

УДК: 519.6

## Теоретическое обоснование математических методов совместного оценивания параметров сигнала и шума при анализе райсовских данных

**Т. В. Яковлева**

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына  
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук  
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2

E-mail: tan-ya@bk.ru

*Получено 22.02.2016, после доработки — 21.03.2016.*

*Принято к публикации 13.04.2016.*

В работе решается двухпараметрическая задача совместного расчета параметров сигнала и шума в условиях распределения Райса методами математической статистики: методом максимума правдоподобия и вариантами метода моментов. Рассматриваемые варианты метода моментов включают в себя совместный расчет сигнала и шума на основе измерений 2-го и 4-го моментов (ММ24) и на основе измерений 1-го и 2-го моментов (ММ12). В рамках каждого из рассматриваемых методов получены в явном виде системы уравнений для искомых параметров сигнала и шума. Важный математический результат проведенного исследования состоит в том, что решение системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными — искомыми параметрами сигнала и шума — сведено к решению одного уравнения с одной неизвестной, что важно с точки зрения как теоретического исследования метода, так и его практического применения, позволяя существенно сократить необходимые для реализации метода вычислительные ресурсы. Задача является значимой для целей обработки райсовских данных, в частности, в системах магнитно-резонансной визуализации. В результате проведенного теоретического анализа получен важный практический вывод: решение двухпараметрической задачи не приводит к увеличению требуемых вычислительных ресурсов по сравнению с однопараметрическим приближением. Теоретические выводы подтверждаются результатами численного эксперимента.

Ключевые слова: функция плотности вероятности, распределение Райса, функция правдоподобия, метод максимума правдоподобия, метод моментов, отношение сигнала к шуму, дисперсия шума

UDC: 519.6

## Theoretical substantiation of the mathematical techniques for joint signal and noise estimation at rician data analysis

**T. V. Yakovleva**

Dorodnicyn Computing Centre, Federal Research Center “Computer Science and Control”  
of Russian Academy of Sciences,  
44, b. 2, Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

E-mail: tan-ya@bk.ru

*Received 22.02.2016, after completion — 21.03.2016.*

*Accepted for publication 13.04.2016.*

The paper provides a solution of the two-parameter task of joint signal and noise estimation at data analysis within the conditions of the Rice distribution by the techniques of mathematical statistics: the maximum likelihood method and the variants of the method of moments. The considered variants of the method of moments include the following techniques: the joint signal and noise estimation on the basis of measuring the 2-nd and the 4-th moments (MM24) and on the basis of measuring the 1-st and the 2-nd moments (MM12). For each of the elaborated methods the explicit equations' systems have been obtained for required parameters of the signal and noise. An important mathematical result of the investigation consists in the fact that the solution of the system of two nonlinear equations with two variables — the sought for signal and noise parameters — has been reduced to the solution of just one equation with one unknown quantity what is important from the view point of both the theoretical investigation of the proposed technique and its practical application, providing the possibility of essential decreasing the calculating resources required for the technique's realization. The implemented theoretical analysis has resulted in an important practical conclusion: solving the two-parameter task does not lead to the increase of required numerical resources if compared with the one-parameter approximation. The task is meaningful for the purposes of the rician data processing, in particular — the image processing in the systems of magnetic-resonance visualization. The theoretical conclusions have been confirmed by the results of the numerical experiment.

Keywords: probability density function, Rice distribution, likelihood function, maximum likelihood method, method of moments, signal to noise ratio, noise dispersion

## 1. Введение

Возросший в последние годы интерес к решению задачи анализа случайного сигнала в условиях применимости статистической модели Райса связан прежде всего с широким кругом технических и научных задач, которые описываются именно данной статистической моделью. Распределение Райса используется в задачах, в которых выходной сигнал представляет собой сумму искомого исходного сигнала и случайного шума, образованного многими независимыми нормально распределенными слагаемыми с нулевым средним значением, а измеряемой величиной является амплитуда, или огибающая, суммарного сигнала. Именно амплитуда такого суммарного сигнала, как известно, подчиняется распределению Райса [Rice, 1945].

Применительно к различным областям и процессам, которые описываются статистической моделью Райса, задача определения искомого параметра сигнала может быть математически сформулирована как задача вычисления статистических параметров распределения Райса — средней величины исходного сигнала и дисперсии шума — на основании полученных экспериментальных данных выборок измерений результирующего «зашумленного» сигнала. При решении этой задачи наиболее часто используются два статистических метода: метод максимума правдоподобия [Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Yakovleva, Kulberg, 2013] и метод моментов [Benedict, Soong, 1967; Talukdar, Lawing, 1991; Яковлева, 2014]. Традиционная постановка задачи анализа райсовских сигналов состоит в использовании так называемого однопараметрического приближения, нереализуемого на практике и состоящего в том, что рассчитывается только один параметр — величина сигнала — на основе предположения об априорной известности величины дисперсии шума [Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Sijbers, den Dekker, 2004]. Новизна постановки задачи в настоящей работе состоит в одновременном расчете как информативной, полезной составляющей сигнала, так и его шумовой составляющей. В такой постановке задача свободна от каких-либо априорных предположений относительно параметров задачи. Возможность вычисления дисперсии шума позволяет, в свою очередь, более точно определить величину исходного анализируемого сигнала.

## 2. Постановка задачи, основные обозначения

Рассмотрим случайную величину, образуемую суммированием исходного сигнала и гауссовского шума, а именно: действительная и мнимая части исходного комплексного сигнала искажаются гауссовским шумом, имеющим нормальное распределение. В результирующем сигнале действительная  $x_{\text{Re}}$  и мнимая  $x_{\text{Im}}$  части представляют собой независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение с одинаковыми дисперсиями и ненулевыми математическими ожиданиями. Амплитуда результирующего сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$ , как известно, подчиняется распределению Райса, называемому также обобщенным распределением Рэлея, так как оно было сформулировано Райсом как обобщение хорошо известного из классической теории вероятности распределения Рэлея на случай ненулевой амплитуды исходного сигнала; при этом математические ожидания действительной и мнимой составляющих всегда можно считать одинаковыми, выбрав должным образом оси  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$ . Для параметров распределения Райса будем использовать следующие обозначения:  $\nu$  — математическое ожидание действительной и мнимой частей измеряемого сигнала;  $\sigma^2$  — величина дисперсии гауссовского шума, искажающего сигнал. Функция плотности вероятности для райсовской величины  $x$  определяется формулой

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Здесь и ниже будем использовать следующие обозначения:  $I_\alpha(z)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка  $\alpha$ ;  $x_i$  — величина сигнала  $i$ -ой выборки;  $n$  — количество элементов в выборке (длина выборки). Для обозначения усреднения по выборке будем использовать угловые скобки, а среднее значение при бесконечно большой длине выборки будем обозначать чертой сверху:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad \dots; \quad \langle x^k \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad (2)$$

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \overline{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad \dots; \quad \overline{x^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k. \quad (3)$$

В (3) величина  $\overline{x^k}$  представляет собой  $k$ -ый момент случайной величины  $x$ . Математическое ожидание и дисперсия райсовской величины даются формулами

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sigma \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot L_{1/2}(-v^2/2\sigma^2), \\ \sigma_x^2 &= \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 2\sigma^2 + v^2 - \frac{\pi\sigma^2}{2} \cdot L_{1/2}^2(-v^2/2\sigma^2), \end{aligned}$$

где  $L_{1/2}$  представляет собой полином Лагерра (Laguerre). Как видим, не совпадают с райсовскими параметрами  $v$  и  $\sigma^2$ . Между тем оба райсовских параметра имеют конкретный физический смысл:  $\sigma^2$  — это дисперсия искажающего исходный сигнал гауссовского шума, а  $v$  — величина исходного детерминированного сигнала соответственно. С этим связана значимость как можно более точного оценивания этого параметра при анализе данных.

В силу математических особенностей распределения Райса задача восстановления исходного сигнала при априорно неизвестном значении дисперсии  $\sigma^2$  может быть решена только путем совместного расчета обоих райсовских параметров, т. е. единственно правильной является рассматриваемая в настоящей работе «двухпараметрическая» постановка задачи. Ввиду специфики распределения Райса анализ райсовских данных требует развития особых методов и соответствующего математического аппарата. В отличие от гауссовского распределения средняя величина райсовского сигнала не соответствует величине искомого полезного сигнала  $v$ . Поэтому если к райсовским данным применять традиционное усреднение, то в диапазоне небольших отношений сигнала к шуму мы будем получать нивелирование истинного сигнала, что демонстрируется иллюстрацией на рис. 1: слева на этом рисунке представлена некая исходная картинка, на которой яркость каждого фрагмента пропорциональна величине исходного детерминированного сигнала на соответствующем участке изображения. В результате воздействия гауссовского шума исходное изображение превращается в райсовское, представленное на рис. 1 в центре. Справа представлены результаты анализа данного изображения методом расчета райсовских параметров (сверху) и традиционным методом простого усреднения данных (снизу). Как и ожидалось, детали изображения в области невысокого отношения сигнала к шуму при традиционной фильтрации усреднением становятся неразличимы, в то время как расчет райсовских параметров позволяет восстановить данные и в таких проблемных областях.

Математическая задача, решаемая в работе, состоит в том, чтобы, используя известные из математической статистики метод максимума правдоподобия и метод моментов, определить оба искомого параметра  $v$  и  $\sigma^2$  и тем самым восстановить с помощью этих параметров исходный, не искаженный шумом сигнал, в частности в случае магнитно-резонансной визуализации — незашумленное изображение. Применимость каждого из рассматриваемых методов для расчета параметров  $v$  и  $\sigma^2$  обоснована путем доказательства существования и единственности решения соответствующей системы уравнений для искомого параметров.

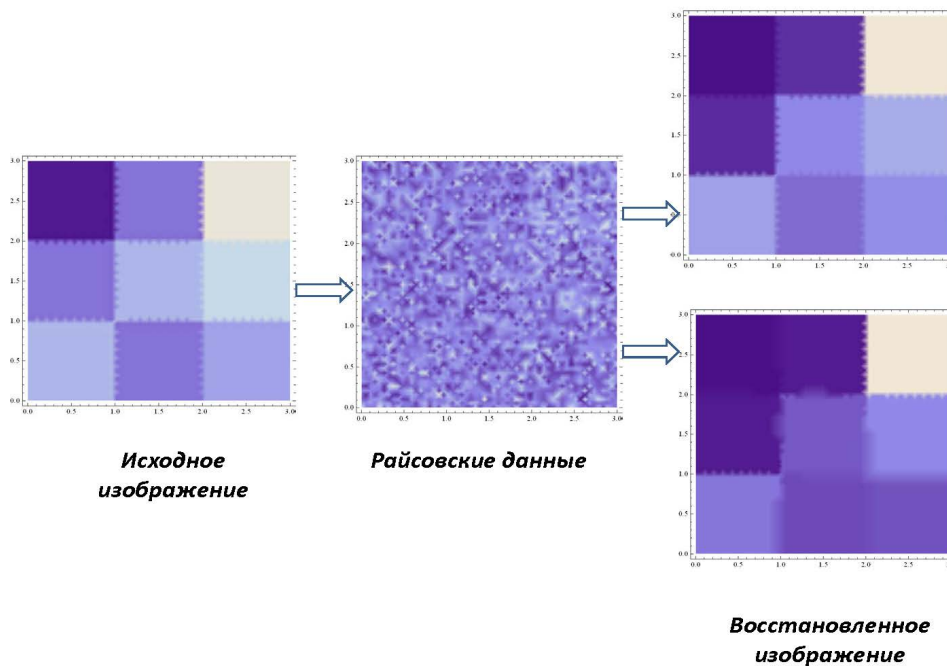


Рис. 1. Иллюстрация процедуры обработки изображения, формируемого райсовскими данными, на основе различных подходов в анализе данных (пояснения см. в тексте)

### 3. Метод максимума правдоподобия

Рассмотрим выборку из  $n$  измерений величины амплитуды случайного сигнала  $x$ . Тогда функция совместной плотности вероятности событий, состоящих в том, что результатом  $i$ -того измерения является величина  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), или функция правдоподобия, выражается как произведение функций плотности вероятности для каждого измерения из данной выборки:

$$L(\nu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n P(x_i | \nu, \sigma^2), \quad (4)$$

где функция  $P(x_i | \nu, \sigma^2)$  определяется выражением (1). При известных данных выборок, полученных в результате измерений, эта функция является функцией неизвестных параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$ . Метод максимума правдоподобия состоит в определении тех значений  $\nu$  и  $\sigma^2$ , которые максимизируют функцию (4), или, что эквивалентно, максимизируют ее логарифм:

$$\ln L(\nu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \ln P(x_i | \nu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^n \left\{ \ln x_i - \ln \sigma^2 - \frac{x_i^2 + \nu^2}{2 \cdot \sigma^2} + \ln I_0 \left( \frac{x_i \nu}{\sigma^2} \right) \right\}. \quad (5)$$

Система уравнений максимума правдоподобия для  $\nu$  и  $\sigma^2$  имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \nu} \ln L(\nu, \sigma^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\nu, \sigma^2) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Приравнивание нулю производных логарифмической функции правдоподобия позволяет определить те значения параметров, при которых достигается экстремум этой функции и, соот-

ветственно, экстремум функции правдоподобия (4). Подставляя (5) в систему уравнений (6) и производя дифференцирование, получаем следующую систему уравнений для  $\nu$  и  $\sigma^2$ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \nu} \ln I_0\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) - \frac{n \cdot \nu}{\sigma^2} = 0, \\ -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2 \cdot \sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln I_0\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

При рассмотрении системы уравнений (7) возникают вопросы, ответы на которые даются в настоящей работе: вопрос об условиях существования и единственности решения системы уравнений (7) и вопрос о характере найденного экстремума. Система (7) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{I_1\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)}{I_0\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)} - \frac{n \cdot \nu}{\sigma^2} = 0, \\ -\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{2 \cdot \sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) - \frac{\nu}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{I_1\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)}{I_0\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Как следует из (8), решения уравнений для  $\nu$  и  $\sigma^2$  зависят от функции, являющейся отношением модифицированных функций Бесселя первого рода первого и нулевого порядков:

$$\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}. \quad (9)$$

С учетом обозначения (9) можно записать систему уравнений (8) в следующем виде:

$$\begin{cases} \nu - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) = 0, \\ \sigma^2 - \frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) + \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы (10) позволяет получить наиболее вероятные значения параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$  сигнала  $x$ . Теоретический анализ задачи и решение системы уравнений (10) основываются на ряде вспомогательных математических утверждений в отношении свойств райсовской величины и особых свойств функции (9), которые доказаны ниже.

### 3.1. Вспомогательные математические утверждения

Из известных соотношений и определений математической статистики следует, что среднее значение квадрата случайной райсовской величины удовлетворяет условию

$$\overline{x^2} \geq 2 \cdot \sigma^2, \quad (11)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия действительной  $x_{\text{Re}}$  и мнимой  $x_{\text{Im}}$  составляющих сигнала.

Справедливость данного утверждения следует из определения дисперсии:

$$\sigma^2 = \overline{x_{\text{Re}}^2} - (\overline{x_{\text{Re}}})^2 \leq \overline{x_{\text{Re}}^2},$$

$$\sigma^2 = \overline{x_{\text{Im}}^2} - (\overline{x_{\text{Im}}})^2 \leq \overline{x_{\text{Im}}^2}.$$

Складывая эти два выражения, получим доказываемое неравенство (11):  $2\sigma^2 \leq \overline{x^2}$ . Случай равенства соответствует частному случаю распределения Райса — распределению Рэлея.

В (11) фигурирует 2-ой момент анализируемого сигнала  $x$ , определяемый усреднением при бесконечно большом количестве измерений. На практике мы имеем дело с выборкой конечной длины  $n$ . Тогда нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения.

**Лемма 1.** Предположим, что в результате проведения  $n$  измерений случайной величины  $x$  получена выборка значений данной величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если средние значения действительной  $x_{\text{Re}}$  и мнимой  $x_{\text{Im}}$  составляющих  $x$  не равны нулю, то при вычислении величины  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$

всегда существует такое  $n_0$ , что для любого  $n \geq n_0$  выполняется неравенство  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 > 2 \cdot \sigma^2$ ,

где  $\sigma^2$  — дисперсия действительной и мнимой составляющих сигнала  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$ .

*Доказательство.* По определению средней величины, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \overline{x^2}. \quad (\text{Л1.1})$$

Неравенство нулю средних значений действительной и мнимой составляющих измеряемого сигнала означает, что рассматривается общий случай распределения Райса, не сводящийся к распределению Рэлея, т. е. в выражении (11) выполняется строгое неравенство  $\overline{x^2} > 2 \cdot \sigma^2$ . Условие (Л1.1) означает, что для  $\forall \varepsilon \exists n_2$ , такое, что для  $\forall n > n_2$  выполняется условие

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x^2} \right| < \varepsilon. \quad (\text{Л1.2})$$

Выберем в качестве  $\varepsilon$  величину, не превышающую разницу  $\delta = \overline{x^2} - 2 \cdot \sigma^2 > 0$ , т. е.  $\varepsilon < \delta$ . Тогда  $\delta - \varepsilon > 0$ , и, подставляя в (Л1.2) выражение  $\overline{x^2} = 2 \cdot \sigma^2 + \delta$  получим

$$-\varepsilon + \delta < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \cdot \sigma^2 < \varepsilon + \delta. \quad (\text{Л1.3})$$

Левую часть двойного неравенства (Л1.3) можно переписать следующим образом: всегда  $\exists n_2$ , такое, что  $\forall n > n_2$  выполняется условие  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \cdot \sigma^2 > 0$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.** Функция  $\tilde{I}(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению следующего вида:

$$\frac{d}{dz} \tilde{I}(z) = 1 - \frac{1}{z} \cdot \tilde{I}(z) - \tilde{I}^2(z). \quad (\text{Л2.1})$$

*Доказательство.* Используя известные формулы для производных модифицированных функций Бесселя:  $\frac{d}{dz} I_0(z) = I_1(z)$ ,  $\frac{d}{dz} I_1(z) = I_0(z) - \frac{I_1(z)}{z}$ , находим производную функ-

ции  $\tilde{I}(z)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tilde{I}(z) &= \frac{dI_1(z)}{dz} \cdot \frac{1}{I_0(z)} - \frac{I_1(z)}{I_0^2(z)} \cdot \frac{dI_0(z)}{dz} = \\ &= 1 - \frac{1}{z} \cdot \frac{I_1(z)}{I_0(z)} - \frac{I_1^2(z)}{I_0^2(z)} = 1 - \frac{1}{z} \cdot \tilde{I}(z) - \tilde{I}^2(z). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Очевидно, что свойства введенной нами функции  $\tilde{I}(z)$  следуют из ее определения (9) и известных свойств модифицированных функций Бесселя. На основании этих данных нетрудно сделать вывод о положительной определенности функции  $\tilde{I}(z)$ , ее поведении при  $z \rightarrow 0$  и асимптотическом поведении при  $z \rightarrow \infty$ . Из формул разложения в ряд модифицированных функций Бесселя первого рода:  $I_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\alpha}}{k! \Gamma(k+\alpha+1)}$ , путем сравнения соответствующих элементов разложения в ряд функций  $I_0(z)$  и  $I_1(z)$ , получаем для  $\forall z > 0 : I_0(z) > I_1(z)$ , т. е. для  $\forall z > 0 : \tilde{I}(z) \in (0, 1)$ . Аналогично получаем формулу разложения  $\tilde{I}(z)$  в ряд:

$$\tilde{I}(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{z}{2} \cdot \left( 1 - \frac{z^2}{8} + O(z^4) \right). \quad (12)$$

Принимая во внимание асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя первого рода при  $|z| \gg 1$  [Абрамовиц, Стиган, 1979]:

$$I_\alpha(z) \underset{z \gg 1}{\sim} \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 - \frac{4\alpha^2 - 1}{8z} + \frac{(4\alpha^2 - 1) \cdot (4\alpha^2 - 9)}{2!(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right\},$$

получим асимптотическую оценку для введенной нами функции  $\tilde{I}(z)$  при  $|z| \gg 1$ :

$$\tilde{I}(z) \underset{z \gg 1}{\sim} 1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right). \quad (13)$$

**Лемма 3.** Функция  $\tilde{I}(z)$  является монотонно возрастающей вверх на интервале  $(0, +\infty)$ .

*Доказательство.* Условие монотонного возрастания функции  $\tilde{I}(z)$  означает неотрицательность ее производной. Из определения функции  $\tilde{I}(z)$  следует выражение для ее производной:

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = \frac{1}{I_0^2(z)} \left[ \frac{dI_1(z)}{dz} \cdot I_0(z) - I_1(z) \cdot \frac{dI_0(z)}{dz} \right]. \quad (ЛЗ.1)$$

С учетом известного соотношения  $\frac{dI_0(z)}{dz} = I_1(z)$  можем записать (ЛЗ.1) в виде

$$\frac{d\tilde{I}(z)}{dz} = \frac{1}{I_0^2(z)} \left[ \frac{dI_1(z)}{dz} \cdot I_0(z) - I_1^2(z) \right] = \frac{I_0(z) \cdot I_1'(z) - I_1^2(z)}{I_0^2(z)}. \quad (ЛЗ.2)$$

Таким образом, знак производной функции  $\tilde{I}(z)$  определяется знаком числителя выражения (ЛЗ.2). Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать неотрицательность числи-



теля в (ЛЗ.2) при  $z \geq 0$ . Доказательство монотонности функции  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$  основано на интегральных представлениях модифицированных функций Бесселя первого рода:

$$I_l(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos t} \cdot \cos(lt) dt, \quad (\text{ЛЗ.3})$$

где  $l \in Z$ ,  $\text{Re}(z) > 0$ . Из (ЛЗ.3) получим для  $I_0(z)$  и  $I_1(z)$  следующие формулы:

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos t} dt, \quad (\text{ЛЗ.4})$$

$$I_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos t} \cdot \cos t dt. \quad (\text{ЛЗ.5})$$

Аналогично для производной функции  $I_1(z)$  получим

$$I_1'(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos t} \cos^2 t dt. \quad (\text{ЛЗ.6})$$

Подставляя (ЛЗ.4), (ЛЗ.5) и (ЛЗ.6) в числитель выражения (ЛЗ.2), получаем

$$\begin{aligned} I_1'(z) \cdot I_0(z) - I_1^2(z) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi e^{z \cos t} \cdot \cos^2 t dt \cdot \int_0^\pi e^{z \cos t'} dt' - \\ &- \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi e^{z \cos t} \cdot \cos t dt \cdot \int_0^\pi e^{z \cos t'} \cdot \cos t' dt'. \end{aligned} \quad (\text{ЛЗ.7})$$

В результате несложных преобразований можно представить (ЛЗ.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_1'(z) \cdot I_0(z) - I_1^2(z) &= \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi dt dt' e^{z(\cos t + \cos t')} \left( \frac{1}{2} \cos^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t' - \cos t \cdot \cos t' \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi dt dt' e^{z(\cos t + \cos t')} (\cos t - \cos t')^2. \end{aligned} \quad (\text{ЛЗ.8})$$

Из (ЛЗ.8) в силу неотрицательности подынтегрального выражения следует неотрицательность всего выражения (ЛЗ.8) и, в силу (ЛЗ.2), неотрицательность  $\frac{d^2 \tilde{I}(z)}{dz^2}$ . Лемма доказана.

Аналогично доказывается выпуклость  $\tilde{I}(z)$  вверх в силу того, что  $\frac{d^2 \tilde{I}(z)}{dz^2} < 0$  при  $z \geq 0$ .

### 3.2. Решение задачи методом максимума правдоподобия в однопараметрическом приближении

Для полноты и логической последовательности изложения, прежде чем переходить к решению системы уравнений (10), рассмотрим первое из этих уравнений:

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{I} \left( \frac{x_i v}{\sigma^2} \right) \cdot x_i. \quad (14)$$

Решение уравнения (14), независимо от второго уравнения системы (10), означает решение однопараметрической задачи определения одного неизвестного параметра  $\nu$  в предположении, что параметр  $\sigma^2$  является известным *a priori*. Такая задача рассматривалась в работе [Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998]. В данной работе анализ проводился посредством разложения в ряд Тейлора вблизи точки  $\nu = 0$ . В отличие от упомянутой работы мы рассматриваем поведение логарифмической функции правдоподобия на всем физически значимом интервале  $\nu \geq 0$ , используя другие математические методы, которые позволили решить задачу, не ограничиваясь окрестностью точки  $\nu = 0$ . Принимая во внимание свойства модифицированных функций Бесселя и доказанные свойства функции  $\tilde{I}(z)$ , нетрудно видеть, что  $\nu = 0$  представляет собой одно из решений (14). Тривиальное решение уравнения (14) соответствует распределению Рэлея, когда случайные величины  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$  имеют нулевое математическое ожидание. Рассмотрим все корни уравнения (14) и выберем те, которые максимизируют (а не минимизируют) функцию правдоподобия, для определения искомого  $\nu$ . Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Решение уравнения (14) при  $\nu > 0$  существует и единственно.

*Доказательство.* Для определения условий существования нетривиального решения уравнения (14) рассмотрим поведение правой и левой частей этого уравнения. Левая часть (14) отображается прямой линией  $y_1 = \nu$ , а правая часть  $y_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{I}\left(\frac{x_i \cdot \nu}{\sigma^2}\right) \cdot x_i$  представляет собой линейную комбинацию функций  $\tilde{I}$ . Как следует из свойств функции  $\tilde{I}$ , кривая  $y_2(\nu)$  выходит из начала координат и отображает гладкую, монотонно возрастающую, выпуклую вверх функцию, асимптотически приближающуюся к прямой  $y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \langle x \rangle = \text{const}$ . Существование нетривиального решения уравнения (14) означает наличие точек пересечения прямой  $y_1 = \nu$  и кривой  $y_2(\nu)$ , помимо начала координат. В силу выпуклости кривая  $y_2(\nu)$  не может иметь более двух общих точек с прямой  $y_1 = \nu$ , причем одна из этих точек  $\nu = 0$ . Наличие второй общей точки определяется поведением вблизи начала координат производной функции  $y_2(\nu)$ : для наличия второго решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $y_2'(0) > y_1'(0) = 1$ . Найдем  $y_2'(0)$ :

$$y_2'(\nu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dz_i} \tilde{I}(z_i) \cdot \frac{x_i^2}{\sigma^2}, \quad (\text{T1.1})$$

где  $z_i = \frac{x_i \nu}{\sigma^2}$ . С учетом выражения для производной функции  $\tilde{I}$  (лемма 2) получаем

$$y_2'(\nu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma^2} \cdot \left[ 1 - \frac{\tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)}{\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)} - \tilde{I}^2\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) \right].$$

Принимая во внимание формулу (12) для  $\tilde{I}(z)$  при малых значениях аргумента, получаем

$$y_2'(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2\sigma^2}. \quad (\text{T1.2})$$

Вводя коэффициент  $a = \frac{\langle x^2 \rangle}{2\sigma^2}$ , условие существования нетривиального решения уравнения (14) можно записать в виде

$$a = \frac{\langle x^2 \rangle}{2\sigma^2} > 1. \quad (\text{T1.3})$$

Согласно лемме 1 с ростом длины выборки  $n$  мы обязательно достигаем такого значения  $n_0$ , что для любого  $n > n_0$  всегда выполняется условие  $a > 1$ , т. е. при достаточно больших  $n$  всегда существует нетривиальное решение уравнения (14). Важно, что неравенство (T1.3) выполняется в условиях леммы 1, когда распределение Райса не сводится к распределению Рэлея, т. е. мы рассматриваем ненулевое решение  $\nu \neq 0$  уравнения (14). Его единственность следует из монотонности, гладкости и выпуклости вверх кривой  $y_2(\nu)$  (леммы 2, 3). Теорема доказана.

Рис. 2 представляет графическую иллюстрацию доказательства теоремы 1 на основе результатов численного моделирования задачи. Как видно из рис. 2, с увеличением отношения сигнала к шуму  $SNR = \nu / \sigma$  угол наклона кривой  $y_2(\nu)$  вблизи начала координат увеличивается, что ожидаемо, исходя из выражения (T1.2).

В формулировках, связанных с выборками измерений, теорема 1 может быть перефразирована следующим образом: если при измерениях сигнала выполняется условие  $\langle x^2 \rangle > 2\sigma^2$ , то существует единственное ненулевое решение уравнения (14). Если же  $\langle x^2 \rangle \leq 2\sigma^2$ , то максимум функции правдоподобия соответствует тривиальному решению  $\nu = 0$ .

Итак, уравнение максимума правдоподобия для параметра  $\nu \neq 0$ ,  $\nu > 0$  в случае однопараметрической задачи всегда имеет решение; это решение единственно, и оно определяет точку экстремума функции правдоподобия, которая может соответствовать как максимуму, так и минимуму функции правдоподобия. Необходимо убедиться в том, что единственное ненулевое решение, декларируемое теоремой 1, является именно максимумом функции правдоподобия. Для этого рассмотрим вторую производную логарифмической функции правдоподобия (5):

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L(\nu, \sigma^2) = \frac{n}{\sigma^2} \left\{ \frac{\langle x^2 \rangle}{\sigma^2} - 1 - \frac{1}{n \cdot \sigma^2} \sum_{i=1}^n \left[ x_i^2 \cdot \frac{\tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)}{\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right)} + \tilde{I}^2\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right) \right] \right\}. \quad (15)$$

При получении (15) использована лемма 2. Учитывая (12), получаем из (15) при  $\frac{\nu}{\sigma} \ll 1$

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L(\nu, \sigma^2) \sim \frac{n}{\sigma^2} \cdot \left( \frac{\langle x^2 \rangle}{2\sigma^2} - 1 \right). \quad (16)$$

Выражение (16) означает, что в условиях справедливости леммы 1, т. е. когда распределение Райса не сводится к рэлеевскому, вблизи нулевого значения параметра  $\nu$  вторая производная положительна, т. к. при достаточно большом числе измерений всегда выполняется условие  $\frac{\langle x^2 \rangle}{2\sigma^2} > 1$ . Таким образом, нулевой корень уравнения (14) в ситуации, когда распределение Райса не сводится к рэлеевскому распределению, соответствует минимуму (а не максимуму) функции правдоподобия и не является искомым решением. В силу доказанных свойств функции (9) ло-

гарифмическая функция правдоподобия (5) и все ее производные являются гладкими. Поэтому второй экстремум при  $\nu > 0$  может быть только максимумом, т. е. единственное ненулевое решение уравнения правдоподобия соответствует максимуму функции правдоподобия.

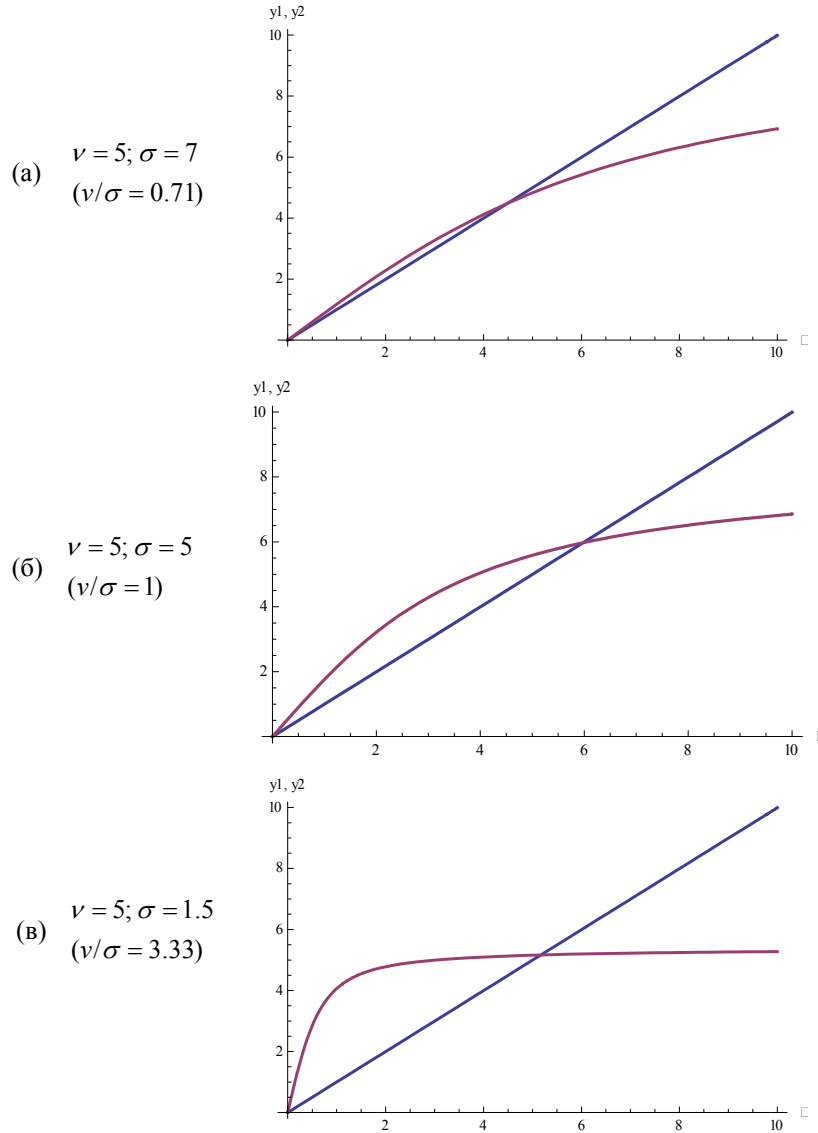


Рис. 2. Графическая иллюстрация доказательства теоремы 1

При малых значениях сигнала, при  $\langle x^2 \rangle < 2\sigma^2$ , вторая производная (16) в нуле отрицательна, и логарифмическая функция правдоподобия имеет максимум при  $\nu = 0$ , т. е. при этом решением уравнения максимума правдоподобия является тривиальное решение  $\nu = 0$ , которое соответствует распределению Рэлея как частному случаю распределения Райса. Во всех других случаях нулевой корень уравнения (14) определяет минимум функции правдоподобия.

Таким образом, доказаны существование и единственность ненулевого решения уравнения (14), определяющего значение параметра  $\nu$ , соответствующее максимуму функции правдоподобия в предположении, что второй параметр задачи  $\sigma^2$  является известным *a priori*. Ограниченность однопараметрического приближения обсуждалась выше. В следующем разделе дается решение двухпараметрической задачи, т. е. задачи определения обоих неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$ .

### 3.3. Решение двухпараметрической задачи методом максимума правдоподобия

В случае когда оба параметра задачи  $\nu$  и  $\sigma^2$  априорно неизвестны, метод максимума состоит в решении системы двух уравнений (10), которую перепишем в следующем виде:

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right), \\ \sigma^2 = \frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) - \frac{\nu}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{x_i \nu}{\sigma^2}\right). \end{cases} \quad (17)$$

Первое из этой системы уравнений обсуждалось выше, при рассмотрении однопараметрической задачи (см. уравнение (14)). Нетрудно видеть, что с учетом первого из уравнений (17) второе уравнение можно записать следующим образом:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2 \cdot n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 + \nu^2) - \nu^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \nu^2 \right). \quad (18)$$

Подставляя (18) в первое из уравнений (17), получаем

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{2 \cdot x_i \cdot \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2}\right). \quad (19)$$

Таким образом, система (17) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I}\left(\frac{2 \cdot x_i \cdot \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2}\right), \\ \sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot (\langle x^2 \rangle - \nu^2). \end{cases} \quad (20)$$

Первое из уравнений системы (20) — уравнение для  $\nu$  — представляет собой уравнение с одной неизвестной переменной. Это означает существенное упрощение двухпараметрической задачи: что задачу решения системы двух уравнений (17) для двух неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$  удалось свести к решению одного уравнения (19) для одной переменной  $\nu$ . Рассмотрим вопрос существования и единственности решения системы (20). В силу очевидной стохастичности процесса величина дисперсии отлична от нуля:  $\sigma^2 > 0$ , т. е. знаменатель аргумента функции  $\tilde{I}$  в уравнении для  $\nu$  системы (20) всегда положителен. При малых значениях  $n$ , вообще говоря, возможна ситуация, когда величина  $\langle x^2 \rangle - \nu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \nu^2$  будет отрицательной, но эта ситуация аналогична рассмотренному выше случаю, когда в силу недостаточно большого  $n$  возможно отрицательное значение разности  $\langle x^2 \rangle - 2 \cdot \sigma^2$ , т. е.  $\frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \sigma^2} < 1$ , и при увеличении длины выборки  $n$ , в силу определения дисперсии, начиная с какого-то  $n > n_0$ , всегда будет выполняться условие  $\langle x^2 \rangle > 2 \cdot \sigma^2$  (лемма 1). Случай, когда это условие не выполняется, т. е.  $\frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \sigma^2} < 1$ , как уже обсуждалось выше, может соответствовать либо нулевому значению  $\nu$ , т. е. релейскому пределу распределения Райса, либо недостаточно большой длине выборки  $n$ .

В отличие от причин возможного выполнения условия  $\frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \sigma^2} < 1$  условие отрицательности величины  $\langle x^2 \rangle - \nu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \nu^2$  может быть связано только с недостаточной длиной выборки  $n$

и не может быть следствием релеевского процесса, так как при распределении Релея выполняется условие  $\nu = 0$ , и тогда  $\langle x^2 \rangle - \nu^2 = \langle x^2 \rangle > 0$ . Таким образом, при обеспечении достаточной длины выборки всегда  $\langle x^2 \rangle - \nu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \nu^2 > 0$ , так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \nu^2 = 2 \cdot \sigma^2 > 0$ .

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения системы уравнений (20).

**Теорема 2.** Решение системы уравнений (20) для  $\nu$  и  $\sigma^2$  существует и единственно.

*Доказательство.* Для доказательства достаточно убедиться в существовании и единственности решения первого из уравнений данной системы, а именно уравнения для определения параметра  $\nu$ , так как второе уравнение позволяет однозначно определить величину  $\sigma^2$  по известному значению решения первого уравнения для  $\nu$ . Поэтому рассмотрим первое уравнение системы (20) (т. е. уравнение (19)). Левая часть уравнения (19) графически представляет собой прямую линию  $y_l(\nu) = \nu$ , а правая часть является линейной комбинацией функций  $\tilde{I} = I_1 / I_0$ :

$$y_r(\nu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I} \left( \frac{2 \cdot x_i \cdot \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2} \right), \quad (\text{T2.1})$$

причем аргументом каждого из слагаемых является нелинейная функция параметра  $\nu$ .

Величина  $\frac{\langle x^2 \rangle - \nu^2}{2}$  соответствует дисперсии сигнала, т. е. определяется физической природой шума и поэтому изменяется незначительно, как функция  $\nu$ . Введем обозначение

$$g(\nu) = \frac{2 \cdot \langle x \rangle \cdot \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2}. \quad (\text{T2.2})$$

Уравнение (19) можно представить в виде

$$\xi(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right), \quad (\text{T2.3})$$

где левая часть представляет собой величину  $\nu$  как обратную функцию аргумента  $g$ :

$$\nu = \xi(g(\nu)). \quad (\text{T2.4})$$

Проанализируем свойства введенной функции  $g(\nu)$ . Для ее производной по  $\nu$  получаем

$$g'(\nu) = \frac{2 \cdot \langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle - \nu^2} + \frac{4 \cdot \langle x \rangle \cdot \nu^2}{(\langle x^2 \rangle - \nu^2)^2} = 2 \cdot \langle x \rangle \frac{\langle x^2 \rangle + \nu^2}{(\langle x^2 \rangle - \nu^2)^2} > 0. \quad (\text{T2.5})$$

Напомним, что величина измеренного сигнала по смыслу задачи является неотрицательной:  $x_i = \sqrt{x_{i\text{Re}}^2 + x_{i\text{Im}}^2}$ . Поэтому неотрицательной величиной является и среднее по выборке значение  $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , в силу чего следует положительность производной  $g'(\nu)$ , определяемой формулой (T2.5). Таким образом, аргумент  $\frac{x_i}{\langle x \rangle} g$  каждой из функций  $\tilde{I}$  суммы в правой части (19) или уравнения (T2.3) является монотонно возрастающей функцией параметра  $\nu$ .

Из монотонно возрастающего характера функции  $g(\nu)$  в области физически значимых положительных значений  $\nu$  следует вывод об однозначности функции  $g(\nu)$  и обратной функции  $\nu = \xi(g)$ . Доказав существование и единственность ненулевого решения (Т2.3) для  $g$ , мы тем самым докажем существование и единственность ненулевого решения для  $\nu$ .

Из (Т2.2) несложно получить выражение для обратной функции  $\nu = \xi(g(\nu))$ . Из (Т2.2) также следует, что  $g = 0$  при  $\nu = 0$ . Поэтому при дальнейшем анализе функции  $\nu = \xi(g(\nu))$  исключим из рассмотрения точку  $g = 0$ . Тогда из (Т2.2) получаем квадратное уравнение для определения аналитической зависимости переменной  $\nu$  как функции переменной  $g$ :

$$\nu^2 + 2\nu \cdot \frac{\langle x \rangle}{g} - \langle x^2 \rangle = 0. \quad (\text{T2.6})$$

Так как  $\nu > 0$ , из двух корней квадратного уравнения (Т2.6) остается только один:

$$\nu(g) \equiv \xi(g) = -\frac{\langle x \rangle}{g} + \sqrt{\langle x^2 \rangle + \frac{\langle x \rangle^2}{g^2}}. \quad (\text{T2.7})$$

Дифференцируя обе части (Т2.4) по  $\nu$ , получим очевидное соотношение:  $1 = \xi'_g \cdot g'_\nu$ , из которого следует положительность производной функции  $\nu = \xi(g)$ :  $\xi'_g = \frac{1}{g'_\nu} > 0$ , т. е. монотонно возрастающий характер функции  $\nu = \xi(g)$ . Проанализируем вторую производную  $\xi(g)$ :

$$\frac{d^2 \xi}{dg^2} = -\frac{1}{(g'_\nu)^2} \cdot \frac{d^2 g}{d\nu^2}. \quad (\text{T2.8})$$

Из (Т2.2) и (Т2.5) получаем выражение для второй производной функции  $g(\nu)$ :

$$\frac{d^2 g}{d\nu^2} = 4\langle x \rangle \nu \cdot \frac{3\langle x^2 \rangle + \nu^2}{(\langle x^2 \rangle - \nu^2)^3}. \quad (\text{T2.9})$$

При достаточно большой длине выборки, когда выполняется условие  $\langle x^2 \rangle - \nu^2 > 0$ , вторая производная функции  $g(\nu)$ , как следует из выражения (Т2.9), является положительной, т. е. сама функция  $g(\nu)$  отображается вогнутой линией. С учетом положительности  $\frac{d^2 g}{d\nu^2}$ , следующей из (Т2.9), для области физически значимых значений  $\nu^2 < \langle x^2 \rangle$  получаем из (Т2.8)

$$\frac{d^2 \xi}{dg^2} < 0. \quad (\text{T2.10})$$

Положительность первой и отрицательность второй производной функции  $\nu = \xi(g)$  означают, что эта функция является монотонно возрастающей выпуклой функцией аргумента  $g$ .

Существование и единственность решения уравнения (19), а значит и системы (20), определяются наличием и количеством точек пересечения кривых, отображающих левую и правую части (Т2.3). Рассмотрим поведение правой части (Т2.3), которая является линейной комбинацией

цией функций  $\tilde{I}$ . Зависимость величины  $\frac{v}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}}$  от  $g$  определяется формулой

$$\frac{v}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{\langle x^2 \rangle} \cdot n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right).$$

Уравнение (Т2.3) определяет значение  $g$ , по которому однозначно определяется искомое значение  $v$  в силу монотонности и выпуклости функции  $v = \xi(g)$ . Для доказательства существования и единственности ненулевого решения уравнения (19) достаточно доказать существование и единственность решения уравнения (Т2.3) для  $g$ . Введем обозначения

$$\psi_r(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right), \quad (\text{T2.11})$$

$$\psi_l(g) = \xi(g). \quad (\text{T2.12})$$

Правая часть  $\psi_r(g)$  уравнения (Т2.3), как линейная комбинация монотонных выпуклых функций  $\tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right)$ , является монотонной выпуклой функцией, которая, в силу свойств функции  $\tilde{I}$ , асимптотически стремится к значению  $v_r = \langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ . Левая часть уравнения (Т2.3) тоже представляет собой монотонную выпуклую функцию  $\psi_l(g)$ , которая определяется формулой (Т2.7) и асимптотически стремится к величине  $v_l = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ . Таким образом, обе части уравнения (Т2.3) являются монотонно возрастающими выпуклыми функциями, выходящими из начала координат. Асимптотически эти функции приближаются к прямым линиям  $v = v_r$  и  $v = v_l$  соответственно. Условие  $\langle x^2 \rangle > (\langle x \rangle)^2$ , которое выполняется для любого стохастического процесса, означает, что значение асимптоты  $v_r$  правой части  $\psi_r(g)$  меньше значения  $v_l$  левой части  $\psi_l(g)$ , причем различие в асимптотах тем значительнее, чем больше выражена стохастичность процесса. Очевидно, что две монотонно возрастающие выпуклые кривые, отображающие правую и левую части уравнения (Т2.3), могут пересечься, с учетом их асимптотического поведения, только в случае, если в нулевой точке производная правой части больше, чем производная левой части данного уравнения. Поэтому существование точки пересечения линий  $\psi_r(g)$  и  $\psi_l(g)$  (помимо их общей точки — начала координат) определяется соотношением их производных вблизи начала координат. Проводя несложные вычисления, получаем

$$\lim_{g \rightarrow 0} \left( \frac{d\psi_l(g)}{dg} \right) = \lim_{g \rightarrow 0} (\xi'_g) = \lim_{v \rightarrow 0} \left( \frac{1}{g'_v} \right) = \frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \langle x \rangle} \cdot \left( 1 - 3 \cdot \frac{v^2}{\langle x^2 \rangle} \right). \quad (\text{T2.13})$$

Аналогичным образом для производной правой части (Т2.3) получим

$$\lim_{g \rightarrow 0} \left( \frac{d\psi_r(g)}{dg} \right) = \lim_{g \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \tilde{I} \left( \frac{x_i}{\langle x \rangle} g \right) \right\}' = \frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \langle x \rangle} \left\{ 1 - \frac{3}{2} v^2 \frac{\langle x^4 \rangle}{(\langle x^2 \rangle)^3} \right\}. \quad (\text{T2.14})$$



Выражение (T2.14), как и (T2.13), записано с точностью до членов разложения порядка  $\nu^2$ . Определяя разницу величин (T2.14) и (T2.13), получим

$$\lim_{g \rightarrow 0} \left\{ \frac{d\psi_r(g)}{dg} - \frac{d\psi_l(g)}{dg} \right\} = \frac{\langle x^2 \rangle}{2 \cdot \langle x \rangle} \cdot 3 \cdot \nu^2 \left\{ 1 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2(\langle x^2 \rangle)^2} \right\}. \quad (\text{T2.15})$$

Таким образом, наличие пересечения линий  $\psi_r(g)$  и  $\psi_l(g)$  зависит от знака величины

$$\beta = 1 - \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \cdot (\langle x^2 \rangle)^2}, \quad (\text{T2.16})$$

где  $\langle x^4 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4$ ,  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ . А именно, условие наличия пересечения рассматриваемых выпуклых линий  $\psi_r(g)$  и  $\psi_l(g)$  соответствует условию положительности величины  $\beta$ .

Известны следующие соотношения для моментов райсовского сигнала  $x$ :

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 2 \cdot \sigma^2 + \nu^2, \\ \overline{x^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 = 8 \cdot \sigma^4 + 8 \cdot \sigma^2 \cdot \nu^2 + \nu^4. \end{aligned} \quad (\text{T2.17})$$

С учетом этих формул получаем для  $\beta$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\langle x^4 \rangle}{2 \cdot (\langle x^2 \rangle)^2} = 1 - \frac{\overline{x^4}}{2 \cdot (\overline{x^2})^2} = 1 - \frac{8\sigma^4 + 8\sigma^2\nu^2 + \nu^4}{2 \cdot (4\sigma^4 + 4\sigma^2\nu^2 + \nu^4)} > 0. \quad (\text{T2.18})$$

Таким образом, с ростом количества измерений  $n$  в выборке существует такое число измерений в выборке, при превышении которого всегда будет выполняться условие  $\beta > 0$ , что, в свою очередь, означает обязательное наличие точки пересечения кривых, отображающих функции  $\psi_l(g)$  и  $\psi_r(g)$ , ведь кривая, отображающая  $\psi_r(g)$  уравнения (T2.3), вблизи нулевой точки идет выше кривой, отображающей  $\psi_l(g)$ , а асимптотика правой части  $\psi_r(g)$  ниже, чем асимптотика левой части  $\psi_l(g)$  уравнения (T2.3). Эта точка пересечения, в силу гладкости, монотонности и выпуклости вверх обеих этих функций, с учетом поведения радиуса кривизны данных функций, может быть только единственной, т. е. ненулевое решение уравнения (T2.3) и, следовательно, как обосновано выше, уравнения (19) существует и единственно.

Графическая иллюстрация этого вывода представлена на рис. 3. При получении графиков функций  $\psi_r(g)$  и  $\psi_l(g)$  использовались результаты численного моделирования задачи с помощью датчика случайных райсовских чисел с выбранными параметрами  $\nu$  и  $\sigma$ . Представленные варианты расчетов соответствуют различным комбинациям значений исходных параметров  $\nu$  и  $\sigma$ : а)  $\nu = 5$ ;  $\sigma = 2.5$ ; б)  $\nu = 3$  и  $\sigma = 1$ . Из (19) нетрудно видеть, что значение ординаты в точке пересечения кривых  $\psi_r(g)$  (сплошная линия) и  $\psi_l(g)$  (пунктирная линия) равно искомому значению  $\nu$ , что подтверждается графиками на рис. 3.

Таким образом, доказано, что решение первого из уравнений (20) — уравнения для  $\nu$  — существует и единственно, из чего следует вывод о существовании и единственности решения для  $\sigma$ . Таким образом, решение системы (20) существует и единственно. Теорема доказана.

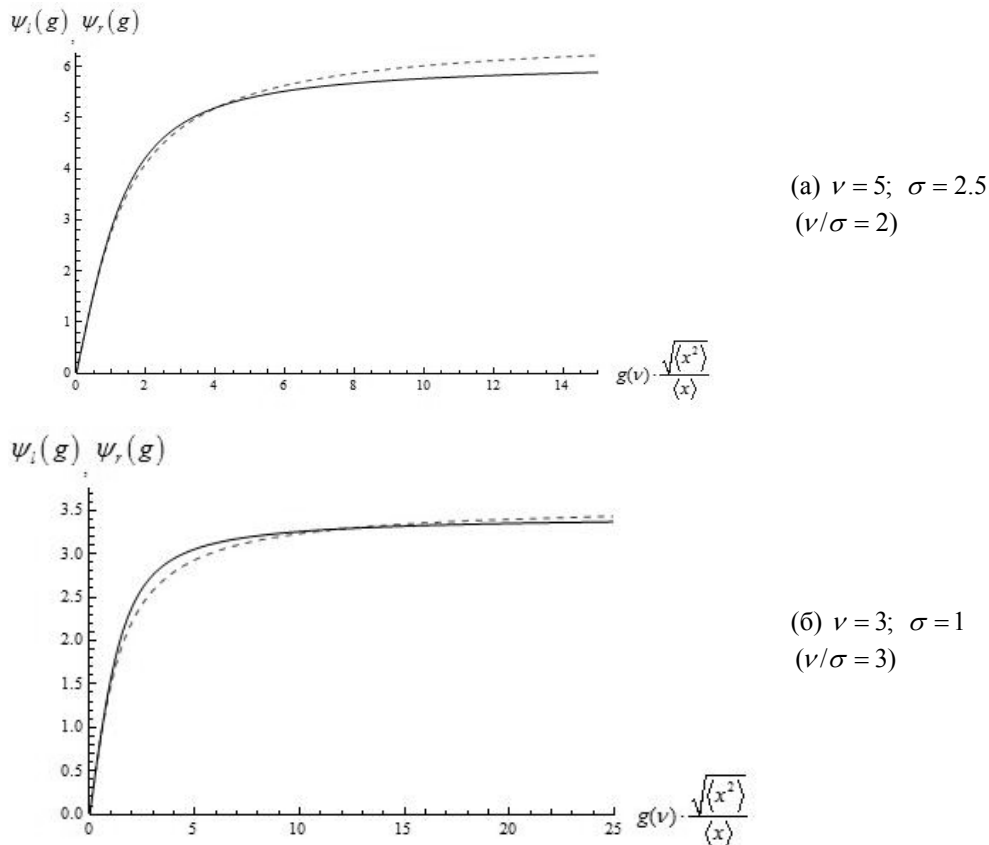


Рис. 3. Графики функций  $\psi_r(g)$  и  $\psi_l(g)$ , полученные в результате численного моделирования задачи при различных соотношениях параметров

Следует особо рассмотреть случай, соответствующий отсутствию полезного сигнала, т. е.  $\nu = 0$ , когда распределение Райса вырождается в распределение Релея. При этом, как следует из проведенного анализа уравнения (Т2.3), обе выпуклые линии,  $\psi_l(g)$  и  $\psi_r(g)$ , выходят из начала координат под одним и тем же углом (так как их производные вблизи начала координат совпадают в силу (Т2.15)) и далее уже расходятся, не пересекаясь, так как имеют разные асимптотики. Этот случай соответствует единственному тривиальному решению уравнения (19) для параметра  $\nu$ . При этом  $\sigma$  из второго уравнения системы (20) получаем  $\sigma^2 = \frac{\langle x^2 \rangle}{2}$ .

Относительно характера экстремума в случае двухпараметрической задачи справедливы те же рассуждения, что и для однопараметрической задачи: для определения характера экстремума необходимо выявить знак второй производной логарифмической функции правдоподобия:

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L(\nu, \sigma^2) = y_r'(\nu) - y_l'(\nu), \quad (21)$$

где  $y_r(\nu)$  и  $y_l(\nu)$  — правая и левая части уравнения (19) как функции параметра  $\nu$ :

$$y_l(\nu) = \nu, \quad (22)$$

$$y_r(\nu) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \tilde{I} \left( \frac{2x_i \nu}{\langle x^2 \rangle - \nu^2} \right).$$

Принимая во внимание (Т2.11) и (Т2.12), представим разность производных (21) в виде

$$y'_r(\nu) - y'_l(\nu) = \frac{d\psi_r(g)}{dg} \cdot \frac{dg}{d\nu} - \frac{d\psi_l(g)}{dg} \cdot \frac{dg}{d\nu} = \frac{dg}{d\nu} \cdot \left( \frac{d\psi_r}{dg} - \frac{d\psi_l}{dg} \right). \quad (23)$$

С учетом положительности величины  $\frac{dg}{d\nu}$  (см. (Т2.5)) из (23) следует, что знак разности  $y'_r(\nu) - y'_l(\nu)$  определяется знаком разности  $\frac{d\psi_r}{dg} - \frac{d\psi_l}{dg}$ . Из (Т2.2) следует, что  $g \rightarrow 0$  при  $\nu \rightarrow 0$ . Принимая во внимание (Т2.13), а также однозначный характер зависимости  $g(\nu)$ , получаем из (Т2.7) вывод о том, что при  $\nu \rightarrow 0$  определяемая формулой (21) вторая производная логарифмической функции правдоподобия положительна. Это означает, что в случае наличия нетривиального решения для параметра  $\nu$  системы (20) тривиальное решение  $\nu = 0$  всегда соответствует минимуму (а не максимуму) функции правдоподобия и поэтому не является искомым решением, в то время как нетривиальное решение  $\nu \neq 0$  системы уравнений (20) всегда соответствует именно максимуму функции правдоподобия.

Если же полезный сигнал отсутствует ( $\nu = 0$ ), то мы имеем дело с распределением Рэля как частным случаем распределения Райса, и тогда единственным решением  $\nu$  является тривиальное решение  $\nu = 0$ . Из формул (22) в этом случае с учетом (12) можно получить для второй производной логарифмической функции правдоподобия  $\ln L_R(\nu, \sigma^2)$  для распределения Рэля следующее:

$$\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} \ln L_R(\nu, \sigma^2) = \lim_{\nu \rightarrow 0} [y'_r(\nu) - y'_l(\nu)] = -\frac{3}{8} \cdot \frac{\langle x^4 \rangle}{\langle x^2 \rangle^2} \cdot \nu^2 < 0. \quad (24)$$

Отрицательность второй производной логарифмической функции правдоподобия для распределения Рэля означает, что единственное в этом случае тривиальное решение уравнения (19) соответствует максимуму функции правдоподобия.

#### 4. Двухпараметрический метод, основанный на измерениях 2-го и 4-го моментов случайной величины

Из математической статистики известны формулы для моментов случайной райсовской величины [Park, 1961]. Для 2-го и 4-го начальных моментов эти формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= 2 \cdot \sigma^2 + \nu^2, \\ \overline{x^4} &= 8 \cdot \sigma^4 + 8 \cdot \sigma^2 \cdot \nu^2 + \nu^4. \end{aligned} \quad (25)$$

Формулы (25) представляют собой простую систему двух уравнений для двух неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$ . В решении данной системы и состоит первый вариант двухпараметрического метода моментов, основанный на измерении 2-го и 4-го моментов анализируемой величины. Ниже для краткости будем называть этот метод «ММ24». Из (25) для определения  $\nu$  нетрудно получить

$$\nu = \sqrt[4]{2 \cdot (\overline{x^2})^2 - \overline{x^4}}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в первое из уравнений системы (25), получаем для  $\sigma^2$  выражение

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left[ \overline{x^2} - \sqrt{2 \cdot (\overline{x^2})^2 - \overline{x^4}} \right]. \quad (27)$$

Важно отметить, что формулы (26) и (27) содержат величины моментов измеряемого сигнала изображения, которые определяются в выборках измерений тем точнее, чем больше длина выборки. С помощью несложных математических выкладок можно сделать вывод о неотрицательности подкоренных выражений в формулах (26) и (27) при достаточно большой длине выборки измерений анализируемого сигнала. Таким образом, решение системы (25) метода моментов для параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$  существует. Единственность данного решения следует из того, что физически значимые значения искомых параметров являются неотрицательными, поэтому в (26) и (27) остается лишь один из двух возможных знаков перед корнем. Таким образом, решение задачи методом ММ24 существует и является единственным.

Выражения для квадратов искомых параметров  $\nu^2$  и  $\sigma^2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\nu^2 &= \overline{x^2} \sqrt{1-t}, \\ \sigma^2 &= \frac{\overline{x^2}}{2} (1 - \sqrt{1-t}).\end{aligned}\quad (28)$$

В (28) введено обозначение  $t = \overline{x^4} / (\overline{x^2})^2 - 1$ . Нетрудно видеть, что для любой случайной величины  $x$  в силу стохастичности величины  $x^2$  выполняется условие  $\overline{x^4} - (\overline{x^2})^2 > 0$ , так как разница  $\overline{x^4} - (\overline{x^2})^2$  определяет дисперсию случайной величины  $x^2$ . Поэтому параметр  $t$  растет с ростом стохастичности процесса и удовлетворяет соотношению  $0 < t \leq 1$ . В частном случае распределения Рэлея, когда полезный сигнал отсутствует ( $\nu = 0$ ), имеем  $t = 1$ . При этом второе из соотношений (28) дает очевидную для распределения Рэлея формулу:  $\sigma^2 = \overline{x^2} / 2$ .

Таким образом, метод моментов ММ24 является весьма оригинальным и простым. Рассмотрим предельные случаи малой и большой величины отношения сигнала к шуму. Для этого введем следующую величину, характеризующую отношение сигнала к шуму:

$$r_0 = \frac{\nu_0^2}{2\sigma_0^2}, \quad (29)$$

где  $\nu_0$  и  $\sigma_0^2$  — истинные значения параметров распределения Райса, характеризующие анализируемый райсовский сигнал  $x$ . Параметр  $t$  можно выразить через  $r_0$  следующим образом:

$$t = \frac{1 + 2r_0}{(1 + r_0)^2}. \quad (30)$$

С учетом выражения (30) формулы (28) преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\nu^2 &= \overline{x^2} \cdot \frac{r_0}{1 + r_0}, \\ \sigma^2 &= \frac{\overline{x^2}}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_0}.\end{aligned}\quad (31)$$

Из (31) легко получить значения искомых параметров в предельных случаях очень малого ( $r_0 \rightarrow 0$ ) и очень большого ( $r_0 \rightarrow \infty$ ) отношения сигнала к шуму. В частности, при  $\nu / \sigma \ll 1$  получаем известное для распределения Рэлея (при  $\nu = 0$ ) соотношение  $\sigma^2 = \overline{x^2} / 2$ . В пределе  $r_0 \rightarrow \infty$ , т. е. в случае почти детерминированного сигнала, из (31) для  $\nu$  получаем:  $\nu = \sqrt{\overline{x^2}}$ .

## 5. Двухпараметрический метод, основанный на измерениях 1-го и 2-го моментов случайной величины

В данном параграфе искомые параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$  определяются на основе измеренных данных для 1-го и 2-го моментов случайной райсовской величины. Обозначим этот вариант метода моментов как ММ12. Формула для 1-го момента райсовской величины  $x$  имеет вид [Park, 1961]

$$\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot L_{1/2}(-\nu^2/2\sigma^2). \quad (32)$$

Используя известное выражение для полинома Лагерра  $L_{1/2}$  [Абрамовиц, Стиган, 1979]:

$L_{1/2}(z) = e^{z/2} \left[ (1-z)I_0\left(\frac{-z}{2}\right) - zI_1\left(\frac{-z}{2}\right) \right]$ , формулу (32) можно представить в виде

$$\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{4\sigma^2}} \left[ \left(1 + \frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\nu^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) \right]. \quad (33)$$

Формула (33) может использоваться в качестве одного из исходных уравнений для определения неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$ . В качестве второго уравнения используем выражение для 2-го момента (первая из формул (25)). Тогда получаем следующую систему уравнений для  $\nu$  и  $\sigma^2$ :

$$\begin{cases} \sigma \cdot \sqrt{\pi/2} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{4\sigma^2}} \left[ \left(1 + \frac{\nu^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\nu^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) \right] = \bar{x}, \\ 2\sigma^2 + \nu^2 = \overline{x^2}. \end{cases} \quad (34)$$

Докажем существование решения системы (34). При анализе системы (34) удобно использовать в качестве переменных следующие величины: параметр дисперсии шума  $\sigma^2$  и величину  $r(\nu, \sigma)$ , характеризующую отношение сигнала к шуму:

$$r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}. \quad (35)$$

Очевидно, что интересующая нас область изменения  $r$  определяется неотрицательными значениями:  $r \geq 0$ , причем случай  $r = 0$  соответствует распределению Рэлея ( $\nu = 0$ ). Представим (34) как систему уравнений для переменных  $r$  и  $\sigma^2$ . После несложных преобразований и замены моментов  $\bar{x}$  и  $\overline{x^2}$  на соответствующие средние значения по выборке измерений, что правомерно в предположении достаточно большой длины выборки, получаем

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sigma^2 \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot \left[ (1+r)I_0\left(\frac{r}{2}\right) + rI_1\left(\frac{r}{2}\right) \right] = \langle x \rangle, \\ 2\sigma^2(1+r) = \langle x^2 \rangle. \end{cases} \quad (36)$$

Из второго уравнения системы (36) следует

$$\sigma^2 = \frac{\langle x^2 \rangle}{2(1+r)}. \quad (37)$$

Подставляя (37) в первое уравнение системы (36), получаем уравнение для  $r$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\langle x^2 \rangle}{(1+r)}} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot \left[ (1+r)I_0\left(\frac{r}{2}\right) + rI_1\left(\frac{r}{2}\right) \right] = \langle x \rangle. \quad (38)$$

Таким образом, для рассматриваемого метода ММ12 получен важный результат: решение системы нелинейных уравнений для двух неизвестных может быть сведено к решению одного уравнения для одной неизвестной. Это имеет большое значение для практической реализации метода, обеспечивая существенное сокращение требуемого объема вычислительных ресурсов.

В результате несложных преобразований уравнение (38) можно привести к виду

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \langle x^2 \rangle} \cdot \sqrt{1+r} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right) \left[ 1 + \frac{r}{(1+r)} \cdot \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right) \right] = \langle x \rangle. \quad (39)$$

где обозначение  $\tilde{I}$  используется для функции  $\tilde{I}(z) = I_1(z)/I_0(z)$ , равной отношению модифицированных функций Бесселя первого и нулевого порядков. Свойства функции  $\tilde{I}$  подробно исследовались в [Yakovleva, Kulberg, 2013]: данная функция является гладкой, монотонно возрастающей, выпуклой вверх и асимптотически стремится к единице.

Доказательство существования решения системы (36) для  $r$  и  $\sigma^2$  ( $r \geq 0, \sigma^2 > 0$ ) равносильно доказательству существования решения уравнения (39) для переменной  $r$ , так как, используя формулу (37), из найденного решения уравнения (39) для  $r$  мы можем однозначно определить и вторую переменную системы (37) — величину  $\sigma^2$ . Докажем следующую теорему.

**Теорема.** Решение уравнения (39) для  $r \geq 0$  существует.

*Доказательство.* Преобразуем уравнение (39) к виду

$$1 + \frac{r}{(1+r)} \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{\langle x \rangle}{\sqrt{\langle x^2 \rangle}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{(1+r)} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right)}. \quad (40)$$

Введем вспомогательные функции:

$$f_1(r) = 1 + \frac{r}{(1+r)} \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right), \quad (41)$$

$$f_2(r) = \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{(1+r)} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right)}. \quad (42)$$

В выражении (42) для  $f_2(r)$  введен статистический коэффициент  $\alpha$ , определяемый отношением величин, определяемых измеренными моментами райсовской случайной величины:  $\alpha = \langle x \rangle / \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ . Нетрудно убедиться, что для стохастического процесса, подчиняющегося распределению Райса, коэффициент  $\alpha$  удовлетворяет условию:  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \alpha < 1$ . Действительно, из определения дисперсии случайной величины  $x$ :  $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)$  следует, что для любого стохастического процесса, предполагающего, что  $\sigma_x^2 > 0$ , всегда выполняется неравенство  $\overline{x^2} > (\bar{x})^2$ . Из этого неравенства, в свою очередь, следует следующее:  $\sqrt{\overline{x^2}} > (\bar{x})$ , которое означает, что при достаточно большой длине выборки всегда выполняется условие  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} > \langle x \rangle$ , т. е.  $\alpha < 1$ . Разность квадратов  $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  числителя и знаменателя в выражении для  $\alpha$ , как определяющая дисперсию шума, характеризует степень стохастичности процесса, описываемого случайной величиной  $x$ . Очевидно, что по мере уменьшения этой стохастично-

сти, т. е. с увеличением степени детерминированности случайного сигнала  $x$  (а значит, и детерминированности составляющих его компонент  $x_{\text{Re}}$  и  $x_{\text{Im}}$ ), разность между числителем и знаменателем в выражении  $\alpha = \langle x \rangle / \sqrt{\langle x^2 \rangle}$  также уменьшается, что, в свою очередь, означает увеличение коэффициента  $\alpha$  и его приближение к единице в пределе  $\nu / \sigma \gg 1$ . Таким образом, с увеличением отношения сигнала к шуму величина коэффициента  $\alpha = \langle x \rangle / \sqrt{\langle x^2 \rangle}$  растет, асимптотически приближаясь к единице:  $\alpha \xrightarrow{\nu/\sigma \rightarrow \infty} 1$ . Напротив, с уменьшением отношения сигнала к шуму растет стохастичность процесса, характеризуемого случайно величиной  $x$ , т. е. растет величина дисперсии шума, определяемая разностью  $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ . При увеличении данной разности увеличивается и разность между числителем и знаменателем коэффициента  $\alpha = \langle x \rangle / \sqrt{\langle x^2 \rangle}$  что, в силу условия  $\sqrt{\langle x^2 \rangle} > \langle x \rangle$ , означает монотонное уменьшение коэффициента  $\alpha$  по мере уменьшения отношения сигнала к шуму. В предельном случае распределения Рэлея, т. е. при  $\nu = 0$ , выполняются известные для этого распределения соотношения  $\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ,  $\overline{x^2} = 2\sigma^2$ , из которых получаем, что для распределения Рэлея  $\alpha_R = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Принимая во внимание введенные в (41) и (42) обозначения для функций  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$ , уравнение (40) и эквивалентное ему уравнение (39) можно представить в виде  $f_1(r) = f_2(r)$ . Рассмотрим поведение функций  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$  в интересующей нас области  $r \geq 0$ . Из определения этих функций нетрудно видеть, что данные функции являются непрерывными и гладкими при  $r \geq 0$ . Существование решения уравнения (39) означает наличие хотя бы одной точки пересечения кривых, отображающих функции  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$ .

Докажем вспомогательное математическое утверждение о том, что функция  $f_1(r)$  является монотонно возрастающей при  $r \geq 0$ . Для этого найдем производную функции  $f_1(r)$  из (41):

$$\begin{aligned} f_1' &= \frac{1}{(1+r)} \cdot \tilde{I}'\left(\frac{r}{2}\right) + \frac{r}{(1+r)} \cdot \tilde{I}'\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{r}{(1+r)^2} \cdot \tilde{I}'\left(\frac{r}{2}\right) = \\ &= \tilde{I}'\left(\frac{r}{2}\right) \cdot \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{r}{2(1+r)} \tilde{I}'\left(\frac{r}{2}\right) \geq 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Вывод о неотрицательности выражения (43) и тем самым о монотонном возрастании функции  $f_1(r)$  при  $r \geq 0$  с очевидностью следует из свойств функции  $\tilde{I}(z) = I_1(z) / I_0(z)$ : ее положительности и монотонного возрастания, т. е. положительности ее производной.

Рассмотрим область изменения функции  $f_1(r)$  в интересующей нас области  $r \geq 0$ . Нетрудно видеть, что  $f_1(0) = 1$ . Асимптотику функции  $f_1(r)$  при  $r \gg 1$  нетрудно получить из формулы (41), принимая во внимание асимптотическое поведение функции  $\tilde{I}(z)$ :

$\tilde{I}(z) \sim 1 - \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)$ . В результате несложных вычислений получаем

$$f_1(r) \underset{r \gg 1}{\sim} 2 - \frac{2}{r} + \frac{3}{2 \cdot r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right). \quad (44)$$

Таким образом, при изменении аргумента  $r$  от значения  $r = 0$  до  $r \gg 1$  функция  $f_1(r)$  монотонно возрастает от  $f_1(0) = 1$  и асимптотически приближается к  $f_1(\infty) \rightarrow 2$ .

Рассмотрим теперь поведение функции  $f_2(r)$ , определяемой выражением (42), на границах интересующей нас области  $r \geq 0$ . При  $r=0$   $f_2(0) = 2\alpha / \sqrt{\pi}$ . Принимая во внимание, что  $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq \alpha < 1$ , получаем, что  $f_2(0) \geq 1$ , т. е. при  $r=0$  кривая, отображающая функцию  $f_2(r)$ , идет не ниже кривой  $f_1(r)$ . Что касается асимптотики функции  $f_2(r)$ , то, с учетом свойств модифицированной функции Бесселя нулевого порядка, из выражения (42) нетрудно получить, что при  $r \gg 1$   $f_2(r) \sim 2\alpha \cdot \left[ 1 - \frac{3}{4r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right] < 2\alpha < 2$ . Это означает, что асимптотическое значение функции  $f_2(r)$  меньше, чем асимптотическое значение функции  $f_1(r)$ . Другими словами, кривая, отображающая функцию  $f_2(r)$ , в точке  $r=0$  идет выше либо совпадает с  $f_1(r)$ , а в асимптотике, при  $r \gg 1$ , кривая  $f_2(r)$  идет однозначно ниже, чем кривая  $f_1(r)$ . Учитывая это обстоятельство, а также непрерывность функций  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$ , можно сделать однозначный вывод, что соответствующие данным функциям кривые обязательно пересекаются, что означает существование решения уравнения (39) при  $r \geq 0$ . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь некоторые особенности решения уравнения  $f_1(r) = f_2(r)$ .

Когда мы имеем дело с распределением Рэля, то, подставляя соответствующее значение параметра  $\alpha = \sqrt{\pi} / 2$  в выражение (42) для  $f_2(r)$ , получаем уравнение  $f_1(r) = f_2(r)$  в виде

$$1 + \frac{r}{(1+r)} \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{(1+r)} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right)}. \quad (45)$$

Очевидно, что тривиальное решение  $r=0$  удовлетворяет этому уравнению и, напротив, тривиальное решение не может быть решением уравнения (45) в случаях, не соответствующих распределению Рэля, в силу того, что тривиальное решение предполагает  $\alpha = \sqrt{\pi} / 2$ , что соответствует именно распределению Рэля. Таким образом, тривиальное решение для параметра  $r$  при использовании метода ММ12 является решением соответствующего уравнения (39) в том и только в том случае, когда мы имеем дело с распределением Рэля.

В результате решения уравнения (39) для параметра  $r$  в общем случае распределения Райса нетрудно определить искомые параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$ , выразив их через  $r$ , используя (35), (36):

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{\frac{r}{1+r}} \sqrt{\langle x^2 \rangle}, \\ \sigma^2 &= \frac{\langle x^2 \rangle}{2(1+r)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Таким образом, метод ММ12 позволяет на основе решения уравнения (39) для величины  $r$  вычислить искомые параметры сигнала и шума  $\nu$  и  $\sigma^2$ , используя формулы (46).

На рис. 4 представлена графическая иллюстрация доказанной выше теоремы: для различных значений коэффициента  $\alpha$  построены кривые, отображающие функции  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$ : а)  $\alpha = \sqrt{\pi} / 2$ ; б)  $\alpha = 0.95$ ; в)  $\alpha = 0.99$ . Графики иллюстрируют наличие единственной точки пересечения данных кривых во всем диапазоне возможных значений  $\alpha$ , т. е. существование и единственность решения уравнения  $f_1(r) = f_2(r)$  и, следовательно, уравнения (39).



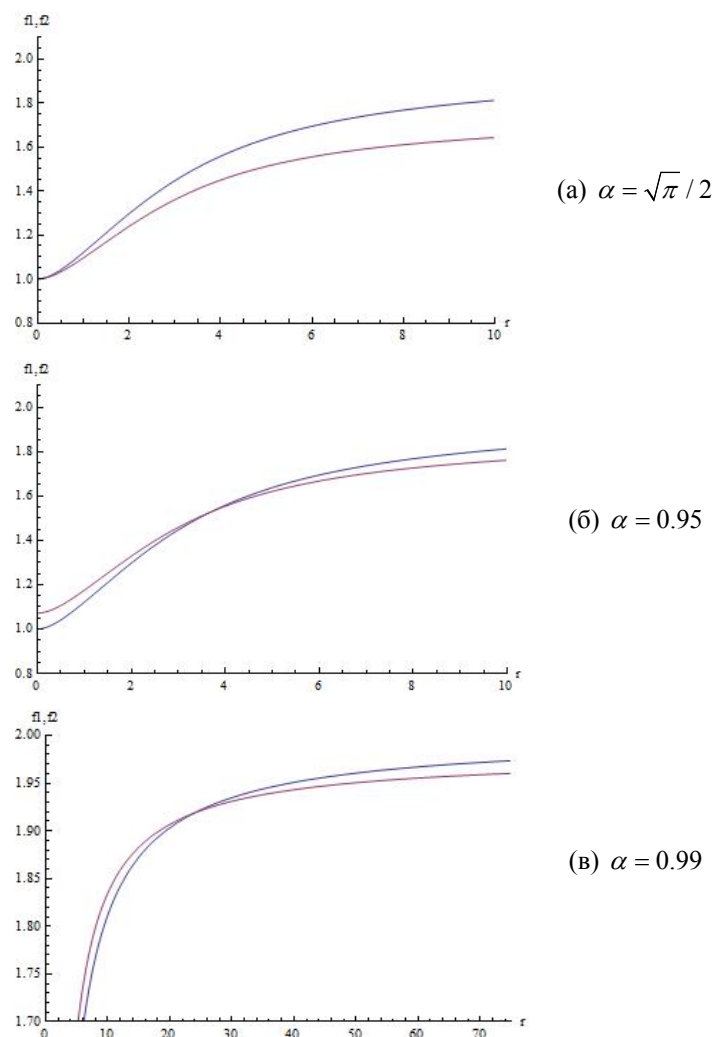


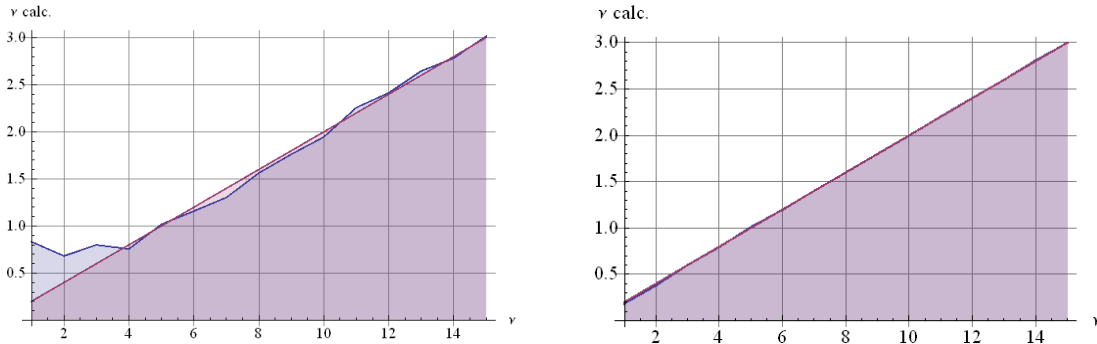
Рис. 4. Графическая иллюстрация наличия единственной точки пересечения кривых  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$  во всем диапазоне возможных значений  $\alpha$

## 6. Результаты численного моделирования вариантов двухпараметрического метода моментов

Обоснованные в работе способы расчета параметров райсовского сигнала на основе двух рассмотренных вариантов метода моментов — ММ24 и ММ12 — были численно промоделированы на компьютере. В данном разделе приведены результаты такого моделирования. Представленные графики иллюстрируют возможность и точность расчета искомых параметров задачи и тем самым возможность восстановления исходного, не искаженного шумом полезного сигнала посредством вариантов двухпараметрического метода моментов: ММ24 и ММ12.

В ходе численного эксперимента генерировались райсовские данные на двумерной сетке, узлы которой соответствуют различным исходно заданным значениям параметров сигнала  $\nu$  и шума  $\sigma$ . По выборкам значений сигнала в каждой точке сетки вычислялись значения искомых параметров на основе разработанных алгоритмов. Рис. 5 и рис. 6 иллюстрируют данные, полученные в результате численного моделирования решения двухпараметрической задачи методом ММ24: представлены графики расчетных данных для параметра  $\nu$  (рис. 5, а, б) и параметра  $\sigma$  (рис. 6, а, б). При этом исходные значения величин обоих параметров  $\nu$  и  $\sigma$  изменя-

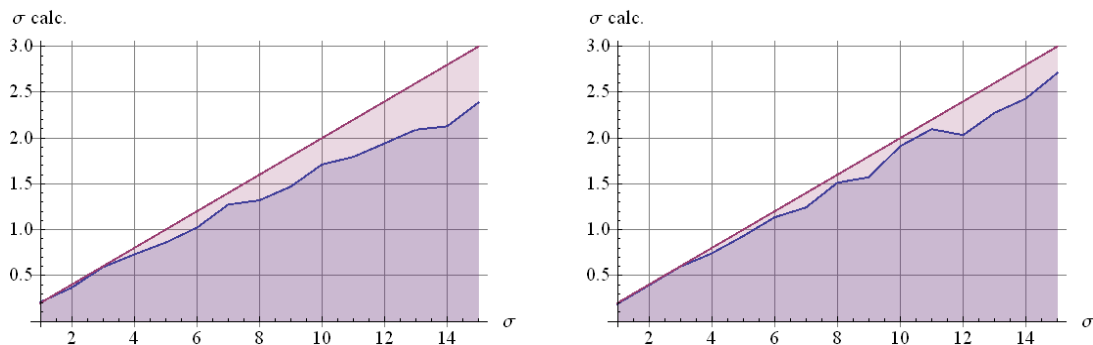
лись в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2 (по оси абсцисс отмечены точки отсчета), длина выборки  $n$  составляла 16, число усреднений по выборкам — 50 (в реальных системах визуализации число усредняемых выборок составляет  $10^3 \sim 10^4$ ).



(а)  $\sigma = 1.2$ ,  $n = 16$ ,  $\nu$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2

(б)  $\sigma = 0.4$ ,  $n = 16$ ,  $\nu$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2

Рис. 5. Графики расчетных данных для параметра  $\nu$ , полученные в результате численного моделирования решения двухпараметрической задачи методом ММ24



(а)  $\nu = 1$ ,  $n = 16$ ,  $\sigma$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2

(б)  $\nu = 3$ ,  $n = 16$ ,  $\sigma$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2

Рис. 6. Графики расчетных данных для параметра  $\sigma$ , полученные в результате численного моделирования решения двухпараметрической задачи методом ММ24

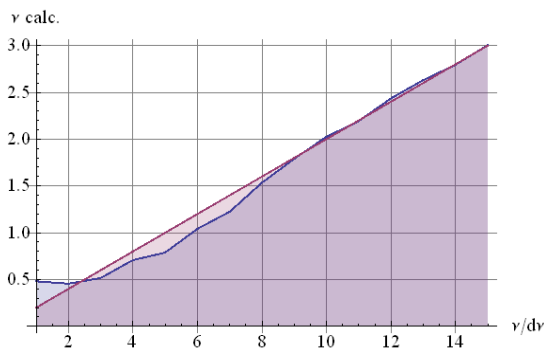
На рис. 5, а и 5, б показаны зависимости отклонений расчетных значений параметра  $\nu$  от исходно заданной величины этого параметра при различных исходных значениях  $\sigma$ . Значения по оси абсцисс соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений  $\nu$ , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра. Отклонения ломаной кривой от прямой линии на обоих графиках характеризуют точность расчетов. Графики на рис. 5, а и 5, б получены для значений  $\sigma = 1.2$  и  $\sigma = 0.4$  соответственно. Представленные графики отображают зависимость точности расчетов по методу ММ24 от значения отношения сигнала к шуму: с ростом  $\nu$  происходит увеличение отношения сигнала к шуму и точность расчетов заметно растет.

На рис. 6, а и 6, б показаны зависимости отклонений расчетных значений параметра  $\sigma$  от реальных, исходно заданных значений этого параметра при различных исходных значениях параметра  $\nu$ . Значения по оси абсцисс соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра  $\sigma$ , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра. Отклонения ломаной кривой от прямой линии на обоих графиках характеризуют точность расчетов. Графики на рис. 6, а и 6, б получены для  $\nu = 1$  и  $\nu = 3$  соответственно, т. е. в каждой точке графика на рис. 6, б отношение сигнала к шуму в три раза больше, чем в соответствующих точках на рис. 6, а. Как и в случае зависимостей, представленных на рис. 5, графики на рис. 6, а, б вырази-

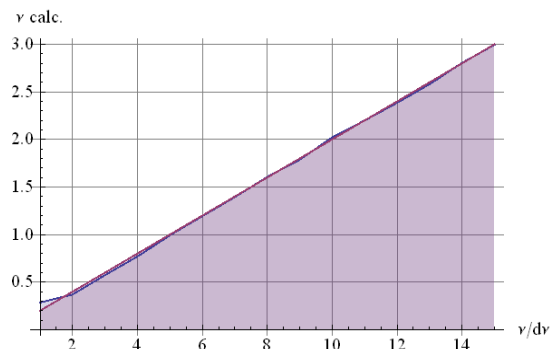
тельно иллюстрируют зависимость точности расчетов по методу ММ24 от значения отношения сигнала к шуму: с ростом параметра  $\sigma$  (при перемещении слева направо вдоль расчетных кривых) происходит снижение отношения сигнала к шуму и точность расчетов заметно падает.

Таким образом, из представленных результатов численного моделирования метода ММ24 (рис. 5, 6) следует ожидаемый вывод: с ростом величины отношения сигнала к шуму точность расчета статистических параметров задачи  $\nu$  и  $\sigma^2$  заметно растет, причем диапазон относительно высокой точности, обеспечиваемой методом ММ24, определяется условием  $\frac{\nu}{\sigma} \geq 1.5 \div 2$ .

Рис. 7, 8 иллюстрируют аналогичные результаты, полученные в результате численного моделирования решения двухпараметрической задачи методом ММ12 при тех же условиях численного эксперимента, которым соответствуют графики на рис. 5, 6 для метода ММ24.

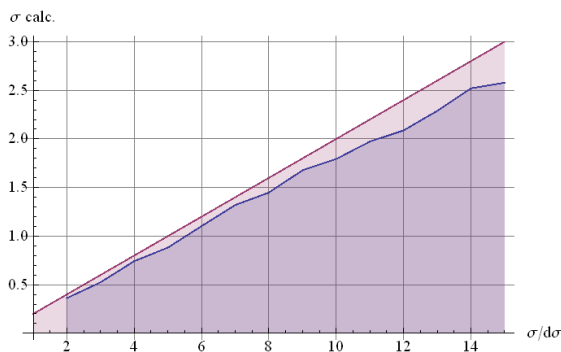


(а)  $\sigma = 1.2$ ,  $n = 16$ ,  $\nu$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2

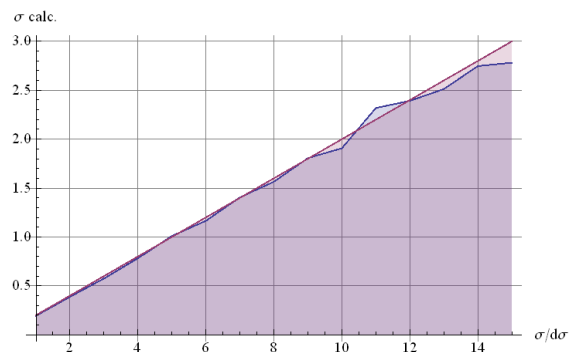


(б)  $\sigma = 0.4$ ,  $n = 16$ ,  $\nu$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2

Рис. 7. Графики расчетных данных для параметра  $\nu$ , полученные в результате численного моделирования решения двухпараметрической задачи методом ММ12



(а)  $\nu = 1$ ,  $n = 16$ ,  $\sigma$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2



(б)  $\nu = 3$ ,  $n = 16$ ,  $\sigma$  изменяется в диапазоне от 0.2 до 3.0 с шагом 0.2

Рис. 8. Графики расчетных данных для параметра  $\sigma$ , полученные в результате численного моделирования решения двухпараметрической задачи методом ММ12

Графики на рис. 7 и 8 иллюстрируют существенную зависимость точности расчетов по методу ММ12 от величины отношения сигнала к шуму.

Таким образом, представленные результаты численного решения двухпараметрической задачи посредством обоих развитых вариантов метода моментов — ММ24 (рис. 5, 6) и ММ12 (рис. 7, 8) — иллюстрируют возможность вычисления искомых статистических параметров  $\nu$

и  $\sigma^2$  на основе данных выборок измерений с достаточно высокой точностью, причем для обоих методов диапазон относительно высокой точности определяется условием  $\frac{V}{\sigma} \geq 1.5 \div 2$ .

Важной характеристикой метода, наряду с проанализированной выше величиной смещения измеряемого параметра, является характерная величина среднеквадратичного отклонения, т. е. разброс расчетных данных. Эти характеристики, проанализированные в работах [Yakovleva, Kulberg, 2013; Яковлева, Кульберг, 2014], подтверждают вывод об эффективности развитых в работе методов решения задачи двухпараметрического анализа райсовских данных.

## 7. Заключение

В работе строго математически обоснованы методы расчета параметров сигнала и шума при анализе данных в условиях распределения Райса: метод максимума правдоподобия и варианты метода моментов. Представлены доказательства существования и единственности решений соответствующих задач. Данная задача является значимой при решении проблем обработки случайных сигналов на основе анализа их огибающей. Решение двухпараметрической задачи обеспечивает значительно больше возможностей по сравнению с традиционным однопараметрическим приближением, так как оно основывается исключительно на данных измерений и не связано с априорными предположениями относительно величины шума, которые неизбежно ограничивают точность однопараметрического приближения.

Обоснованные методы двухпараметрического анализа райсовских данных представляют собой эффективный инструмент в решении задач обработки изображений и извлечения данных из изображений, подавления шумов для всех типов изображений, обрабатываемых на основе анализа огибающей (или амплитуды) сигнала, формирующего изучаемое изображение.

В результате проведенного математического анализа рассмотренных методов анализа райсовских данных получен важный для практики результат: решение двухпараметрической задачи может быть сведено к решению уравнения с одной переменной и, следовательно, не приводит к увеличению объема вычислений по сравнению с однопараметрическим приближением. Теоретические выводы подтверждаются результатами численных экспериментов.

## Список литературы (References)

- Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.  
*Abramowitz M., Stegun I. A.* (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Applied Mathematics Series 55. Washington D.C., USA; New York, USA: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964 (Russ. ed.: *Abramovic M., Stigan I.* Spravochnik po special'nym funkciyam. — М.: Nauka, 1979).
- Яковлева Т. В.* Обзор методов обработки магнитно-резонансных изображений и развитие нового двухпараметрического метода моментов // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 231–244.  
*Yakovleva T. V.* Obzor metodov obrabotki magnitno-rezonansnyx izobrazhenij i razvitie novogo dvuxparametricheskogo metoda momentov [Review of MRI processing techniques and elaboration of a new two-parameter method of moments] // Computer Research and Modeling. — 2014. — Vol. 6, No. 2. — P. 231–244 (in Russian).
- Яковлева Т. В., Кульберг Н. С.* Методы математической статистики в решении задачи двухпараметрического анализа райсовского сигнала // Доклады Академии наук Сер. Математика. — 2014. — Т. 459, № 1. — С. 27–31.  
*Yakovleva T. V., Kulberg N. S.* Methods of mathematical statistics in two-parameter analysis of Rician signals // Doklady Mathematics. — 2014. — Vol. 90, Issue 3. — P. 675–679 (Original Russian paper: *Yakovleva T. V., Kul'berg N. S.* Metody matematicheskoy statistiki v reshenii zadachi dvuxparametricheskogo analiza rajsovskogo signala // Doklady Akademii nauk. Ser. Matematika. — 2014. — Vol. 459, No. 1. — P. 27–31).
- Benedict T. R., Soong T. T.* The joint estimation of signal and noise from the sum envelope // IEEE Trans. Inf. Theory. — Jul. 1967. — Vol. IT-13, No. 3. — P. 447–454.
- Caroppi C. F. M., Cati M.* The absolute maximum of the likelihood function of the Rice distribution: existence and uniqueness // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. — April 2008. — Vol. 57, No. 4. — P. 682–689.

- 
- Park J. H., Jr.* Moments of generalized Rayleigh distribution // Q. Appl. Math. — 1961. — Vol. 19, No. 1. — P. 45–49.
- Rice S. O.* Mathematical Analysis of Random Noise // Bell System Technical Journal. — 1945. — Vol. 24. — P. 46–156.
- Sijbers J., den Dekker A. J., Scheunders P., Dyck D. V.* Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters // IEEE Transactions on Medical Imaging. — June 1998. — Vol. 17, No. 3. — P. 357–361.
- Yakovleva T. V., Kulberg N. S.* Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // American Journal of Theoretical and Applied Statistics. — 2013. — Vol. 2, No. 3. — P. 67–79.