы в тепловой модели ЭС, примет следующий вид $((t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega)$:

– для элементов $i = 1, 2, \dots, N - 1, N + 1$

$$h_i \frac{dT_i(t, \omega)}{dt} + \sum_{j=1, i \neq j}^{N+1} J_{ij}(T_i, T_j, g_{ij}, t, \omega) = \Phi_i(t, \omega); \quad (8)$$

– для элемента $i = N, j = 1, 2, \dots, \dots N - 1, N + 1$

$$h_N \frac{dT_N(t, \omega)}{dt} + \sum_{j=1, i \neq j}^{N+1} J_{Nj}(T_N, T_j, g_{ij}, t, \omega) + J_{Ne}(T_N, T_e, t, \omega) = \Phi_N(t, \omega); \quad (9)$$

– для элемента $i = N + 1$ (жидкость внутри ЭС), $j = 1, 2, \dots, \dots N$

$$h_{N+1} \frac{dT_{N+1}(t, \omega)}{dt} - \sum_{j=1}^N J_{N+1,j}(T_{N+1}, T_j, t, \omega) + 2c_{N+1}G_a(T_{N+1}(t, \omega) - T_{a,in}(t, \omega)) = 0, \quad (10)$$

со стохастическими начальными условиями для элементов $i = 1, 2, \dots, N + 1$:

$$T_i(t = 0, \omega) = T_{0,i}(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (11)$$

где $T_{0,i}(\omega)$ — начальные интервально стохастические температуры элементов.

Вводя вектор температур элементов $T = T(t, \omega)$ тепловой модели ЭС система уравнений (8)–(10) может быть записана в матричном виде:

$$H \frac{dT(t, \omega)}{dt} + J(t, \omega) = \Phi(t, \omega), \quad (t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega, \quad (12)$$

$$T(t=0, \omega) = T_0(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (13)$$

где $T(t, \omega) = (T_1(t, \omega), T_2(t, \omega), \dots, T_{N+1}(t, \omega))'$ — вектор интервально стохастических температур элементов тепловой модели ЭС; $H = \|h_i\|$ — детерминированная диагональная $(N+1) \times (N+1)$ -матрица с элементами $h_i = \rho_i c_i V_i$, $i = 1, 2, \dots, N+1$; $J(t, \omega) = (J_1(t, \omega), J_2(t, \omega), \dots, J_{N+1}(t, \omega))'$ — вектор интервально стохастических тепловых потоков элементов тепловой модели ЭС, определяемых выражениями (3), (4), (5), (7); $\Phi(t, \omega) = (\Phi_1(t, \omega), \Phi_2(t, \omega), \dots, \Phi_{N+1}(t, \omega))'$ — вектор интервально стохастических мощностей внутренних источников теплоты в элементах ЭС; $T_0(\omega) = (T_{0,1}(\omega), T_{0,2}(\omega), \dots, T_{0,N+1}(\omega))'$ — вектор интервально стохастических начальных температур элементов; $(\cdot)'$ — операция транспонирования.

Матричное стохастическое уравнение (12) с начальным условием (13) является нестационарным, нелинейным, интервально стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка в обыкновенных производных и полностью определяет искомым вектор нестационарных интервально стохастических температур $T(t, \omega)$ элементов ЭС.

Известно (см., например, [Адомиан, 1987; Пугачев, 1962]), что исчерпывающей характеристикой случайных процессов являются их законы распределения всех порядков, определение которых, однако, не представляется возможным ввиду чрезвычайной сложности уравнения (12). Между тем для моделирования тепловых процессов в ЭС знания законов распределения не требуется, поскольку для инженерной практики теплового проектирования ЭС наиболее важными характеристиками являются статистические меры интервально стохастических температур $T_i(t, \omega)$ элементов $i = 1, 2, \dots, N+1$, а именно:

- математические ожидания $\bar{T}_i(t) = E\{T_i(t, \omega)\}$;
- дисперсии $Var_{T_i}(t) = E\{(T_i(t, \omega))^2\}$;
- среднеквадратические отклонения $\sigma_{T_i}(t) = \sqrt{Var_{T_i}(t)}$;
- ковариации $K_{T_i, T_j}(t) = E\{\overset{\circ}{T}_i(t, \omega)\overset{\circ}{T}_j(t, \omega)\}$ между температурами элементов i и j .

По найденным статистическим мерам интервально стохастических температур далее определяются границы интервалов, внутри которых будут находиться действительные значения температур элементов ЭС.

Рассмотрим метод получения уравнений для определения статистических мер интервально стохастических температур.

Линеаризованная математическая модель интервально стохастических тепловых процессов в электронной системе

Матричное уравнение (12) является нелинейным относительно стохастических температур элементов тепловой модели, что делает задачу получения уравнений относительно статистических мер непреодолимой. Между тем случайные отклонения входящих в уравнения случайных функций от своих математических ожиданий являются достаточно малыми в сравнении с их математическими ожиданиями, что позволяет применить к рассматриваемым нелинейным уравнениям методы линеаризации относительно центрированных случайных функций. В результате линеаризации исходные уравнения сохраняют свой нелинейный характер относительно математических ожиданий нестационарных стохастических температур, но будут при этом линейными относительно центрированных стохастических температур. Такой подход позволяет найти конечные уравнения, которые описывают нестационарные статистические меры стохастических температур элементов.

Запишем центрированные стохастические температуры $\overset{\circ}{T}_i = \overset{\circ}{T}_i(t, \omega)$ ($i = 1, 2, \dots, N + 1$), $\overset{\circ}{T}_e = \overset{\circ}{T}_e(t, \omega)$, $\overset{\circ}{T}_{a,in} = \overset{\circ}{T}_{a,in}(t, \omega)$, кондуктивные проводимости $\overset{\circ}{g}_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T}_i &= T_i(t, \omega) - \bar{T}_i(t), \quad \overset{\circ}{T}_e = T_e(t, \omega) - \bar{T}_e(t), \\ \overset{\circ}{T}_{a,in} &= T_{a,in}(t, \omega) - \bar{T}_{a,in}(t), \quad \overset{\circ}{g}_{ij} = g_{ij}(\omega) - \bar{g}_{ij}, \end{aligned}$$

где $\bar{T}_i(t)$, $\bar{T}_e(t)$, $\bar{T}_{a,in}(t)$, \bar{g}_{ij} — математические ожидания соответствующих стохастических функций.

На практике случайные отклонения температур и кондуктивных проводимостей от своих математических ожиданий всегда подчиняются условиям

$$|\overset{\circ}{T}_i / \bar{T}_i| < 1, \quad |\overset{\circ}{T}_e / \bar{T}_e| < 1, \quad |\overset{\circ}{T}_{a,in} / \bar{T}_{a,in}| < 1, \quad |\overset{\circ}{g}_{ij} / \bar{g}_{ij}| < 1, \quad |\overset{\circ}{G}_a / \bar{G}_a| < 1.$$

Выше было показано, что потоки теплоты $J_i(t, \omega)$ (3) от каждого i -го элемента, находящегося во взаимодействии между собой, средой внутри и вне ЭС, являются нелинейными стохастическими функциями $J_i(T, T_e, T_{a,in}, g, t, \omega)$, зависящими от стохастических температур элементов $T = (T_1, T_2, \dots, T_{N+1})'$, температуры окружающей среды T_e , температуры жидкости $T_{a,in}$ на входе в ЭС, кондуктивных тепловых проводимостей $g = \{g_{ij}(\omega)\}$. Функции $J_i(T, T_e, T_{a,in}, g, t, \omega)$ являются непрерывными и имеют непрерывные частные производные различных порядков, поэтому их линеаризация может быть осуществлена с помощью разложения в ряд Тейлора с удержанием членов порядка не выше первого. Учитывая равенство (3) и подвергая линеаризации тепловые потоки $J_{ij} = J_{ij}(T, T_e, T_{a,in}, g, t, \omega)$, получим

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \bar{J}_{ij} + \frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial T_i} \overset{\circ}{T}_i(t, \omega) + \frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial T_j} \overset{\circ}{T}_j(t, \omega) + \frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial g_{ij}} \overset{\circ}{g}_{ij}(t, \omega) + \\ &+ \frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial T_e} \overset{\circ}{T}_e(t, \omega) + \frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial T_{a,in}} \overset{\circ}{T}_{a,in}(t, \omega), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\bar{J}_{ij} = \bar{J}_{ij}(\bar{T}, \bar{T}_e, \bar{T}_{a,in}, \bar{g}, t)$ — математическое ожидание теплового потока $J_{ij} = J_{ij}(T, T_e, T_{a,in}, g, t, \omega)$; $\frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial T_i}$, $\frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial g_{ij}}$, $\frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial T_e}$, $\frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial T_{a,in}}$ — частные производные теплового потока J_{ij} по переменным T_i , g_{ij} , $T_e(t)$, $T_{a,in}(t)$, которые вычисляются при значениях переменных, равных соответствующим математическим ожиданиям \bar{T}_i , \bar{g} , \bar{T}_e , $\bar{T}_{a,in}$.

Оценка погрешности линеаризации (14) тепловых потоков показывает следующее. Для тепловых потоков при естественной конвекции между элементами i и j с коэффициентом теплоотдачи $\alpha_{i,j}^{conv} \sim (T_i - T_j)^n$, $0 < n \leq 1$, относительное отклонение $\varepsilon = |\Delta \overset{\circ}{T} / \Delta \bar{T}|$, $\Delta T = T_i - T_j$ централизованного перепада температуры $\Delta \overset{\circ}{T} = \overset{\circ}{T}_i - \overset{\circ}{T}_j$ от его математического ожидания $\Delta \bar{T} = \bar{T}_i - \bar{T}_j$, удовлетворяет неравенству $\varepsilon \leq \sqrt{2\delta_0 / n(n+1)}$, где δ_0 — относительная погрешность линеаризации. Например, при относительной погрешности линеаризации $\delta_0 \leq 5\%$ допустимое относительное отклонение составит $\varepsilon \leq 84\%$ для естественной конвекции с $n = 1/8$; $\varepsilon \leq 57\%$ для $n = 1/4$ и $\varepsilon \leq 47\%$ для $n = 1/3$, означающее, например, для конвекции с $n = 1/4$ и $\Delta \bar{T} = 40^\circ\text{C}$, что

допустимое абсолютное изменение центрированного перепада температур будет $\Delta \overset{\circ}{T} \leq 23 \text{ }^\circ\text{C}$. Для тепловых потоков излучения относительное отклонение центрированной температуры от ее математического ожидания $\varepsilon = |\overset{\circ}{T} / \bar{T}|$ удовлетворяет условию $\varepsilon \leq \sqrt{\delta_0 / 6}$. Например, для относительной погрешности линеаризации $\delta_0 \leq 5 \%$ допустимое относительное отклонение составляет $\varepsilon = 9 \%$. Иначе говоря, если абсолютная температура элемента $\bar{T} = 400 \text{ K}$, то допустимый размах случайного отклонения температуры элемента в абсолютных единицах не должен превышать $36 \text{ }^\circ\text{C}$. Таким образом, анализ величины погрешностей линеаризации для различных видов нелинейностей в тепловых потоках показывает, что использование метода линеаризации методом разложения в ряд Тейлора с оставлением только линейных членов позволяет с достаточной для инженерной практики точностью моделировать тепловые процессы в ЭС.

Подставляя линеаризованные выражения (14) в уравнение (12), после несложных преобразований получим следующее стохастическое матричное уравнение $((t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega)$:

$$H \frac{d\overset{\circ}{T}(t, \omega)}{dt} + \bar{J}(t) + B(t)\overset{\circ}{T}(t, \omega) + \overset{\circ}{D}(\omega)\bar{T}(t) = \overset{\circ}{T}_e(t, \omega)C(t) + \overset{\circ}{T}_{a,in}(t, \omega)R(t) + \Phi(t, \omega), \quad (15)$$

$$T(t=0, \omega) = T_0(\omega), \quad (16)$$

где $\bar{J}(t) = (\bar{J}_1(t), \bar{J}_2(t), \dots, \bar{J}_{N+1}(t))'$ — $N + 1$ -вектор математических ожиданий тепловых потоков элементов, равных, согласно (3) $\bar{J}_i(t) = \sum_{j=1, i \neq j}^{N+1} \bar{J}_{ij}(t)$, $\bar{J}_i = \bar{J}_i(\bar{T}, \bar{T}_e, \bar{T}_{a,in}, \bar{g}, t)$; $\overset{\circ}{T}(t, \omega) = (\overset{\circ}{T}_1(t, \omega), \overset{\circ}{T}_2(t, \omega), \dots, \overset{\circ}{T}_{N+1}(t, \omega))'$ — вектор стохастических центрированных интервальных температур элементов; $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \bar{T}_2(t), \dots, \bar{T}_{N+1}(t))'$ — вектор математических ожиданий температур элементов; $C(t) = C(\bar{T}, \bar{T}_e, \bar{T}_{a,in}, \bar{g}, t)$, $R(t) = R(\bar{T}, \bar{T}_e, \bar{T}_{a,in}, \bar{g}, t)$ — детерминированные $N + 1$ -векторы; $B(t) = B(\bar{T}, \bar{T}_e, \bar{T}_{a,in}, \bar{g}, t)$ — детерминированная квадратная $(N + 1) \times (N + 1)$ -матрица; $\overset{\circ}{D}(\omega)$ — стохастическая квадратная симметрическая $(N + 1) \times (N + 1)$ -матрица с элементами $\overset{\circ}{d}_{ij}(\omega)$, равными линейным функциям от интервальных случайных тепловых кондуктивных проводимостей $\overset{\circ}{g}_{ij}(\omega)$.

Уравнение (15) представляет собой нестационарное стохастическое матричное дифференциальное уравнение первого порядка в обыкновенных производных относительно векторов математических ожиданий температур $\bar{T}(t)$ и центрированных стохастических температур $\overset{\circ}{T}(t, \omega)$. Уравнение (15) линейно относительно центрированного стохастического вектора температур $\overset{\circ}{T}(t, \omega)$ и нелинейно относительно вектора математических ожиданий $\bar{T}(t)$. Матричное уравнение (15) остается нелинейным относительно математических ожиданий температур $\bar{T}(t)$, как и исходное нелинеаризованное уравнение (12), и в то же время является линейным относительно стохастических отклонений температур от их математических ожиданий $\overset{\circ}{T}(t, \omega)$.

Стохастический тепловой процесс в ЭС, описываемый уравнением (15) с начальными условиями (16), полностью определяется статистическими мерами следующих стохастических факторов:

- математическим ожиданием $\bar{T}_e(t)$ и дисперсией $Var_{T_e}(t)$ интервально стохастической температуры окружающей среды $T_e(t, \omega)$;
- математическим ожиданием $\bar{T}_{a,in}(t)$ и дисперсией $Var_{T_{a,in}}(t)$ интервально стохастической температуры жидкости $T_{a,in}(t, \omega)$ на входе в ЭС;

- математическими ожиданиями $\bar{\Phi}_i(t)$ и дисперсиями $Var_{\Phi_i}(t)$ интервально стохастических мощностей внутренних источников теплоты мощностью $\Phi_i(t, \omega)$, $i = 1, 2, \dots, N$, ($\Phi_{N+1} = 0$);
- математическими ожиданиями \bar{g}_{ij} и дисперсиями $Var_{g_{ij}}$ интервальных случайных величин тепловых кондуктивных проводимостей $g_{ij}(\omega)$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, ($g_{i,N+1} = g_{N+1,j} = 0$);
- математическими ожиданиями $\bar{T}_{0,i}$ и дисперсиями $Var_{T_{0,i}}$ начальных интервально стохастических температур элементов $T_{0,i}(\omega)$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$.

Уравнения для статистических мер стохастических температур элементов ЭС

Получим уравнения для статистических мер стохастических температур $T_i(t, \omega)$ элементов $i = 1, 2, \dots, N + 1$ тепловой модели ЭС.

Основными информативными статистическими мерами, представляющими интерес для моделирования стохастических тепловых процессов в ЭС, являются ($E\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания) следующие:

- вектор математических ожиданий температур $\bar{T}(t) = (\bar{T}_1(t), \bar{T}_2(t), \dots, \bar{T}_{N+1}(t))'$, где $\bar{T}_i(t) = E\{T_i(t, \omega)\}$;
- ковариационная матрица температур $K_{TT}(t)$ с матричными элементами, равными ковариациям $K_{T_i T_j}(t) = E\{\overset{\circ}{T}_i(t, \omega)\overset{\circ}{T}_j(t, \omega)\}$ между температурами элементов i и j ($= 1, 2, \dots, N + 1$);
- вектор дисперсий температур $Var_T(t) = (Var_{T_1}(t), Var_{T_2}(t), \dots, Var_{T_{N+1}}(t))'$, где $Var_{T_i}(t) = E\{(\overset{\circ}{T}_i(t, \omega))^2\}$ равны диагональным элементам ковариационной матрицы $K_{TT}(t)$;
- вектор среднеквадратических отклонений температур элементов $\sigma(t) = (\sigma_{T_1}(t), \sigma_{T_2}(t), \dots, \sigma_{T_{N+1}}(t))'$, где $\sigma_{T_i}(t) = \sqrt{Var_{T_i}(t)}$.

Располагая статистическими мерами, то есть определив математические ожидания $\bar{T}_i(t)$ и среднеквадратические отклонения $\sigma_{T_i}(t)$ стохастических температур $T_i(t, \omega)$ элементов $i = 1, 2, \dots, N + 1$, далее определяются нижние $T_{Bot,i}(t)$ и верхние $T_{Up,i}(t)$ границы температурных интервалов $[T_{Bot,i}(t), T_{Up,i}(t)]$, внутри которых будут заключены реальные температуры элементов ЭС, то есть

$$T_{Bot,i}(t) = \bar{T}_i(t) - \chi \cdot \sigma_{T_i}(t), \quad T_{Up,i}(t) = \bar{T}_i(t) + \chi \cdot \sigma_{T_i}(t), \quad (17)$$

где χ — коэффициент, определяющий ширину интервалов возможных значений стохастических температур элементов при заданном значении вероятности P , с которой реальные значения температур элементов будут находиться внутри найденных интервалов. Коэффициент χ с достаточной для практики точностью может быть оценен по неравенству Чебышёва [Пугачев, 1962]: $P\{\overset{\circ}{T}_i(t, \omega) \leq \chi \cdot \sigma_{T_i}(t)\} \geq 1 - 1/\chi^2$.

Для получения уравнений, описывающих статистические меры температур элементов в более простом виде, примем далее, что температура окружающей среды и мощности внутренних источников теплоты элементов ЭС являются не зависящими от времени случайными величинами $T_e(\omega)$ и $\Phi_i(\omega)$ с известными математическими ожиданиями и дисперсиями, а температура жидкости на входе в ЭС равна температуре окружающей среды, то есть $T_e(\omega) = T_{a,in}(\omega)$.

Уравнение для вектора математических ожиданий $\bar{T}(t)$

Применяя оператор математического ожидания к матричному уравнению (15) и начальному условию (16), получим матричное нелинейное дифференциальное уравнение относительно неизвестного вектора математических ожиданий $\bar{T}(t)$:

$$H \frac{d\bar{T}(t)}{dt} + \bar{J}(\bar{T}, \bar{T}_e, \bar{g}, t) = \bar{\Phi}, \quad (18)$$

$$\bar{T}(t=0) = \bar{T}_0. \quad (19)$$

Уравнение для ковариационной матрицы температур $K_{TT}(t)$

Для получения уравнения относительно ковариационной матрицы $K_{TT}(t) = E\{\overset{\circ}{T}(t, \omega)\overset{\circ}{T}'(t, \omega)\}$ запишем уравнение для централизованного стохастического вектора $\overset{\circ}{T}(t, \omega)$. А именно, вычитая уравнение (18) из уравнения (15) и начальное условие (19) из (16), получим $((t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega)$

$$H \frac{d\overset{\circ}{T}(t, \omega)}{dt} + B(t)\overset{\circ}{T}(t, \omega) + \overset{\circ}{D}(\omega)\bar{T}(t) = S(t)\overset{\circ}{T}'_e(\omega) + \overset{\circ}{\Phi}(\omega), \quad (20)$$

$$\overset{\circ}{T}(t=0, \omega) = \overset{\circ}{T}_0(\omega), \quad (21)$$

где $S(t) = C(t) + R(t)$.

Уравнение для ковариационной матрицы $K_{TT}(t)$ следует из очевидного равенства

$$\begin{aligned} \frac{dK_{TT}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} E\{\overset{\circ}{T}(t, \omega)\overset{\circ}{T}'(t, \omega)\} = \\ &= E\left\{\frac{d\overset{\circ}{T}(t, \omega)}{dt}\overset{\circ}{T}'(t, \omega)\right\} + E\left\{\overset{\circ}{T}(t, \omega)\frac{d\overset{\circ}{T}'(t, \omega)}{dt}\right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя в (22) уравнение (20) и учитывая попарную независимость случайных величин $T_e(\omega)$, $\Phi_i(\omega)$, $g_{ij}(\omega)$ для всех i и j , после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{dK_{TT}(t)}{dt} + H^{-1}B(t)K_{TT}(t) - H^{-1}S(t)K'_{TTe}(t) + H^{-1}F(t) + \\ + K_{TT}(t)B'(t)H^{-1} - K_{TTe}(t) \cdot S'(t) \cdot H^{-1} + F'(t)H^{-1} = \\ = H^{-1}K_{\Phi T}(t) + K'_{\Phi T}(t)H^{-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$K_{TT}(t=0) = K_{TT,0}, \quad (24)$$

где $K_{TT,0} = E\{\overset{\circ}{T}_0(\omega)\overset{\circ}{T}'_0(\omega)\}$ — известная априори из исходных данных ковариационная матрица вектора случайных начальных температур $T_0(\omega)$ элементов. Отметим, что если в векторе $T_0(\omega)$ случайные величины $T_{0,i}(\omega)$ для всех $i = 1, 2, \dots, N+1$, попарно независимы, то матрица $K_{TT,0}$ будет диагональной с элементами, равными дисперсиям начальных температур $Var_{T_{0,i}}$, $i = 1, 2, \dots, N+1$.

Уравнения для ковариационного вектора $K_{TTe}(t)$ и ковариационных матриц $K_{\Phi T}(t)$ и $F(t)$ в уравнении (23)

В уравнение (23) для определения $K_{TTe}(t)$ входят неизвестные и подлежащие определению вектор $K_{TTe}(t)$ и матрицы $K_{\Phi T}(t)$ и $F(t)$:

– ковариационный вектор $K_{TTe}(t) = E\{\overset{\circ}{T}(t, \omega)\overset{\circ}{T}'_e(\omega)\}$ (и его транспонированный $K'_{TTe}(t)$) между вектором стохастических температур элементов $T(t, \omega)$ и стохастической температурой $T_e(\omega)$;

– ковариационная матрица $K_{\Phi T}(t) = E\{\overset{\circ}{\Phi}(\omega)\overset{\circ}{T}'(t, \omega)\}$ (и ее транспонированная $K'_{\Phi T}(t)$) между вектором стохастических температур элементов $T(t, \omega)$ и вектором стохастических мощностей внутренних источников теплоты $\Phi(\omega)$;

– матрица $F(t) = E\{\overset{\circ}{D}(\omega)\overline{\overset{\circ}{T}}(t)\overset{\circ}{T}'(t, \omega)\}$ (и ее транспонированная $F'(t)$).

Найдем уравнения для определения вектора $K_{TTe}(t)$ и матриц $K_{\Phi T}(t)$, $F(t)$.

Для получения этих уравнений применим подход, изложенный выше, записав для вектора $K_{TTe}(t)$ и матрицы $K_{\Phi T}(t)$ равенства, аналогичные (22).

Используя уравнение (20) и учитывая попарную статистическую независимость случайных величин $T_e(\omega)$, $\Phi_i(\omega)$, $g_{ij}^{cond}(\omega)$ для всех i и j , получим искомые уравнения:

– для ковариационного вектора $K_{TTe}(t)$

$$H \frac{d K_{TTe}(t)}{dt} + B(t) \cdot K_{TTe}(t) = S(t) \cdot Var_{T_e}, \tag{25}$$

$$K_{TTe}(t=0) = 0; \tag{26}$$

– для ковариационной матрицы $K_{\Phi T}(t)$

$$\frac{d K_{\Phi T}(t)}{dt} H + K_{\Phi T}(t) B'(t) = K_{\Phi}, \tag{27}$$

$$K_{\Phi T}(t=0) = 0. \tag{28}$$

где K_{Φ} — диагональная матрица с элементами, равными дисперсиям мощностей внутренних источников теплоты $Var_{\Phi_i}(t)$, $i = 1, 2, \dots, N+1$.

Для определения матрицы $F(t) = E\{\overset{\circ}{D}(\omega)\overline{\overset{\circ}{T}}(t)\overset{\circ}{T}'(t, \omega)\}$ представим стохастическую матрицу $\overset{\circ}{D}(\omega)$ в виде вектора $\overset{\circ}{D}(\omega) = (\overset{\circ}{d}_1(\omega), \overset{\circ}{d}_2(\omega), \dots, \overset{\circ}{d}_{N+1}(\omega))$, состоящего из $k = 1, 2, \dots, N+1$ векторов-столбцов $\overset{\circ}{d}_k(\omega) = (\overset{\circ}{d}_{1k}(\omega), \overset{\circ}{d}_{2k}(\omega), \dots, \overset{\circ}{d}_{N+1,k}(\omega))'$. Тогда матрица $F(t)$ может быть представлена в виде суммы $F(t) = \sum_{k=1}^{N+1} \overline{\overset{\circ}{T}}_k(t) \cdot M_k(t)$, в которой матрица $M_k(t) = E\{\overset{\circ}{d}_k(\omega)\overset{\circ}{T}'_k(t, \omega)\}$ с учетом равенства (22) и попарной независимости $T_e(\omega)$, $\Phi_i(\omega)$, $g_{ij}^{cond}(\omega)$ для всех i и j определяется из решения следующего матричного уравнения $M_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N+1$:

$$\frac{d M_k(t)}{dt} H + M_k(t) B'(t) = L_k(t), \tag{29}$$

$$M_k(t=0) = 0, \tag{30}$$

где $L_k(t) = E\{\overset{\circ}{d}_k(\omega)\overline{\overset{\circ}{T}}(t)\overset{\circ}{D}(\omega)\}$ — матрица, элементы которой равны линейным функциям от дисперсий $Var_{g_{ij}}(i, j = 1, 2, \dots, N)$ контактных тепловых проводимостей $\overset{\circ}{g}_{ij}(\omega)$ и математиче-

ских ожиданий температур $\bar{T}_1(t), \bar{T}_2(t), \dots, \bar{T}_{N+1}(t)$, определяемых из уравнений (18), (19). Элементы матрицы $L_k(t)$ вычисляются для конкретной конструкции ЭС по известным из исходных данных математическим ожиданиям и дисперсиям случайных величин $g_{ij}^0(\omega)$.

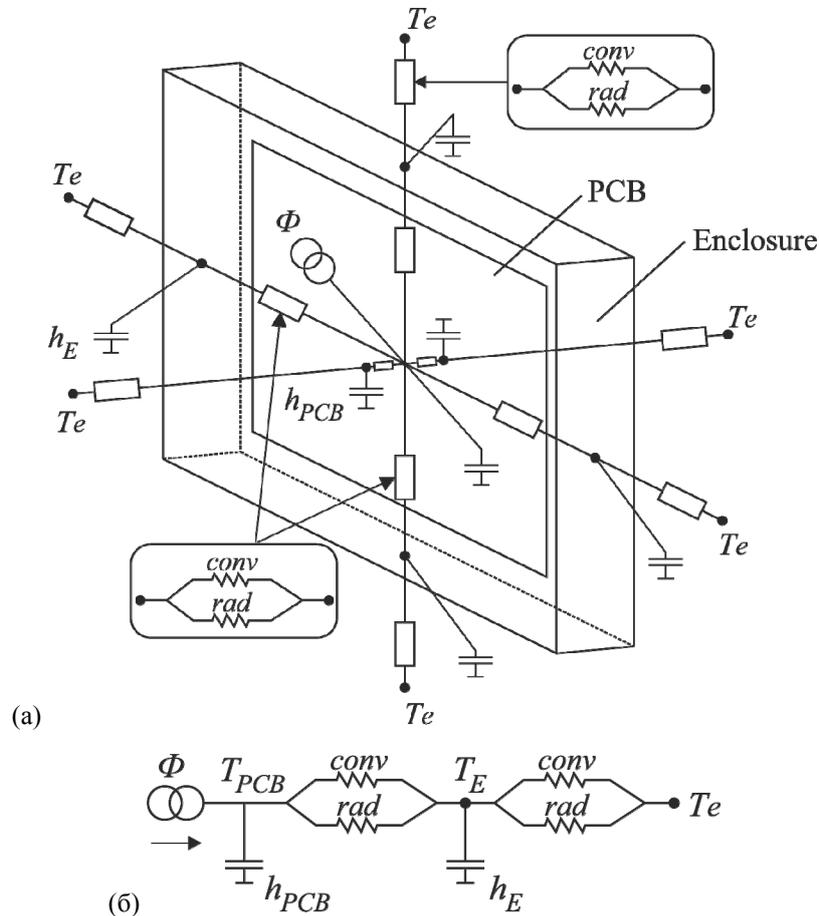


Рис. 2. Конструкция электронной системы (а) и ее тепловая схема (б). T_{PCB} , T_E , T_e — изотермические интервально стохастические температуры электронного модуля (PCB), корпуса ЭС (E) и окружающей среды (e) соответственно; h_{PCB} , h_E , — полные теплоемкости электронного модуля (PCB) и конструкции корпуса (E); Φ — мощность потребления электронного модуля

Таким образом, статистические меры стохастических температур элементов $T_i(t, \omega)$, $i = 1, 2, \dots, N + 1$, тепловой модели ЭС (вектор математических ожиданий $\bar{T}(t)$ и ковариационная матрица $K_{TT}(t)$) определяются из решения матричных нелинейных дифференциальных уравнений (18), (19) и (23), (24). При этом для получения решения уравнений (23), (24) относительно ковариационной матрицы $K_{TT}(t)$ требуется решить дополнительные матричные дифференциальные уравнения, а именно уравнения (25), (26) относительно вектора $K_{Te}(t)$; уравнения (27), (28) для определения матрицы $K_{\Phi T}(t)$, и k раз ($k = 1, 2, \dots, N + 1$) решить уравнения (29), (30), чтобы определить матрицы $M_k(t)$, а по ним — матрицу $F(t) = \sum_{k=1}^{N+1} \bar{T}_k(t) \cdot M_k(t)$.

Уравнения (18), (19) и (23)–(30) представляют собой детерминированные матричные нестационарные нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка в обыкновенных производных. Несмотря на нелинейный характер системы полученных уравнений, их решение

относительно искомым статических мер с применением известных численных методов легко реализуется на компьютерах.

Пример применения метода

Рассмотрим применение разработанного в статье метода на примере электронной системы (ЭС), представляющей собой электронный модуль, заключенный в герметичный корпус (рис. 2, а). Электронный модуль состоит из многослойной печатной платы и установленных на ней активных и пассивных электро- радиоэлементов. Потребляемая активными элементами (микропроцессорами, микросхемами) мощность преобразуется в теплоту, которая приводит к нагреванию электронного модуля, воздушной среды внутри корпуса и самого корпуса. Теплообмен внутри и снаружи ЭС протекает одновременно естественной конвекцией (*conv*) и излучением (*rad*). Вследствие неизбежного статистического технологического разброса изготовления электро- радиоэлементов, их установки и монтажа в ЭС различные экземпляры ЭС будут иметь различные значения определяющих тепловых параметров, обуславливая интервально стохастический характер тепловых процессов в ЭС.

Стохастическая математическая модель, описывающая нестационарные тепловые процессы в тепловой модели (рис. 2, б) рассматриваемой конструкции ЭС, имеет следующий вид $((t, \omega) \in [0, \tau] \times \Omega)$:

$$h_{PCB} \frac{dT_{PCB}(t, \omega)}{dt} + J_{PCB-E}(T_{PCB}, T_E, t, \omega) = \Phi(\omega), \tag{31}$$

$$h_E \frac{dT_E(t, \omega)}{dt} + J_{E-e}(T_E, T_e, t, \omega) - J_{PCB-E}(T_{PCB}, T_E, t, \omega) = 0, \tag{32}$$

где $T_{PCB} = T_{PCB}(t, \omega)$, $T_E = T_E(t, \omega)$, $T_e = T_e(t, \omega)$ — изотермические интервально стохастические температуры электронного модуля (*PCB*), корпуса ЭС (*E*), окружающей среды (*e*) соответственно; $h_{PCB} = \rho_{PCB} c_{PCB} V_{PCB}$ — полная теплоемкость электронного модуля объемом V_{PCB} , плотностью ρ_{PCB} и удельной теплоемкостью c_{PCB} ; $h_E = \rho_E c_E V_E$ — полная теплоемкость конструкции корпуса объемом V_E , плотностью ρ_E и удельной теплоемкостью c_E ; $\Phi(\omega)$ — мощность потребления электронного модуля; $J_{PCB-E}(T_{PCB}, T_E, t, \omega) = J_{PCB-E}^{conv} + J_{PCB-E}^{rad}$ — суммарный тепловой поток конвекции и излучения между электронным модулем и корпусом ЭС; $J_{E-e}(T_E, T_e, t, \omega) = J_{E-e}^{conv} + J_{E-e}^{rad}$ — суммарный тепловой поток конвекции и излучения от корпуса ЭС в окружающую среду.

Стохастические тепловые потоки J_{PCB-E}^{conv} , J_{PCB-E}^{rad} и J_{E-e}^{conv} , J_{E-e}^{rad} имеют следующий вид (п. 2):

$$J_{PCB-E}^{conv} = a_1(T_{PCB} - T_E)^{5/4}, \quad J_{PCB-E}^{rad} = a_2(T_{PCB}^4 - T_E^4),$$

$$J_{E-e}^{conv} = a_3(T_E - T_e)^{4/3}, \quad J_{E-e}^{rad} = a_4(T_E^4 - T_e^4),$$

где a_i , $i = 1, 2, 3, 4$, — числовые коэффициенты, определяемые размерами конструкции и теплофизическими характеристиками материалов элементов и среды внутри и вне ЭС.

Проводя линеаризацию нелинейных тепловых потоков J_{PCB-E}^{conv} , J_{PCB-E}^{rad} , J_{E-e}^{conv} , J_{E-e}^{rad} относительно центрированных стохастических температур (п. 3) $\overset{\circ}{T}_{PCB}(t, \omega)$, $\overset{\circ}{T}_E(t, \omega)$, $\overset{\circ}{T}_e(t, \omega)$, получим вместо уравнений (31), (32) следующие линейные стохастические уравнения:

$$h_{PCB} \frac{d\overset{\circ}{T}_{PCB}(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_{PCB} + f_1 \overset{\circ}{T}_{PCB}(t, \omega) + f_2 \overset{\circ}{T}_E(t, \omega) = \Phi(\omega), \tag{33}$$

$$h_E \frac{d\overset{\circ}{T}_E(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_E + f_3 \overset{\circ}{T}_{PCB}(t, \omega) + f_4 \overset{\circ}{T}_E(t, \omega) + f_5 \overset{\circ}{T}_e(t, \omega) = 0, \tag{34}$$

где $f_1 - f_5$ — нелинейные функции, равные частным производным тепловых потоков J_{PCB-E}^{conv} , J_{PCB-E}^{rad} , J_{E-e}^{conv} , J_{E-e}^{rad} по переменным T_{PCB} , T_E , T_e , при значениях переменных, равных их математическим ожиданиям \bar{T}_{PCB} , \bar{T}_E , \bar{T}_e .

Следуя разработанному в статье методу (п. 4), учитывая попарную статистическую независимость температуры среды и мощности тепловыделения, получим уравнения для статистических мер стохастических нестационарных температур электронного модуля, корпуса ЭС и окружающей среды:

$$h_{PCB} \frac{d\bar{T}_{PCB}(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_{PCB} = \bar{\Phi}, \quad (35)$$

$$h_E \frac{d\bar{T}_E(t, \omega)}{dt} + \bar{J}_E = 0, \quad (36)$$

$$h_{PCB} \frac{dVar_{TPCB}(t)}{dt} + 2f_1Var_{TPCB}(t) + 2f_2K_{TPCB-TE}(t) - 2K_{TPCB-\Phi} = 0, \quad (37)$$

$$h_E \frac{dVar_{TE}(t)}{dt} + 2f_3K_{TPCB-TE} + 2f_4Var_{TE}(t) + 2f_5K_{TE-Te} = 0, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dK_{TPCB-TE}(t)}{dt} + (h_{PCB}^{-1}f_1 + h_E^{-1}f_4)K_{TPCB-TE}(t) + h_{PCB}^{-1}f_2Var_{TE}(t) + \\ & + h_E^{-1}f_3Var_{TPCB}(t) + h_E^{-1}f_5K_{TPCB-Te}(t) - h_{PCB}^{-1}K_{TE-\Phi} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$h_{PCB} \frac{dK_{TPCB-\Phi}(t)}{dt} + f_1K_{TPCB-\Phi}(t) + f_2K_{TE-\Phi}(t) = Var_{\Phi}, \quad (40)$$

$$h_E \frac{dK_{TE-\Phi}(t)}{dt} + f_3K_{TPCB-\Phi}(t) + f_4K_{TE-\Phi}(t) = 0, \quad (41)$$

$$h_{PCB} \frac{dK_{TPCB-Te}(t)}{dt} + f_1K_{TPCB-Te}(t) + f_2K_{TE-Te}(t) = 0, \quad (42)$$

$$h_E \frac{dK_{TE-Te}(t)}{dt} + f_3K_{TPCB-Te}(t) + f_4K_{TE-Te}(t) = -f_5Var_{Te}, \quad (43)$$

с начальными условиями

$$\bar{T}_{PCB}(t=0) = \bar{T}_E(t=0) = \bar{T}_e, \quad Var_{TPCB}(t=0) = Var_{TE}(t=0) = Var_{Te},$$

$$K_{TPCB-TE}(t=0) = Var_{Te}, \quad K_{TPCB-\Phi}(t=0) = K_{TE-\Phi}(t=0) = 0, \quad K_{TPCB-Te}(t=0) = K_{TE-Te}(t=0) = Var_{Te},$$

где $Var_{TPCB}(t)$, $Var_{TE}(t)$ — дисперсии температур электронного модуля и корпуса ЭС; $K_{TPCB-TE}(t)$ — ковариация между стохастическими температурами $T_{PCB}(t, \omega)$ и $T_E(t, \omega)$; Var_{Te} — дисперсия стохастической температуры среды; Var_{Φ} — дисперсия стохастической мощности тепловыделения электронного модуля; $K_{TPCB-\Phi}$, $K_{TE-\Phi}$ — ковариации между стохастическими температурами электронного модуля и корпуса ЭС и стохастической мощностью тепловыделения электронного модуля; $K_{TPCB-Te}$, K_{TE-Te} — ковариации между стохастическими температурами электронного модуля и корпуса ЭС и стохастической температурой окружающей среды.

В уравнениях (35)–(43) математические ожидания \bar{T}_e , $\bar{\Phi}$ и дисперсии Var_{Te} , Var_{Φ} , коэффициенты $a_1 - a_4$ и функции $f_1 - f_5$ являются известными из исходных данных и легко вычисляются.

Уравнения (35)–(43) описывают нестационарные статистические меры параметров теплового процесса в рассматриваемой конструкции ЭС и представляет собой систему нелинейных,

нестационарных дифференциальных уравнений первого порядка в обыкновенных производных. Решение уравнений осуществлялось с помощью численного метода Рунге–Кутты.

Результаты вычислений статистических мер по полученным уравнениям приведены на рис. 3–6 при следующих исходных данных: $\bar{T}_e = 293$ К, $\bar{\Phi} = 30$ Вт, $Var_{T_e} = 1.5$ °C², $Var_{\Phi} = 0.7$ °C². Интервалы изменения стохастической температуры электронного модуля $[T_{Bot,PCB}(t), T_{Up,PCB}(t)]$ (рис. 5) и стохастической температуры корпуса ЭС $[T_{Bot,E}(t), T_{Up,E}(t)]$ (рис. 6) рассчитывались по равенствам (17) при $\chi = 3$, что соответствует вероятности $P = 0.89$ обнаружить реальные значения стохастических температур электронного модуля и корпуса ЭС внутри найденных интервалов.

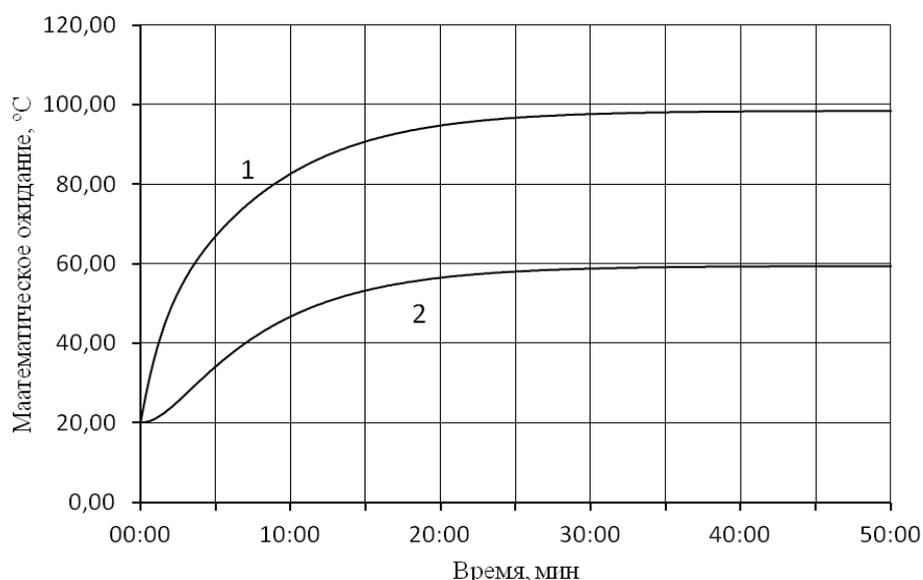


Рис. 3. Нестационарные математические ожидания (°C) стохастических температур электронного модуля (1) и корпуса ЭС (2)

Вычисления показывают, что в установившемся режиме температура электронного модуля изменяется в интервале $[90$ °C, 105 °C], а температура корпуса ЭС — в интервале $[54$ °C, 63 °C]. Иначе говоря, установившиеся температуры электронного модуля $T_{PCB}(\omega)$ и корпуса $T_E(\omega)$ в каждом конкретном экземпляре ЭС, извлеченном из партии однотипных ЭС, могут иметь любое значение в пределах интервалов $T_{PCB}(\omega) \in [90$ °C, 105 °C] и $T_E(\omega) \in [54$ °C, 63 °C] с вероятностью не менее 0.89. Установившаяся дисперсия разброса (рис. 4) значений температуры электронного модуля ($Var_{T_{PCB}} = 3.4$ °C²) существенно превышает таковую для температуры корпуса ЭС ($Var_{T_E} = 1.6$ °C²), что обуславливается более высокой чувствительностью стохастических тепловых процессов в ЭС к случайным изменениям мощности потребления по сравнению со случайными изменениями температуры окружающей среды.

Найденные интервальные значения температур имеют важное практическое значение для теплового проектирования ЭС, так как позволяют еще на этапе проектирования прогнозировать наибольшие и наименьшие значения температур, которые будут иметь место на практике в процессе функционирования реальных ЭС, а также более точно оценивать электрические и надежность параметры проектируемой ЭС.

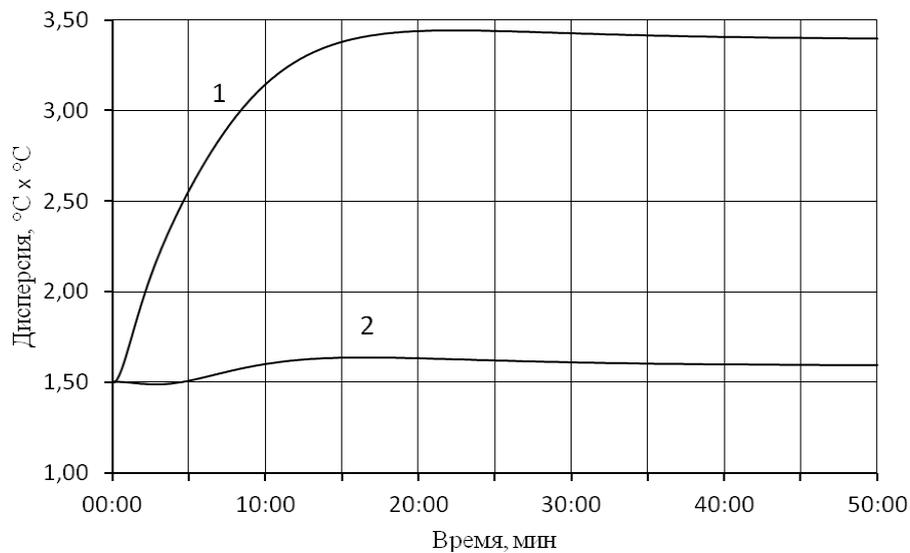


Рис. 4. Нестационарные дисперсии ($^{\circ}\text{C}^2$) стохастических температур электронного модуля (1) и корпуса ЭС (2)

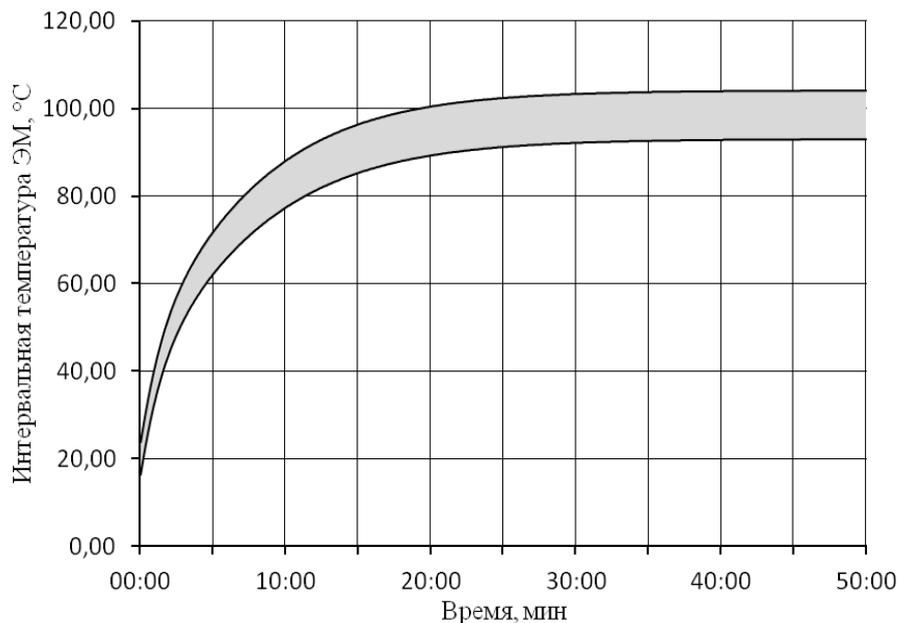


Рис. 5. Изменение во времени интервальной стохастической температуры ($^{\circ}\text{C}$) электронного модуля

Заключение

Развитый в статье метод математического моделирования нелинейных нестационарных интервально стохастических тепловых процессов в технических системах, в частности в ЭС, позволяет осуществлять расчеты изменения во времени температур элементов системы и интервалов, внутри которых будут заключены реальные значения температур элементов. Необходимо отметить, что разработанный в статье метод учитывает следующие принципиальные особенности:

- стохастический характер теплообмена в системе, обусловленный статистическим разбросом тепловых, электрических и конструктивных факторов при производстве, сборке

и монтаже элементов в системе, и стохастический характер условий окружающей среды и функционирования системы;

– нелинейность процессов теплообмена, а именно зависимость от температуры тепловых определяющих факторов и параметров;

– нестационарный характер тепловых процессов.

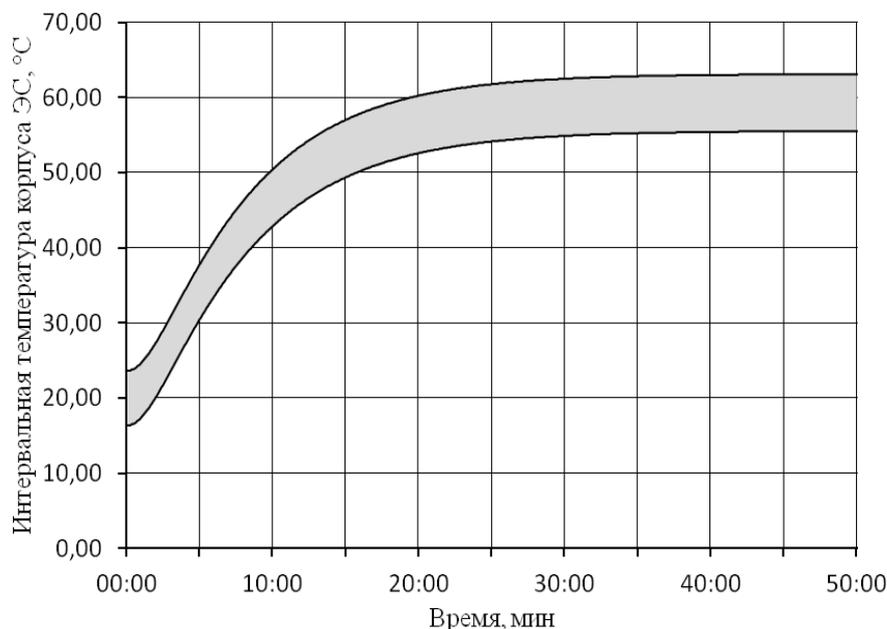


Рис. 6. Изменение во времени интервальной стохастической температуры (°C) корпуса ЭС

Разработанный в статье метод позволяет получать уравнения, описывающие нестационарные статистические меры стохастических распределений температуры элементов в технических системах, в частности в ЭС: математические ожидания, дисперсии, ковариации между температурами всех элементов и стохастическими определяющими факторами. Вывод уравнений для статистических мер проводится при самых общих вероятностных условиях и не использует нереалистические допущения о представлении стохастических факторов в виде белых шумов или винеровских процессов типа броуновского движения. Уравнения, получаемые для статистических мер температур элементов тепловой модели системы, представляют собой систему нестационарных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в обыкновенных производных, решение которых легко реализуется на современных компьютерах. Метод, разработанный в статье, применяется на практике при тепловом проектировании реальных электронных устройств и показал свою адекватность при создании современных конкурентоспособных технических систем.

Список литературы (References)

Адомиан Дж. Стохастические системы. — М.: Мир, 1987.

Adomian G. Stochastic Systems / New York: Academic Press, 1983 (Russ. ed. Adomian Dzh. Stokhasticheskie sistemy. — М.: Mir, 1987).

Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. Теория поля и вариационные принципы. — М.: Мир, 1974.

Gyarmati I. Non-Equilibrium thermodynamics: Field Theory and Variational Principles / Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 1970 (Russ. ed. D'yarmati I. Neravnovesnaya termodinamika. Teoriya polya i variatsionnye printsipy. — М.: Mir, 1974).

- Мадера А. Г.* Моделирование теплообмена в технических системах. — М.: НФ им. ак. В. А. Мельникова, 2005.
Madera A. G. Modelirovanie teploobmena v tekhnicheskikh sistemakh [Modelling of heat transfer in technical systems]. — М.: NF im. ak. V. A. Mel'nikova, 2005 (in Russian).
- Мадера А. Г., Кандалов П. И.* Анализ интервально стохастических температурных полей технических систем // Программные продукты и системы. — 2014. — № 4. — С. 41–45.
Madera A. G., Kandalov P. I. Analiz interval'no stokhasticheskikh temperaturnykh polei tekhnicheskikh sistem [Analysis of intervally stochastic temperature fields in technical systems] // Software & Systems. — 2014. — No. 4. — P. 41–45 (in Russian).
- Мадера А. Г., Кандалов П. И.* Компьютерное моделирование температурных полей технических систем при интервально стохастической неопределенности параметров // Прикладная информатика. — 2015. — Т. 10, № 1 (55). — С. 106–113.
Madera A. G., Kandalov P. I. Komp'yuternoe modelirovanie temperaturnykh polei tekhnicheskikh sistem pri interval'no stokhasticheskoi neopredelennosti parametrov [Computer simulation of temperature fields in technical systems under interval stochastic uncertain parameters] // Journal of Applied Informatics. — 2015. — Vol. 10, No. 1(55). — P. 106–113 (in Russian).
- Пугачев В. С.* Теория случайных функций. — М.: Наука, 1962.
Pugachev V. S. Probability theory and mathematical statistics for engineers / Oxford: Pergamon Press, 1984 (Russ. ed. *Pugachev V. S.* Teoriya sluchainykh funktsii. — М.: Nauka, 1962).
- Campo A., Yishimura T.* Random heat transfer in flat channels with timewise variation of ambient temperature // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1979. — Vol. 22. — P. 5–12.
- Chantasiriwan S.* Error and variance of solution to the stochastic heat conduction problem by multiquadric collocation method // Int. Comm. Heat Mass Transfer. — 2006. — No. 33. — P. 342–349.
- Ellison G. N.* Thermal computations for electronics. Conductive, radiative, and convective air cooling. — NY: CRC Press, 2011.
- Emery A. F.* Solving stochastic heat transfer problems // Eng. Anal. Bound. Elem. — 2004. — No. 8. — P. 279–291.
- Georgiadis J. G.* On the approximate solution on non-deterministic heat and mass transport problems // Int. J. Heat Mass Transfer. — 1991. — Vol. 33, No. 8. — P. 2099–2105.
- Keller C. J., Antonetti V. W.* Statistical thermal design for computer electronics // Electronic Packaging and Production. — 1979. — Vol. 19, No. 3. — P. 55–62.
- Madera A. G.* Simulation of stochastic heat conduction processes // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1994. — Vol. 37, No. 16. — P. 2571–2577.
- Nakamura T., Fujii K.* Probabilistic transient thermal analysis of an atmospheric reentry vehicle structure // Aero Sci. Tech. — 2006. — No. 10. — P. 346–354.
- Saleh M. M., El-Kalla I. L., Ehab M. M.* Stochastic finite element Technique for stochastic one-dimension nime-dependent differential equations with random coefficients // Differential Equationss and Nonlinear Machanics. — 2007. — Article ID 48527. — 16 p.
- Srivastava K.* Modelling the variability of heat flow due to the random thermal conductivity of crust // Geophys J. Int. — 2005. — No. 160. — P. 776–782.
- Stefanou G.* The stochastic finite element method: past, present and future // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. — 2009. — No. 198. — P. 1031–1051.