**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 Т. 8 № 3 С. 433–443**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.8

Интегрирование релятивистских волновых уравнений в космологической модели Бъянки IX

А. И. Бреев[1,2,a], А. В. Шаповалов[1,2,b], А. В. Козлов[2,c]

[1]Томский политехнический университет, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30
[2]Томский государственный университет, Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

E-mail: [a] breev@mail.tsu.ru, [b] shpv@phys.tsu.ru, [c] kozlov@mail.tsu.ru

Получено 25.03.2016.
Принято к публикации 21.04.2016.

В работе рассматривается интегрирование уравнений Клейна–Гордона и Дирака в космологической модели Бъянки IX. При помощи метода некоммутативного интегрирования дифференциальных уравнений найдены новые точные решения для осесимметричной модели.

Метод некоммутативного интегрирования в данной задаче основан на использовании специального бесконечномерного голоморфного представления группы вращений, которое строится по невырожденной орбите коприсоединенного представления и комплексной поляризации невырожденного ковектора. Матричные элементы данного представления образуют полный и ортогональный набор и позволяют ввести обобщенное преобразование Фурье. Оператор Казимира группы вращений при этом преобразовании переходит в константу, а операторы симметрии, порожденные векторными полями Киллинга, — в линейные дифференциальные операторы первого порядка от одной зависимой переменной. Таким образом, релятивистские волновые уравнения на группе вращений допускают некоммутативную редукцию к обыкновенному дифференциальному уравнению. В отличие от широко известного метода разделения переменных метод некоммутативного интегрирования учитывает неабелеву алгебру операторов симметрии и дает решения, несущие информацию о некоммутативной симметрии задачи. Такие решения могут быть полезны для учета вакуумных квантовых эффектов и расчета конечных функций Грина методом раздвижки точек.

В работе для осесимметричной модели проведено сравнение полученных решений с известными, которые получаются методом разделения переменных. Показано, что некоммутативные решения выражаются через элементарные функции, тогда как известные решения определяются функцией Вигнера. Причем некоммутативно редуцированное уравнение Клейна–Гордона для осесимметричной модели совпадает с уравнением, редуцированным методом разделения переменных. А некоммутативно редуцированное уравнение Дирака эквивалентно редуцированному уравнению, полученному методом разделения переменных.

Ключевые слова: некоммутативное интегрирование, Бъянки IX

Исследование выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета. Работа выполнена в рамках Государственного задания вузам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/ K.

COMPUTER RESEARCH AND MODELING
2016 VOL. 8 NO. 3 P. 433–443

Ки&М

MATHEMATICAL MODELING AND NUMERICAL SIMULATION

UDC: 519.8

Integration the relativistic wave equations in Bianchi IX cosmology model

A. I. Breev[1,2,a], A. V. Shapovalov[1,2,b], A. V. Kozlov[2,c]

[1]Tomsk Polytechnical University, 30 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia
[2]Tomsk State University, 36 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia

E-mail: [a] breev@mail.tsu.ru, [b] shpv@phys.tsu.ru, [c] kozlov@mail.tsu.ru

Received 25.03.2016.
Accepted for publication 21.04.2016.

We consider integration Clein–Gordon and Dirac equations in Bianchi IX cosmology model. Using the noncommutative integration method we found the new exact solutions for Taub universe.

Noncommutative integration method for Bianchi IX model is based on the use of the special infinite-dimensional holomorphic representation of the rotation group, which is based on the non-degenerate orbit adjoint representation, and complex polarization of degenerate covector. The matrix elements of the representation of form a complete and orthogonal set and allow you to use the generalized Fourier transform. Casimir operator for rotation group under this transformation becomes constant. And the symmetry operators generated by the Killing vector fields in the linear differential operators of the first order from one dependent variable. Thus, the relativistic wave equation on the rotation group allow non-commutative reduction to ordinary differential equations. In contrast to the well-known method of separation of variables, noncommutative integration method takes into account the non-Abelian algebra of symmetry operators and provides solutions that carry information about the non-commutative symmetry of the task. Such solutions can be useful for measuring the vacuum quantum effects and the calculation of the Green's functions by the splitting-point method.

The work for the Taub model compared the solutions obtained with the known, which are obtained by separation of variables. It is shown that the non-commutative solutions are expressed in terms of elementary functions, while the known solutions are defined by the Wigner function. And commutative reduced by the Klein–Gordon equation for Taub model coincides with the equation, reduced by separation of variables. A commutative reduced by the Dirac equation is equivalent to the reduced equation obtained by separation of variables.

Keywords: noncommutative integration, Bianchi IX

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 3, pp. 433–443 (Russian).

The work was partially supported by Tomsk State University Competitiveness Improvement Program and by program 'Nauka' under contract No. 1.676.2014/K.

Введение

Нахождение точных решений релятивистских волновых уравнений в космологических моделях является основной задачей при учете квантовых поправок в однопетлевом приближении, когда внешнее гравитационное поле считается классическим, а поля материи — квантовыми [Биррелл, Девис, 1984]. Особый интерес представляют собой самосогласованные космологические модели, эволюция которых полностью определяются эффектом поляризации вакуума квантовых полей внешним гравитационным полем [Гриб, Мамаев, 1988].

Модель Бъянки IX представляет собой однородную замкнутую анизотропную Вселенную с тремя степенями свободы и описывает аналитическое поведение общих решений уравнений Эйнштейна в окрестности сингулярности. Исследованию вакуумных квантовых поправок в данной космологической модели посвящены работы [Hu, 1973; Hu, 1974; Pritomanov, 1985].

Релятивистские волновые уравнения Клейна–Гордона и Дирака в данной модели допускают в качестве группы симметрии группу вращений $SO(3)$, но разделение переменных возможно только в случае осесимметричной модели Бъянки IX (так называемая Вселенная Тауба [Ryan, 1975]). В работе [Hu, 1973] исследовалось уравнение Клейна–Гордона для осесимметричной модели. Эффект рождения частиц и поляризации вакуума безмассового спинорного поля в осесимметричной модели рассматривался в работе [Pritomanov, 1985].

Настоящая работа посвящена применению метода некоммутативного интегрирования [Шаповалов, 1995] для редукции и построения базиса решений релятивистских волновых уравнений в космологической модели Бъянки IX. Метод некоммутативного интегрирования дифференциальных уравнений с группой симметрии $SO(3)$ рассматривался в работах [Бреев А. И., 2007; Гончаровский, 2009]. Отметим, что даже в частном случае, когда возможно применить метод разделения переменных, решения, построенные методом некоммутативного интегрирования, как правило, имеют более простой вид и позволяют значительно упростить исследование вакуумных квантовых эффектов.

Космологическая модель Бъянки IX

Запишем метрику однородной анизотропной космологической модели IX по классификации Бъянки в виде [Hu, 1973]

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ab}(t)\sigma^a \otimes \sigma^b, \quad \gamma_{ab}(t) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{l(t)}, \frac{1}{m(t)}, \frac{1}{n(t)}\right), \tag{1}$$

где σ^a — правоинвариантные дифференциальные формы Маурера–Картана группы вращений $SO(3)$ $(a, b, c = 1, \ldots, 3)$; гладкие функции $l(t), m(t)$ и $n(t)$ задают динамику космологической модели и определяются из уравнений Эйнштейна. В космологии для описания модели Бъянки IX принято использовать *параметризацию Мизнера*:

$$\begin{aligned} l(t) &= \exp\left(-2\left[\alpha(t) + \beta_+(t) + \sqrt{3}\beta_-(t)\right]\right), \\ m(t) &= \exp\left(-2\left[\alpha(t) + \beta_+(t) - \sqrt{3}\beta_-(t)\right]\right), \\ n(t) &= \exp\left(-2\left[\alpha(t) - 2\beta_+(t)\right]\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим через $\{e_a\}$ некоторый фиксированный базис в алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$, а через $\{e^a\}$ — базис в дуальном пространстве $\mathfrak{so}^*(3)$: $\langle e^a, e_b\rangle = \delta^a_b$. Введем на группе Ли $SO(3)$ канонические координаты второго рода

$$g(\phi, \theta, \psi) = e^{\psi e_3} e^{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) e_2} e^{\phi e_1} \in SO(3), \tag{3}$$

где $\phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0;\pi)$, $\psi \in [0;2\pi)$ — углы Эйлера. В канонических координатах (3) базисные правоинвариантные 1-формы Маурера–Картана $\sigma^a(g) = -(R_g)^* e^a$, где R_g — правый сдвиг на группе $SO(3)$, имеют вид

$$\sigma^1 = -(\cos\psi\sin\theta d\phi - \sin\psi d\theta),$$
$$\sigma^2 = -(\sin\theta\sin\psi d\phi + \cos\psi d\theta),$$
$$\sigma^3 = -(\cos\theta d\phi + d\psi)$$

и удовлетворяют системе уравнений

$$d\sigma^a = -\frac{1}{2} C^a_{bc} \sigma^b \wedge \sigma^c,$$

Структурные константы C^c_{ab} группы $SO(3)$ определяются антисимметричным тензором Леви-Чивиты: $C^c_{ab} = \epsilon_{abc}$, $\epsilon_{123} = 1$. Базисные правоинвариантные векторные поля $\eta_a(g) = -(R_g)_* e_a$ в канонических координатах (3) определяются выражениями

$$\eta_1 = -\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + \sin\psi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\psi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi}, \tag{4}$$
$$\eta_2 = -\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - \cos\psi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\psi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\psi},$$
$$\eta_3 = -\frac{\partial}{\partial\psi}$$

и образуют неголономный базис в пространстве векторных полей на группе $SO(3)$:

$$[\eta_a, \eta_b] = C^a_{bc}\eta_c, \quad \sigma^a(\eta_b) = \delta^a_b,$$

где $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор двух векторных полей.

Символы Кристоффеля симметричной связности, согласованной с метрикой (1) на M, имеют вид

$$\Gamma^i_{0j}(x) = \frac{1}{2}\gamma^{ad}(t)\dot\gamma_{bd}(t)\sigma^b_j(g)\eta^i_a(g), \quad \Gamma^0_{ij}(x) = \frac{1}{2}\dot\gamma_{ab}(t)\sigma^a_i(g)\sigma^b_j(g),$$
$$\Gamma^i_{jk}(x) = \Gamma^c_{ab}(t)\sigma^a_j(g)\sigma^b_k(g)\eta^i_c(g) + \eta^i_a(g)\sigma^a_{j,k}(g),$$

где величины $\Gamma^c_{ab}(t)$ определяются алгеброй Ли $\mathfrak{so}(3)$ и симметричной 2-формой $\gamma_{ab}(t)$:

$$\Gamma^c_{ab}(t) = -\frac{1}{2}C^c_{ab} + \frac{1}{2}\gamma^{cd}(t)\left[C^e_{da}\gamma_{be}(t) + C^e_{db}\gamma_{ae}(t)\right]. \tag{5}$$

Ненулевые компоненты (5) в параметризации Мизнера зависят только от функций $\beta_\pm(t)$:

$$\Gamma^1_{23}(t) = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{-4\sqrt{3}\beta_-(t)} - e^{-2\sqrt{3}\beta_-(t)-6\beta_+(t)}\right),$$
$$\Gamma^3_{12}(t) = -\frac{1}{2} - e^{6\beta_+(t)}\sinh(2\sqrt{3}\beta_-(t)),$$
$$\Gamma^2_{13}(t) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{4\sqrt{3}\beta_-(t)} - e^{2\sqrt{3}\beta_-(t)-6\beta_+(t)}\right).$$

Приведем выражение для скалярной кривизны:

$$R(t) = e^{-2(\alpha(t)+4\beta_+(t))}\left(-\frac{1}{2} + 2e^{6\beta_+(t)}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-(t)) - 2e^{12\beta_+(t)}\sinh^2(2\sqrt{3}\beta_-(t))\right) +$$
$$+ 12\dot\alpha^2(t) + 6(\dot\beta^2_-(t) + \dot\beta^2_+(t) + \ddot\alpha(t)).$$

Имеется важный частный случай метрики (1), когда $m(t) = l(t)$ (или $\beta_-(t) = 0$ в параметризации (2)). Тогда космологическая модель Бьянки IX называется *осесимметричной* или *Вселенной Тауба*.

Обобщенные ядра λ-представления на группе вращений

В данном параграфе мы рассмотрим специальное неприводимое представление группы вращений $SO(3)$, построенное по невырожденной орбите каприсоединенного представления (К-орбите) в рамках метода некоммутативного интегрирования линейных дифференциальных уравнений [Шаповалов, 1995].

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(3)$ группы $SO(3)$ имеет индекс, равный единице ($\operatorname{ind}\mathfrak{g} = 1$), так как на сопряженном пространстве $\mathfrak{so}^*(3)$ существует одна функционально независимая функция Казимира $K(f) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2$. Каждая невырожденная К-орбита группы $SO(3)$ проходит через параметризованный ковектор $\lambda(j) = (0, 0, j) \in \mathfrak{g}^*$ и представляет собой двумерную сферу радиуса j:

$$O_j = \{K(f) = j^2 \mid f \in \mathfrak{g}^*\}, \quad j > 0.$$

Для ковектора $\lambda(j)$ не существует допустимой подалгебры, но тем не менее имеется комплексная поляризация [Кириллов, 1978]:

$$\dim\mathfrak{p} = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \operatorname{ind}\mathfrak{g}) = 2, \quad \langle\lambda(j), [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]\rangle = 0, \quad \mathfrak{p} = \{e_1, e_2 + ie_3\}. \tag{6}$$

Мы будем рассматривать только *целочисленные* орбиты, которым отвечают только целые значения параметра j. Поляризации (6) и дополнительной подалгебре $\mathfrak{p}^\perp = \{e_2\}$ отвечают операторы λ-представления:

$$\ell_1 = -i\sin q\frac{\partial}{\partial q} + ij\cos q, \quad \ell_2 = -i\cos q\frac{\partial}{\partial q} - ij\sin q, \quad \ell_3 = \frac{\partial}{\partial q}. \tag{7}$$

Операторы (7) реализуют неприводимое представление алгебры Ли $so^*(3)$. Однородное пространство $Q \simeq SO(3;\mathbb{C})/\exp(\mathfrak{p})$ представляет собой цилиндр: $q = \alpha + i\beta$, где $\alpha \in [0; 2\pi]$, $\beta \in (-\infty, \infty)$. Обозначим через $L_2(Q; d\mu_j(q))$ гильбертово пространство функций на Q со скалярным произведением

$$(\phi, \psi)_Q = \int_Q \overline{\phi(q)}\psi(q)d\mu_j(q). \tag{8}$$

Операторы λ-представления косоэрмитовы относительно скалярного произведения (8) для меры

$$d\mu_j(q) = C_j\frac{dq\wedge d\overline{q}}{(1+\cos(q-\overline{q}))^{j+1}}, \quad \int_Q d\mu_j(q) = 1, \quad C_j = \frac{(2j+1)!}{2^j(j!)^2}.$$

Обозначим через $\xi_a(g) = (L_g)_*e_a$, где L_g — левый сдвиг, левоинвариантные векторные поля на группе $SO(3)$. Определим набор обобщенных функций $\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(g^{-1})$ как решение системы уравнений

$$\left(\eta_a(g) + \overline{\ell_a(q, \partial_q, j)}\right)\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(g^{-1}) = 0, \quad \left(\xi_a(g) + \ell_a(q, \partial_q, j)\right)\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(g^{-1}) = 0 \tag{9}$$

с начальным условием

$$\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(e) = \delta_j(q, \overline{q'}).$$

Решение системы уравнений (9) имеет вид [Гончаровский, 2009]

$$\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(g^{-1}) = e^{-\phi\ell_1(q,\partial_q,j)}e^{-\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\ell_2(q,\partial_q,j)}e^{-\psi\ell_3(q,\partial_q,j)}\delta_j(q, \overline{q'}) =$$

$$= \frac{2j+1}{C_j}\Big(\sin\theta\cos\phi + \cos(\psi + \overline{q}')(\cos q\cos\phi - i\sin\phi) - i\sin\theta\cos q\sin\phi -$$

$$- i\cos\theta\sin q + \sin(\psi + \overline{q}')(-i\cos\theta\cos\phi - \cos\theta\cos q\sin\phi + \sin\theta\sin q)\Big)^j.$$

Функции $\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(g^{-1})$ являются обобщенными ядрами операторов голоморфно-индуцированного представления группы $SO(3)$, действующих на функции из $L_2(Q; d\mu_j(q))$:

$$(T^j_g\psi)(q) = \int_Q \psi(q')\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(g^{-1})d\mu_j(q'), \quad \psi \in L_2(Q, d\mu_j(q)). \tag{10}$$

В силу неприводимости представления (10) и компактности группы $SO(3)$ следует, что обобщенные ядра данного представления обладают свойствами полноты и ортогональности:

$$\int_{SO(3)} \overline{\mathcal{D}^{\tilde{j}}_{\tilde{q}\tilde{q}'}(g)}\mathcal{D}^j_{qq'}(g)d\mu(g) = \frac{\delta_{\tilde{j}j}}{2j+1}\delta_j(q,\tilde{q})\delta_j(\tilde{q}',q'), \tag{11}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\int_{Q\times Q} \overline{\mathcal{D}^j_{qq'}(\tilde{g})}\mathcal{D}^j_{qq'}(g)d\mu_j(q)d\mu_j(q') = \delta(\tilde{g}, g), \tag{12}$$

где $\delta(\tilde{g}, g)$ — обобщенная дельта-функция Дирака относительно меры Хаара на группе $SO(3)$. Линейное дифференциальное уравнение на группе Ли $SO(3)$ можно записать в виде

$$\mathcal{H}(\eta(g))\varphi(g) = 0, \tag{13}$$

где $\mathcal{H}(f)$ — линейная функция на $\mathfrak{so}^*(3)$. Базисные левоинвариантные векторные поля на группе $SO(3)$ коммутируют с правоинвариантными векторными полями и являются операторами симметрии уравнения (13). В канонических координатах (3) они определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\partial}{\partial\phi},\\
\xi_2 &= -\cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi},\\
\xi_3 &= -\cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} - \sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}
\end{aligned}$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\xi_a, \xi_b] = C^c_{ab}\xi_c.$$

В рамках метода некоммутативного интегрирования базис решений уравнения (13), ищется в виде

$$\varphi_\tau(g) = (T^j_{g^{-1}}\psi)(q) = \int_Q \psi_j(q')\mathcal{D}^j_{q\overline{q'}}(g^{-1})d\mu_j(q'), \quad \tau = (q, j). \tag{14}$$

Подставляя (14) в исходное уравнение (13) приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{H}(\ell(q', \partial_{q'}, j))\psi_j(q') = 0. \tag{15}$$

Из соотношений (11), (12) следуют полнота и ортогональность решений вида (14), в которых функции $\psi(q'; q, j)$ образуют полный и ортогональный набор решений редуцированного уравнения (15).

Уравнение Клейна–Гордона

Пусть ∇_μ — ковариантная производная симметричной связности, согласованной с метрикой (1). Уравнение Клейна–Гордона для скалярного поля $\varphi(t, g)$ в метрике (1) имеет вид

$$\left(\Box + \zeta R(t) + m^2\right)\varphi(t, g) = 0, \tag{16}$$

где ζ — конформный множитель, m — масса скалярного поля. Даламбертиан $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$ является полиномом второго порядка от правоинвариантных векторных полей (4):

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\log\sqrt{\gamma(t)})' \frac{\partial}{\partial t} - \gamma^{ab}(t)\eta_a(g)\eta_b(g), \quad \gamma(t) = \det(\gamma_{ab}(t)), \quad \gamma_{ab}(t)\gamma^{ac}(t) = \delta_a^c.$$

Таким образом, уравнение Клейна–Гордона (16) можно записать в виде выражения (13).

Для того чтобы исключить первую производную по времени, будем искать решение уравнения (16) в виде

$$\varphi(t,g) = (\det\gamma(t))^{-\frac{1}{4}}\, \phi(t,g).$$

На функцию $\phi(t,g)$ имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \gamma^{ab}\eta_a(g)\eta_b(g) - \frac{3}{4}\left[\alpha'^2(t) + 2\alpha''(t)\right] + \zeta R(t) + M^2\right)\phi(t,g) = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим осесимметричный случай. Тогда уравнение на функцию $\phi(t,g)$ можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + e^{-2(\alpha(t)+\beta_+(t))}\left[\hat{K}(g) + \left(1 - e^{6\beta_+(t)}\right)\eta_3^2(g)\right] - \frac{3}{4}(\alpha'^2(t) + 2\alpha''(t)) + \zeta R(t) + M^2\right)\phi(t,g) = 0, \tag{18}$$

где $\hat{K}(g)$ — двусторонний оператор Казимира группы $SO(3)$:

$$\hat{K}(g) = K(-i\eta) = -\frac{1}{\sin^2\theta}\left[\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\psi}\right] - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{19}$$

Уравнение (18) допускает полное разделение переменных при помощи полного коммутативного набора операторов симметрии $\{\hat{K}(g), \xi_1, \eta_3\}$ и выражается через специальную функцию Вигнера:

$$\phi(t,g) = f_{jn}(t) D^j_{mn}(g),$$
$$\hat{K}(g)D^j_{mn}(g) = j(j+1)D^j_{mn}(g), \quad -i\xi_1 D^j_{mn}(g) = mD^j_{mn}(g), \quad i\eta_3 D^j_{mn}(g) = nD^j_{mn}(g),$$

где $n = -j, \ldots, j$; $m = -j, \ldots, j$; $D^j_{mn}(g)$ — функция Вигнера [Браун, 1983]:

$$D^j_{mn}(g) = e^{im\phi + in\psi} d^j_{mn}(\theta),$$
$$d^j_{mn}(\theta) = (-1)^{m-n}\sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+n)!(j-n)!}}\sin^{m-n}\frac{\theta}{2}\cos^{m+n}\frac{\theta}{2}P^{(m-n,m+n)}_{j-m}(\cos\theta).$$

Через $P^{(\alpha,\beta)}_n(z)$ обозначены полиномы Якоби:

$$P^{(\alpha,\beta)}_n(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{n+\alpha}(1+z)^{n+\beta}\right].$$

Функция $f_{nj}(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$f''_{jn}(t) + \Omega^2_{jn}(t) f_{jn}(t) = 0, \tag{20}$$
$$\Omega^2_{jn}(t) = e^{-2(\alpha(t)+\beta_+(t))}\left[j(j+1) - \left(1 - e^{6\beta_+(t)}\right)n^2\right] - \frac{3}{4}(3\alpha'(t) + 2\alpha''(t)) + \zeta R(t) + M^2.$$

Проведем процедуру некоммутативного интегрирования уравнения (17). Будем искать решение по аналогии с (14):

$$\phi_\tau(t,g) = (T^j_{g^{-1}}\psi_j(t))(q), \quad \tau = (q,j).$$

Тогда на функцию $\psi_j(t,q')$ имеем редуцированное уравнение

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (l(t)-n(t))\Big[(a(t)\cos^2 q' - 1)\frac{\partial^2}{\partial q'^2} + (j+\frac{1}{2})a(t)\sin 2q'\frac{\partial}{\partial q'} - \frac{1}{2}a(t)j(j-1)\cos 2q'\Big] + \\ + \frac{1}{2}(l(t)+m(t))j(j+1) + M^2 + \zeta R(t) - \frac{3}{4}(3\alpha'(t) + 2\alpha''(t))\Big)\psi_j(t,q') = 0, \tag{21}$$

где мы используем обозначение

$$a(t) = \frac{l(t)-m(t)}{l(t)-n(t)}.$$

Заметим, что редуцированное уравнение (21) зависит от двух переменных (t,q'), тогда как редуцированное уравнение, полученное методом разделения переменных, зависит от трех переменных.

Рассмотрим осесимметричный случай. Тогда оператор $\ell_3 = \partial_{q'}$ является оператором симметрии редуцированного уравнения (21). Поставим задачу на собственные значения $-i\ell_3\psi = n\psi$. Тогда

$$\psi_j(t,q') = (\gamma(t))^{-1/4} f_{nj}(t)e^{inq'}, \quad n = -j,\ldots,j, \tag{22}$$

где функция $f_{nj}(t)$ удовлетворяет уравнению (20), полученному методом разделения переменных. Но, в отличие от решения в разделенных переменных, решение (22) выражается в элементарных функциях.

Уравнение Дирака

Уравнение Дирака для спинорного поля $\varphi(x)$ массы m в искривленном пространстве-времени с метрикой $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$ имеет вид [Breev, 2014]

$$\Big(\gamma^\mu(x)p_\mu - m\Big)\varphi(x) = 0, \quad p_\mu = i(\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)),$$

где $\gamma^\mu(x)$ — гамма-матрицы Дирака, которые определяются как произвольное, но фиксированное решение системы уравнений $\{\gamma_\mu(x),\gamma_\nu(x)\} = 2g_{\mu\nu}(x)E_4$ (E_4 — единичная матрица 4×4), $g_{\mu\nu}(t,g)$ — метрический тензор. Коэффициенты Фока–Иваненко $\Gamma_\mu(x)$ однозначно определяются из условий $[\gamma^\mu(x), p_\nu] = 0$, $\mathrm{Sp}\,\Gamma_\mu = 0$ и имеют вид

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{4}\gamma^\nu(x)\gamma_{\nu;\mu}(x), \quad \gamma_{\nu;\mu}(x) = \partial_\mu\gamma_\nu(x) - \Gamma^\tau_{\nu\mu}(x)\gamma_\tau(x),$$

где $\Gamma^\tau_{\nu\mu}(x)$ — символы Кристоффеля второго рода симметричной связности, согласованной с метрикой ds^2.

Для космологической модели Бъянки IX с метрикой (1) удобно разложить гамма-матрицы Дирака по подвижному реперу правоинвариантных векторных полей ($x = (t,g)$):

$$\gamma^0(x) = -\hat\gamma^0, \quad \gamma^i(x) = \hat\gamma^a(t)\eta^i_a(g), \quad \hat\gamma^a(t) = \sqrt{\gamma^{aa}(t)}\gamma^a, \quad \hat\gamma^0 = -\gamma^0,$$

где γ^0,γ^i — обычные гамма-матрицы Дирака. Тогда для спинорной связности можно получить выражение

$$\Gamma(t) = \gamma^\mu(x)\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{2}(\log\sqrt{\gamma(t)})'\gamma^0 + \frac{1}{4}\sqrt{\gamma(t)}\,[l(t)(m(t)+n(t)) + m(t)n(t)]\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

В итоге уравнение Дирака можно записать как

$$\mathcal{D}(x)\varphi(x) = m\varphi(x), \tag{23}$$

где оператор $\mathcal{D}(x)$ выражается через базисные правоинвариантные векторные поля:

$$\mathcal{D}(x) = i\Big[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{4}(\log\gamma(t))'\right)\gamma^0 + \sqrt{l(t)}\gamma^1\eta_1(g) + \sqrt{m(t)}\gamma^2\eta_2(g) + \sqrt{n(t)}\gamma^3\eta_3(g) + \\ + \frac{1}{4}\sqrt{\gamma(t)}\,[l(t)(m(t)+n(t)) + m(t)n(t)]\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3\Big]. \qquad (24)$$

Рассмотрим осесимметричный случай. Тогда оператор Дирака (24) допускает два коммутирующих оператора симметрии, порожденных двумя векторными полями Киллинга ξ_1 и η_3:

$$\hat{Y}_1 = -i\xi_1, \quad \hat{Y}_2 = i\left(\eta_3 + \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2\right). \qquad (25)$$

Оператор Казимира (19) является оператором симметрии уравнения Дирака (24) второго порядка и вместе с операторами (25) образует полный коммутативный набор операторов симметрии. Спиновых операторов симметрии в общем случае нет.

Процедура разделения переменных в уравнении Дирака для осесимметричной модели аналогична процедуре разделения переменных в уравнении Клейна–Гордона [Pritomanov, 1985]. Решение задачи на собственные значения

$$\hat{K}(g)\varphi(t,g) = j(j+1)\varphi(t,g), \quad \hat{Y}_1\varphi(t,g) = m\varphi(t,g), \quad \hat{Y}_2\varphi(t,g) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi(t,g)$$

имеет вид

$$\varphi_{nmj}(t,g) = \gamma^{-1/4}(t)\begin{pmatrix} f_1(t)D^j_{mn}(g) \\ f_2(t)D^j_{m(n+1)}(g) \\ f_3(t)D^j_{mn}(g) \\ f_4(t)D^j_{m(n+1)}(g) \end{pmatrix}.$$

Учитывая соотношения

$$\eta_1(g)D^j_{mn}(g) = \frac{i}{2}\Big(\sqrt{(j-n)(j+n+1)}D^j_{m(n+1)}(g) + \sqrt{(j-n)(j-n+1)}D^j_{m(n-1)}(g)\Big),$$
$$\eta_2(g)D^j_{mn}(g) = \frac{i}{2}\Big(\sqrt{(j-n)(j+n+1)}D^j_{m(n+1)}(g) - \sqrt{(j+n)(j-n+1)}D^j_{m(n-1)}(g)\Big),$$
$$\eta_3(g)D^j_{mn}(g) = -inD^j_{mn}(g),$$

на спинор $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t))^T$ получим редуцированное уравнение

$$\mathcal{H}^{(SV)}(t)f(t) = mf(t),$$

где

$$\mathcal{H}^{(SV)}(t) = i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{l(t)}\sqrt{(j-n)(j+n+1)}\gamma^1 + \sqrt{n(t)}\left(n + \frac{1}{2}\right)\gamma^3 + \frac{i}{4}\frac{l(t)}{\sqrt{n(t)}}\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Проведем процедуру некоммутативного интегрирования. Подставим решение в виде

$$\varphi_\tau(t,g) = \gamma^{-1/4}(t)(T^j\psi_j(t))(q), \quad \tau = (q,j),$$

в уравнение Дирака (23). На спинор $\psi_j(t,q')$ получим редуцированное уравнение

$$\Big[i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} + i\sqrt{l(t)}\gamma^1\ell_1(q',j) + i\sqrt{m(t)}\gamma^2\ell_2(q',j) + i\sqrt{n(t)}\gamma^3\ell_3(q',j) + \\ + \frac{i}{4}\sqrt{\gamma(t)}\,[l(t)(m(t)+n(t)) + m(t)n(t)]\,\gamma^1\gamma^2\gamma^3 - m\Big]\psi_j(t,q') = 0. \qquad (26)$$

Для осесимметричной модели уравнение (26) допускает оператор симметрии, и соответствующая задача на собственные значения имеет вид

$$Y_2 = i\left(\ell_3(q', j) + \frac{1}{2}\gamma^1\gamma^2\right), \quad Y_2\psi(t, q'; j) = n\psi(t, q'; j). \tag{27}$$

Решая систему (27), получим

$$\psi_{nj}(t, q') = \begin{pmatrix} e^{-inq'} f_1(t) \\ e^{-i(n+1)q'} f_2(t) \\ e^{-inq'} f_3(t) \\ e^{-i(n+1)q'} f_4(t) \end{pmatrix}.$$

Спинор $f(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\mathcal{H}^{(NI)}(t) f(t) = m f(t), \tag{28}$$

где

$$\mathcal{H}^{(NI)}(t) = i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{l(t)}\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\gamma^1 + i\left(n + \frac{1}{2}\right)\gamma^2\right] + \sqrt{n(t)}\left(n + \frac{1}{2}\right)\gamma^3 + \frac{i}{4}\frac{l(t)}{\sqrt{n(t)}}\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

Отметим, что в отличие от уравнения Клейна–Гордона некоммутативная редукция формально приводит к другому обыкновенному уравнению (28), нежели метод разделения переменных. Тем не менее операторы $\mathcal{H}^{(SV)}(t)$ и $\mathcal{H}^{(NI)}(t)$ эквивалентны, так как существует постоянная матрица, переводящая один оператор в другой:

$$U_{nj}^{-1}\mathcal{H}^{(SV)}(t)U_{nj} = \mathcal{H}^{(NI)}(t), \quad U_{nj} = \frac{i}{2n+1}\left(\sqrt{(j-n)(j+n+1)} - j - \frac{1}{2}\right)[\gamma^1, \gamma^2] + 1.$$

Заключение

В данной работе проведена некоммутативная редукция уравнений Клейна–Гордона и Дирака в анизотропной космологической модели Бьянки IX. Проведено сравнение некоммутативной редукции и редукции с помощью метода разделения переменных в осесимметричной модели. Показано, что для уравнения Клейна–Гордона редуцированные уравнения совпадают, а для уравнения Дирака являются эквивалентными. Найдены новые точные решения частном случае осесимметричной модели, в которых зависимость от пространственных переменных выражается в элементарных функциях. С помощью полученных решений можно найти функцию Грина, в которой зависимость от координат входит через обобщенные ядра λ-представления, что позволит эффективно применить метод раздвижки точек для устранения возникающих расходимостей. Данная задача привлекает методы квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени и является темой дальнейших исследований авторов.

Список литературы (References)

Биррелл Н., Девис В. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. — М.: Мир, 1984. — 356 с.

Birrell N. D., Davies P. C. W. Quantum fields in curved space. — Cambridge university press, 1984. — No. 7. (Russ. ed.: *Birrell N., Devis V.* Kvantovannye polya v iskrivlennom prostranstve vremeni. — Moskva: Mir, 1984 — 356 s.)

Браун П. А., Киселев А. А. Введение в теорию молекулярных спектров. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1938. — 232 с.

Braun P. A., Kiselev A. A. Vvedenie v teoriyu molekulyarnyh spektrov [Introduction to the Theory of Molecular Spectra]. — Leningrad: Izd-vo Leningr. un-ta, 1938. — 232 s. (in Russian).

Бреев А. И., Широков И. В., Разумов Н. Поляризация вакуума скалярного поля на многообразии, конформно-эквивалентном RxG // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2007. — № 10. — С. 50–56.

Breev A. I., Shirokov I. V., Razumov N. Polyarizaciya vakuuma skalyarnogo polya na mnogoobrazii konformno-ehkvivalentnom rhg [Polarization of a scalar field vacuum on a manifold conformally equivalent to the manifold R⊗ G] // Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Fizika. — 2007. — No. 10. — S. 50–56 (in Russian).

Гончаровский М. М., Широков И. В. Интегрируемый класс дифференциальных уравнений с нелокальной нелинейностью на группах Ли // Теоретическая и математическая физика. — Т. 161, № 3. — С. 332–345.

Goncharovskij M. M., Shirokov I. V. Integriruemyj klass differencialnyh uravnenij s nelokalnoj nelinejnostyu nagruppah Li [An integrable class of differential equations with nonlocal nonlinearity on Lie groups] // Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika. — Vol. 161, No. 3. — S. 332–345 (in Russian).

Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. — М.: Атомиздат, 1988. — 288 с.

Grib A. A., Mamaev C. G., Mostepanenko V. M. Vakuumnye kvantovye ehffekty v silnyh polyah [Vacuum quantum effects in strong fields]. — Moskva: Atomizdat, 1988. — 288 s. (in Russian).

Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978. — 344 с.

Kirillov A. A. Ehlementy teorii predstavlenij [Elements of the Theory of Representations]. — Moskva: Nauka, 1978. — 344 s. (in Russian).

Шаповалов А. В., Широков И. В. Некоммутативное интегрирование линейных дифференциальных уравнений // Теоретическая и математическая физика. — 1995. — Т. 104, № 2. — С. 195–213.

Shapovalov A. V., Shirolov I. V. Nekommutativnoe integrirovanie linejnyh differencialnyh uravnenij [Noncommutative integration of linear differential equations] // Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. — 1995. — Vol. 104, No. 2. — S. 195–213 (in Russian).

Breev A. I. Shapovalov A. V. Yang-Mills gauge felds conserving the symmetry algebra of the Dirac equation in a homogeneous space // Journal of Physics: Conference Series. — 2014. — Vol. 563. — P. 012004.

Hu B. L. Scalar waves in the Mixmaster Universe. I. The Helmholtz equation in a fixed background // Phys. Rev. D. — 1973. — Vol. 8, No. 4. — P. 1048–1060.

Hu B. L. Scalar waves in the Mixmaster Universe. II. Particle creation // Phys. Rev. D. — 1974. — Vol. 9, No. 9. — P. 3263–3281.

Pritomanov S. A. Quantum effects in Mixmaster Universe // Phys. Lett. A. — 1985. — Vol. 107, No. 1. — P. 33–35.

Ryan M. P., Shepley L. C. Homogeneous relativistic cosmologies. — Princeton: Princeton series in Physics, 1975. — 336 p.