

УДК: 519.8

## Построение адаптивной сетки в окрестности «угловой точки» ферромагнетика в численном моделировании магнитной системы

Е. Е. Перепёлкин<sup>а</sup>, Л. А. Нянина, Р. В. Полякова<sup>б</sup>,  
П. Н. Сысоев, В. А. Панасик, И. П. Юдин<sup>с</sup>

Объединенный Институт Ядерных Исследований,  
Россия, 141980, Московская область, г. Дубна, ул. Жолио-Кюри, д. 6

E-mail: <sup>а</sup>pevgeny@mail.ru; <sup>б</sup>polykovarv@mail.ru; <sup>с</sup>yudin@jinr.ru

Получено 28 января 2015 г.,  
после доработки 9 июля 2015 г.

При численном решении краевой задачи магнитостатики в области с негладкой границей возникает вопрос о точности получаемого решения в окрестности угловой точки ферромагнетика [Zhidkov, Perepelkin, 2001]. В окрестности «угловой точки» возможен существенный рост модуля магнитного поля, что приводит к необходимости построения специальных численных алгоритмов при решении краевой задачи. В данной работе предложен алгоритм построения адаптивной сетки в окрестности угловой точки ферромагнетика, учитывающий характер поведения решения краевой задачи. Приводится пример расчета модельной задачи в области, содержащей угловую точку.

Ключевые слова: магнитные системы, математическое моделирование, краевая задача, эллиптические уравнения, поведение решения в угловой точке

## Construction of adaptive mesh in the domain with boundary «corner point» of ferromagnetic in the numerical simulation of magnetic systems

E. E. Perepelkin, L. A. Nyanina, R. V. Polyakova, P. N. Sysoev, V. A. Panasik, I. P. Yudin

Joint Institute for Nuclear Research, 6 Joliot-Curie st., Dubna, 141980, Russia

**Abstract.** — At numerical solving of the boundary-value problem of magnetostatic in a domain with a boundary corner point, a question of accuracy of the obtained solution near the corner point of ferromagnetic arises [Zhidkov, Perepelkin, 2001]. Near the corner point an essential growth of the module of the magnetic field can take place, which leads to the necessity of constructing special numerical algorithms when solving the boundary-value problem. This work represents an algorithm of constructing an adaptive mesh in the domain with a boundary corner point of ferromagnetic taking into account the character of behaviour of the solution of the boundary-value problem. An example of calculating a model problem in the domain containing a corner point is given.

Keywords: magnet systems, mathematical modeling, boundary value problem, elliptic equations, the behavior of solutions in the corner domain

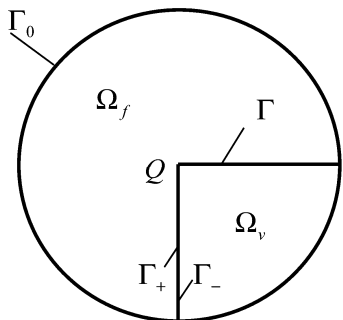
Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 89–99 (Russian).

## Введение

Во многих физических установках используются магнитные системы различной конфигурации. Примером могут служить спектрометрические магниты. С практической точки зрения очень важно с хорошей точностью знать распределение магнитного поля, создаваемого такой системой. Реально проблема сводится к постановке задачи магнитостатики о нахождении распределения магнитного поля рассматриваемой магнитной системы. Из-за сложной конфигурации магнитной системы решение задачи обычно ищется численными методами. Очень часто при расчете конкретной магнитной системы область, в которой решается краевая задача, имеет кусочно-гладкую границу. В таких случаях решение задачи или производные решения могут иметь особенность. Поэтому необходимо использовать специальные методы при численном поиске решения.

## Краевая задача магнитостатики в «областях с углами»

Рассматривается случай при расчете конкретной магнитной системы, когда область, в которой решается краевая задача, имеет всюду гладкую границу, за исключением конечного числа угловых точек, в окрестности которых граница образована пересечением двух гладких кривых, поэтому решение задачи или производные решения могут иметь особенность. Приведена постановка краевой задачи для области (фрагмент такой области показан на рис. 1) с «угловой точкой»:



$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} [\mu(|\nabla u|) \nabla u(s)] = 0, \quad s \in \Omega_f, \\ \Delta u(s) = 0, \quad p \in \Omega_v, \\ u|_{\Gamma_+} = u|_{\Gamma_-}, \\ \mu \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, \\ u|_{\Gamma_0} = \Psi, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Рис. 1. Область с «угловой точкой»

где  $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_v \cup \Gamma$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_v, \Omega_f$  — области вакуума и ферромагнетика соответственно;  $\Gamma_0$  — граница  $\Omega$ ; обозначения  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  соответствуют границе  $\Gamma$ ;  $\mu(H)$  — магнитная проницаемость ферромагнетика. Функция  $\Psi$  «достаточно» гладкая. Относительно функции  $\mu(H)$  считаются выполненными следующие условия:

$$\mu \in C^{(1)}[0, +\infty), \quad \lim_{H \rightarrow +\infty} \mu'(H)H = 0, \quad \lim_{H \rightarrow +\infty} \mu(H) = 1.$$

Вопрос о существовании особенности у решений линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа в «областях с углами» был рассмотрен, например, в работе [Назаров, Пламеневский, 1991]. В данной работе изучение поведения магнитного поля в окрестности угловой точки  $Q$  было сведено к рассмотрению краевой задачи в области  $\Omega$  (рис. 1). Таким образом, необходимо исследовать поведение функции  $u(s)$ , являющейся решением краевой задачи (1.1). Так же рассматривается случай, когда на рис. 1 области  $\Omega_f$  и  $\Omega_v$  меняются местами. В работе [Жидков, Перепелкин, 2000] рассмотрен квазилинейный случай краевой

задачи (1.1), когда функция  $\mu(H)$  заменена функцией  $\bar{\mu}(H)$ , удовлетворяющей условиям:

$$\bar{\mu}(H) \in C^{(1)}[0, +\infty), \exists H_0 > 0 \quad \forall H' \geq H_0: \bar{\mu}(H') = 1,$$

где  $H_0$  — «достаточно велико», а в «угловой точке»  $Q$  функция  $\bar{\mu}$  определена однозначно. Введением полярной системы координат  $(r, \varphi)$  с центром в точке  $Q$  краевая задача (1.1) будет такой:

$$\begin{cases} \operatorname{div} [\bar{\mu}(|\nabla u_2(s)|) \nabla u_2(s)] = 0, & s \in \Omega_f, \Delta u_1(s) = 0, & s \in \Omega_v, \\ u_1|_{\Gamma_-} = u_2|_{\Gamma_+}, \bar{\mu}(|\nabla u_2(s)|) \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, & u_1|_{\Gamma_1} = \Psi_1; \quad u_2|_{\Gamma_2} = \Psi_2, \end{cases} \quad (1.2)$$

Функция  $\Psi$  предполагается «достаточно» гладкой. В этом случае доказывается существование ограниченного решения краевой задачи (1.2).

**Теорема.**  $\exists K > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad 0 < \rho(s, Q) < \delta : |\nabla u(s)| < K$ , где  $\rho(s, Q)$  — расстояние между точками  $s$  и  $Q$ , а под ограниченностью на  $\Gamma$  понимается ограниченность на  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$ .

*Доказательство* теоремы и исследование решений для квазилинейного случая приводится в работе [Назаров, Пламеневский, 1991]. В работе [Шайдуров, 1982] дается исследование нелинейного дифференциального уравнения дивергентного типа краевой задачи (1)  $\operatorname{div} [\mu(|\nabla u|) \nabla u] = 0$  на наличие у него решений с неограниченным  $|\nabla u|$ . С помощью нелинейного преобразования Лежандра это уравнение удастся свести к линейному дифференциальному уравнению второго порядка.

### Оценка роста магнитного поля в окрестности «угловой точки»

Покажем, что в окрестности угловой точки ферромагнетика магнитное поле удовлетворяет условию

$$H(s) \leq C_0 \ln \frac{1}{r_s} + w(s), \quad (1.3)$$

где  $C_0$  — постоянная величина,  $w(s)$  — ограниченная функция,  $r_s$  — расстояние до «угловой точки». Исходя из интегральной постановки задачи магнитостатики, магнитное поле представимо в виде

$$\vec{H}(s) = \vec{H}_C(s) - \nabla_s \int_{\Omega_f} (\vec{M}(p), \nabla_p \Psi(s, p)) dv_p, \quad (1.4)$$

где  $\vec{H}_C$  — поле от источников с током;  $\vec{M}$  — вектор намагниченности ферромагнетика; функция  $\Psi(s, p)$  равна  $\frac{1}{4\pi r_{sp}}$  или  $\frac{1}{2\pi} \ln r_{sp}$  соответственно для 3-х мерного и 2-х мерного случая;  $\Omega_f$  — область ферромагнетика. Вектор намагниченности  $\vec{M} = \mu_0 \chi(H) \vec{H} = \mu_0 (\mu(H) - 1) \vec{H}$ , где  $\mu_0$  — постоянная величина,  $\chi(H)$  — магнитная восприимчивость, а  $\mu(H)$  — магнитная проницаемость ферромагнетика. При больших полях ( $H \rightarrow \infty$ ) для  $\mu(H)$  справедливо представление  $\mu(H) = 1 + \frac{A}{H} - \frac{B}{H^2}$  при  $H \rightarrow \infty$ , где  $A, B$  —

постоянные величины. Следовательно, при  $H \rightarrow \infty$  величина  $M = |\vec{M}|$  ограничена некоторой константой  $M_0 = \mu_0 A$ . Рассмотрим 2-мерный случай. Из (4) получим:

$\vec{H}(s) = \vec{H}_c(s) - \frac{1}{2\pi} \nabla_s \int_{\Omega_f} \left( \vec{M}(p), \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}^2} \right) dv_p$ . Здесь первое слагаемое ограничено, поэтому оценим второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \left| \nabla_s \int_{\Omega_f} \left( \vec{M}(p), \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}^2} \right) dv_p \right| &\leq \left| \int_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{M^{(x)}(p)(x_p - x_s) + M^{(y)}(p)(y_p - y_s)}{(x_p - x_s)^2 + (y_p - y_s)^2} dv_p \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial y_s} \frac{M^{(x)}(p)(x_p - x_s) + M^{(y)}(p)(y_p - y_s)}{(x_p - x_s)^2 + (y_p - y_s)^2} dv_p \right| = \\ &= \left| \int_{\Omega_f} \frac{M^{(x)}(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + 2M^{(y)}\bar{x}\bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} dv_p \right| + \left| \int_{\Omega_f} \frac{M^{(y)}(\bar{y}^2 - \bar{x}^2) + 2M^{(x)}\bar{x}\bar{y}}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2} dv_p \right| \leq \\ &\leq 2 \int_{\Omega_f} \frac{2r_{sp}^2 |M^{(x)}| + 2r_{sp}^2 |M^{(y)}|}{r_{sp}^4} dv_p \leq 8M_0 \int_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p, \end{aligned}$$

где  $\bar{x} = x_p - x_s$ ,  $\bar{y} = y_p - y_s$ .

Вычислим интеграл  $\int_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p$ :

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p = \int_{v_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p + \int_{\Omega_f \setminus v_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p,$$

где  $v_\delta = \Omega_f \cap S_\delta(Q)$  есть угловой сектор в точке  $Q$ , изображенный на рис. 2.

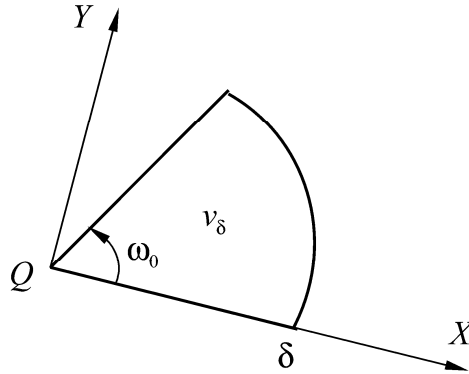


Рис. 2. Угловой сектор в точке  $Q$

Интеграл по области  $\Omega_f \setminus v_\delta$  будет ограничен, поэтому рассмотрим только интеграл по области  $v_\delta$ :

$$\int_{v_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p = \int_0^{\omega_0} d\varphi_p \int_0^\delta \frac{r_p dr_p}{r_p^2 + r_s^2 - 2r_p r_s \cos \varphi_{sp}} = \int_0^{\omega_0} d\varphi_p \left( \int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2-2t \cos \varphi_{sp}} + \int_1^{\delta/r_s} \frac{tdt}{1+t^2-2t \cos \varphi_{sp}} \right),$$

где  $t = \frac{r_p}{r_s}$ , далее воспользуемся выражением для производящей функции

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\varphi_{sp}}} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} P_m(\cos\varphi_{sp}) t^m, & |t| < 1, \\ \sum_{m=0}^{+\infty} P_m(\cos\varphi_{sp}) t^{-m-1}, & |t| > 1, \end{cases}$$

в результате получим

$$\begin{aligned} \int_{v_s} \frac{1}{r_s^2} d\nu_p &= \int_0^{\omega_0} d\varphi_p \left( \int_0^1 t dt \sum_{m,k=0}^{+\infty} P_m P_k t^{k+m} + \int_1^{\delta/r_s} t dt \sum_{m,k=0}^{+\infty} P_m P_k t^{-(k+m+2)} \right) = \\ &= \int_0^{\omega_0} d\varphi_p \left( \sum_{m,k=0}^{+\infty} P_m P_k \frac{t^{k+m+2}}{k+m+2} \Big|_0^1 + \sum_{m+k \neq 0}^{+\infty} P_m P_k \frac{t^{-(k+m)}}{-(k+m)} \Big|_1^{\delta/r_s} \right) + \int_0^{\omega_0} d\varphi_p P_0^2 \ln t \Big|_1^{\delta/r_s} = \\ &= \omega_0 \ln \frac{\delta}{r_s} + \sum_{m,k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{m,k}}{m+k+2} + \sum_{m+k \neq 0}^{+\infty} \frac{\alpha_{m,k}}{m+k} \left( \left( \frac{r_s}{\delta} \right)^{m+k} - 1 \right) = C_1 \ln \frac{1}{r_s} + w_1(s), \end{aligned}$$

где  $\alpha_{m,k} = \int_0^{\omega_0} P_m(\cos\varphi_{sp}) P_k(\cos\varphi_{sp}) d\varphi_p$ ,  $C_1$  — постоянная величина,  $w_1(s)$  — ограниченная функция. Таким образом, установлена справедливость выражения (1.3).

### Метод сгущения сетки в окрестности угловой точки

В работах [Шайдуров, 1982; Марчук, Шайдуров, 1979] приведены примеры построения разностной сетки для некоторых краевых задач в областях с «угловой точкой». Основная идея состоит в сгущении разностной сетки или конечных элементов с тем, чтобы сделать приемлемой погрешность аппроксимации задачи. Эта погрешность складывается из интегралов по элементарным областям, которые оцениваются величинами вида  $Ch_i^\beta \|u\|_{k,i}$ , где  $h_i$  — диаметр  $i$ -й элементарной области или ячейки сетки,  $\beta$  — положительное число,  $\|u\|_{k,i}$  — норма функции на этой области, содержащая  $k$ -ю производную, а  $C$  — константа, независимая от этих множителей. Тогда можно, например, потребовать, чтобы величины  $Ch_i^\beta \|u\|_{k,i}$  оказались одинаковыми в рассматриваемой области. С этой целью можно уменьшать  $h_i^\beta$  обратно пропорционально величинам  $\|u\|_{k,i}$  при подходе к особым точкам. Справедливо следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть  $\vec{V}(s)$  — решение задачи магнитостатики в интегральной постановке, найденное численным методом, а  $\vec{H}(s)$  — точное решение. Тогда справедлива оценка

$$\|\vec{V} - \vec{H}\|_{L_2(D)}^2 < \gamma h^2 (\ln^2 h - \alpha \ln h - \beta) + O(h^4), \quad (1.5)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — постоянные величины,  $h$  — диаметр области  $D$ , являющейся ячейкой разностной сетки, содержащей «угловую точку» ферромагнетика.

*Доказательство.* В силу (1.4) для  $\vec{V}(s)$  справедливо выражение

$$\vec{V}(s) = \vec{H}_C(s) - \frac{1}{2\pi} \nabla_s \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} \left( \vec{M}(\vec{H}_j), \frac{\vec{r}_{sp_j}}{r_{sp_j}^2} \right) dv, \quad (1.6)$$

где  $\vec{H}_j$ ,  $j=1\dots N$ , — значение поля в ячейке  $\Omega_j$ ,  $\bigcup_{j=1}^N \Omega_j = \Omega_f$ .  $r_{sp_j}$  — расстояние между точкой  $s$  до точки  $p_j \in \Omega_j$ . Рассмотрим разницу  $\vec{V}(s) - \vec{H}(s)$

$$\vec{V}(s) - \vec{H}(s) = -\frac{1}{2\pi} \nabla_s \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} \left( \vec{M}(\vec{H}_j) - \vec{M}(\vec{H}(p_j)) \right) \frac{\vec{r}_{sp_j}}{r_{sp_j}^2} dv.$$

В силу ограниченности величины  $|\vec{M}| < M_0$  следует  $|\vec{M}(\vec{H}_j) - \vec{M}(\vec{H}(p_j))| < 2M_0$  для  $j=1\dots N$ . Таким образом, получим

$$|\vec{V}(s) - \vec{H}(s)| < \frac{8M_0}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j} \frac{dv}{r_{sp_j}^2} = \frac{8M_0}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j \cap S_\delta(Q)} \frac{dv}{r_{sp_j}^2} + \frac{8M_0}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j \setminus S_\delta(Q)} \frac{dv}{r_{sp_j}^2}.$$

В результате, используя оценку, полученную в предыдущем пункте, находим

$$|\vec{V}(s) - \vec{H}(s)| < C_2 \ln \frac{1}{r_s} + w_2(s). \quad (1.7)$$

Теперь остается оценить  $\|\vec{V} - \vec{H}\|_{L_2(D)}^2$ , где область  $D$  является  $S_\delta(Q) - \delta$ -окрестностью точки  $Q$ . Используя (7), получаем

$$\|\vec{V} - \vec{H}\|_{L_2(D)}^2 = \int_D |\vec{V}(s) - \vec{H}(s)|^2 dv < \gamma h^2 (\ln^2 h - \alpha \ln h - \beta) + O(h^4),$$

где  $h = 2\delta$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  — постоянные значения. Полученный результат соответствует (1.5).

Исходя из неравенства (1.5), был предложен следующий метод сгущения разностной сетки;

$$\int_0^{h_m} \left| \ln \frac{1}{x} \right|^2 dx = d_0, \quad \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left| \ln \frac{1}{x} \right|^2 dx = d_0, \quad x_m - x_{m-1} = h_m, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь  $d_0$  — постоянная величина,  $M$  — число разбиений в окрестности угловой точки,  $h_m$  — шаг сетки,  $x_m$  — координата узла сетки вдоль оси  $OX$  или  $OY$ ; значение  $|x| < 1$

### **Расчет магнитного поля в окрестности «угловой точки»**

В предыдущих разделах работы была приведена верхняя оценка допустимого роста магнитного поля в окрестности угловой точки ферромагнетика для двумерной области. Однако такую оценку возможно использовать и для трехмерных областей, для которых в поперечном сечении имеется конфигурация, изображенная на рис. 2, а в продольном направлении поле слабо меняется. Такие магнитные системы в ускорительной технике иногда называют магнитами с цилиндрической симметрией. Для таких систем поле внутри магнита с хорошей точностью можно находить путем решения двумерной постановки задачи магнитостатики относительно векторного потенциала, используя полученную оценку (1.5).

Исходя из сделанной оценки, был предложен метод сгущения разностной сетки в окрестности «угловой точки». В этом параграфе приведены результаты численного расчета магнитной системы с использованием такого метода. Из расчетов видно, что описанный метод сгущения сетки дает существенное улучшение точности вычисляемого распределения магнитного поля. Рассматривалась магнитная система, изображенная на рис. 3. Область  $\Omega_v$  соответствует вакууму, а область  $\Omega_f$  заполнена ферромагнетиком. Линейные размеры системы

указаны в таблице 1. В рассматриваемой области решалась следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0, & p \in \Omega_f \cup \Omega_v, \quad A_z|_{\Gamma_-} = A_z|_{\Gamma_+}, \\ \nu \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, \quad A_z|_{x=0} = C, \quad A_z|_{x=x_2} = -C, \quad \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{y=0, y_1} = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

соответствующая постановке задачи магнитостатики относительно векторного потенциала  $A_z$ . Функция  $\nu = 1/\mu(B)$ , где  $\mu(B)$  — магнитная проницаемость ферромагнетика,  $B$  — модуль вектора магнитной индукции  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ,  $\Gamma_{\pm}$  — граница раздела сред,  $C$  — постоянная величина. Точка  $Q$  на рис. 3 является «угловой точкой» с координатами  $(x_1, y_1)$ . На рис. 4 пунктирной линией изображена окрестность  $\Pi_Q$  «угловой точки»  $Q(x_1, y_1)$ . Величина  $\Delta x = \Delta y = 0.2$  м. Для оценки эффективности описанного метода сгущения разностной сетки проводились следующие вычисления.

**1 вариант.** Находилась решение задачи (1.8) на последовательности сеток  $(10k) \times (10k)$ , где  $k = 1, 2, 4, 8, 10, 20, 40$ , т. е. получались сетки  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ , ...,  $400 \times 400$ . При этом в окрестности угловой точки  $\Pi_Q$  шаг сетки был равномерный.

**2 вариант.** Задача (1.8) рассчитывалась на той же последовательности сеток при  $k = 1, 2, 4, 8$ , только в области  $\Pi_Q$  шаг сетки выбирался согласно описанному методу сгущения разностной сетки. В остальной области, по сравнению с предыдущим вариантом, шаг разностной сетки не изменялся. Количество узловых точек в области  $\Pi_Q$  оставалось прежним, менялось только их распределение. На рис. 5 изображен приблизительный вид сетки в окрестности «угловой точки»  $Q$ .

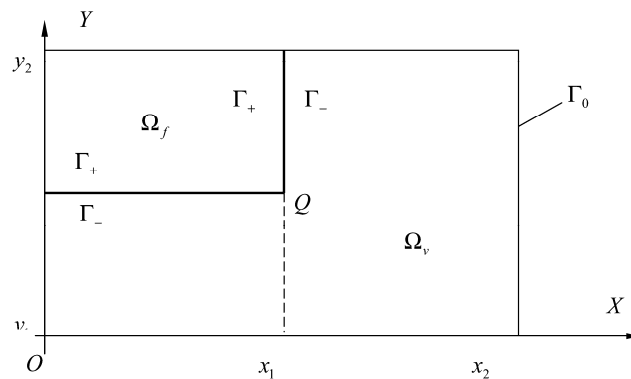


Рис. 3. Магнитная система

Результаты, полученные из вычислений по первому варианту, считались как бы «эталонными», так как при увеличении числа разбиений («в разумных пределах») «логично предположить», что точность вычисляемого решения должна увеличиваться, за исключением, возможно, некоторой окрестности «угловой точки». Поэтому логично было сравнить результаты, полученные при вычислении по второму варианту, с результатами, полученными по первому варианту. На рис. 6 представлены распределения  $B_y(x)$  при  $y = y_1$  для различных сеток. На всех рисунках «эталонное» распределение  $B_y(x)$ , посчитанное на сетке  $400 \times 400$ , обозначено *trace 1*. Графики, обозначенные *trace 2* и *trace 3*, — это распределения  $B_y(x)$ , посчитанные по первому и по второму варианту соответственно.

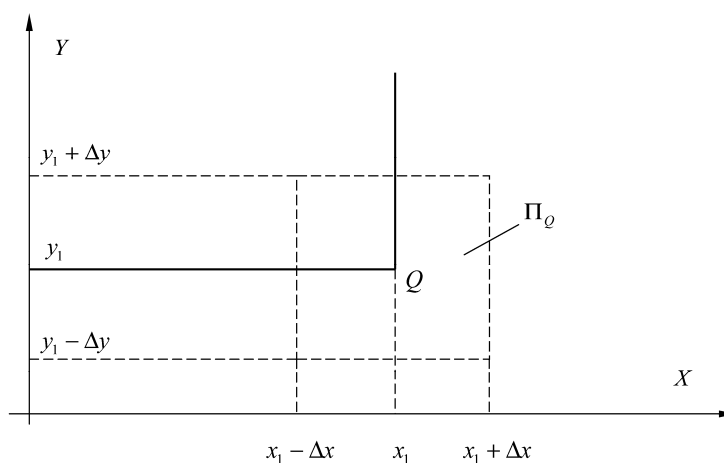
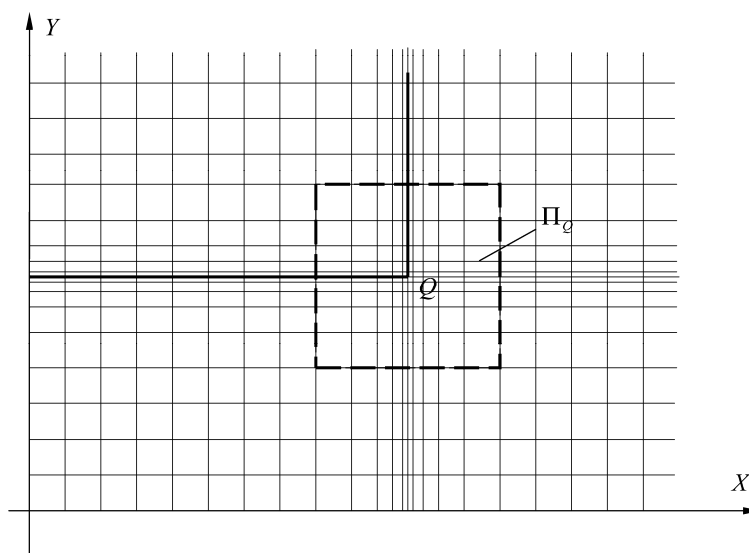
Рис. 4. Окрестность  $\Pi_Q$  «угловой точки»Рис. 5. Сетка в окрестности «угловой точки»  $Q$ 

Таблица 1

$x_1$ , м	$x_2$ , м	$y_1$ , м	$y_2$ , м
0,5	1,0	0,5	1,0

На рис. 6, а показаны распределения, вычисленные на сетке  $10 \times 10$ , на рис. 6, б — на сетке  $20 \times 20$ , на рис. 6, в — на сетке  $40 \times 40$ , на рис. 6, г — на сетке  $80 \times 80$ . Сравнительная таблица 2 содержит значения поля в трех точках:  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(x_1,0)$  и  $Q(x_1,y_1)$ . Из таблицы 2 и графиков, приведенных на рис. 6, видно, что точность расчетов по второму варианту (неравномерная сетка) существенно выше аналогичных расчетов по первому варианту (равномерная сетка). Из чего можно заключить, что предложенный метод построения разностной сетки в окрестности «угловой точки» оправдывает свое использование и дает результаты по точности, сравнимые с результатами, получаемыми лишь на сетках с числом узлов, большим в 4–5 раз по каждой оси, чем исходная сетка.



Таблица 2

Равномерная сетка в области $\Pi_Q$			
Сетка	$B_y(P_1)$ , Тл	$B_y(P_2)$ , Тл	$B_y(Q)$ , Тл
10×10	2,274	2,074	2,902
20×20	2,248	2,038	3,126
40×40	2,237	2,024	3,374
80×80	2,231	2,018	3,645
100×100	2,23	2,017	3,738
200×200	2,206	2,014	4,045
400×400	2,158	2,012	4,358
Неравномерная сетка в области $\Pi_Q$			
Сетка	$B_y(P_1)$ , Тл	$B_y(P_2)$ , Тл	$B_y(Q)$ , Тл
10×10	2,266	2,038	3,133
20×20	2,241	2,02	3,604
40×40	2,233	2,015	4,061
80×80	2,229	2,013	4,527

### Моделирование магнитной системы СП-94

В эксперименте ЛФВЭ ОИЯИ используется магнит СП-94 [Жидков, Перепелкин и др., 2002]. На рис. 7, а приведено сечение сердечника магнита в плоскости  $XOY$ . Для такого магнита требовалось подобрать конфигурацию сердечника и обмоток с током таким образом,

чтобы величина  $\int_{-\infty}^{+\infty} B_y(0,0,z)dz$  имела максимальное значение. Первоначально была рассчитана исходная конфигурация. На рис. 8, а приведено распределение  $B_y$  в плоскости  $XOZ$  для этой

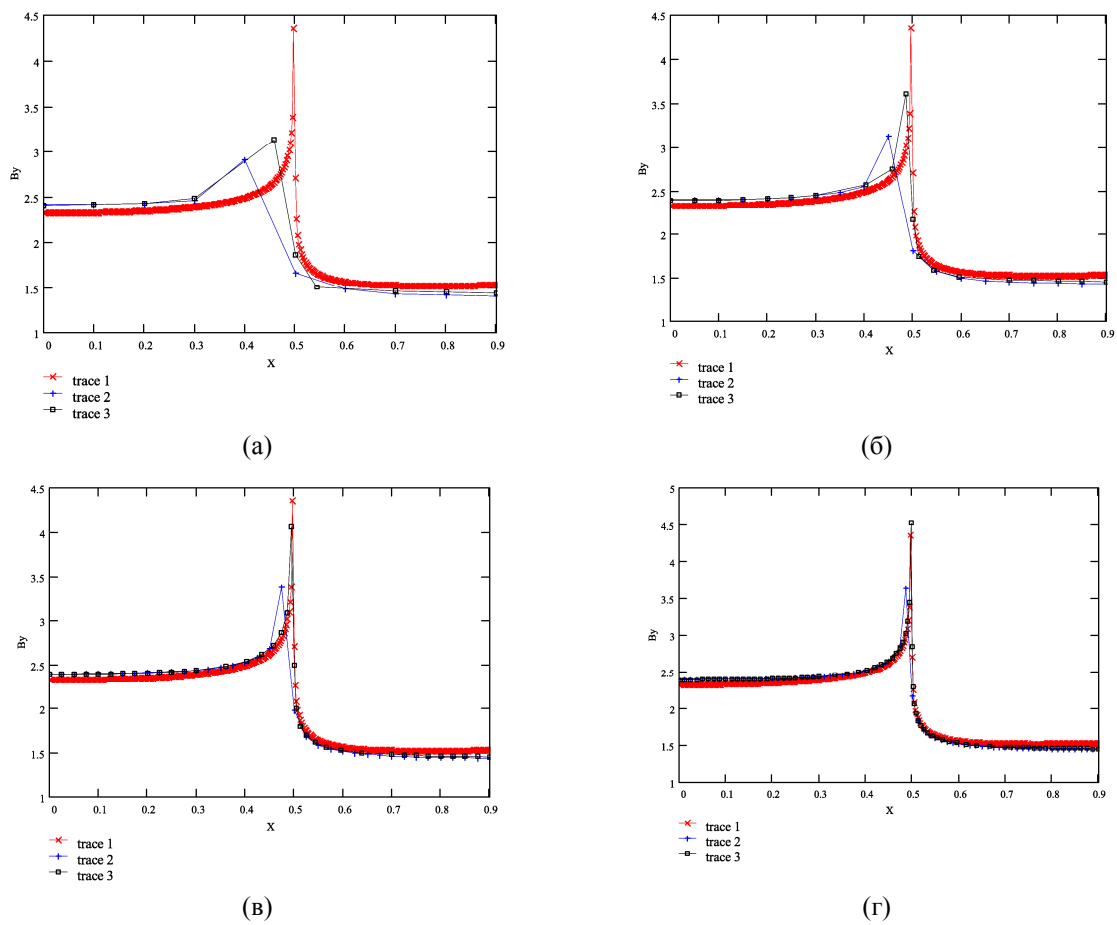
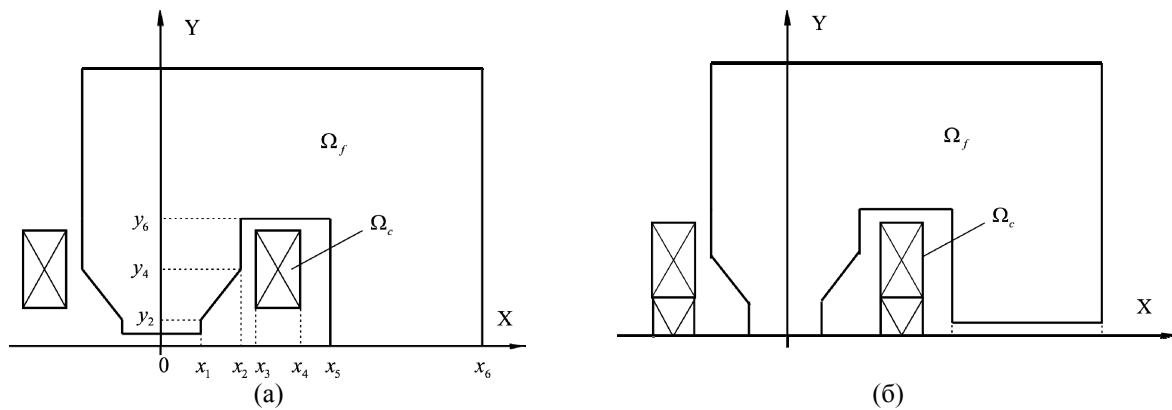
конфигурации. Величина  $\int_{-L}^L B_y(0,0,z)dz = 2,3$ , где  $L = 1,5$  м — размер вдоль оси  $OZ$  области, в которой производился расчет магнитного поля. Далее была рассчитана конфигурация, в которой  $y_1 = 0,045$  м, остальные размеры не изменялись. На рис. 8, б приведено распределение  $B_y$

в плоскости  $XOZ$ . Величина  $\int_{-L}^L B_y(0,0,z)dz = 2,5$ . Были также проведены расчеты для

различных размеров полюса магнита путем сужения его до 20 см. Расчеты показали, что существенного увеличения поля при сужении полюса не происходит, в основном изменяется область однородности поля. Помимо изменения конфигурации сердечника магнита была возможность воспользоваться дополнительной обмоткой с током. Увеличить ток в исходной обмотке было невозможно в силу технических ограничений. Таким образом, была предложена конфигурация магнита, изображенная на следующем рис. 7, б. Линейные размеры магнитной системы, изображенной на рис. 7, б, такие же, как и у магнитной системы, изображенной на рис. 7, а. Величина нового зазора между полюсами равна 9 см. Добавленная обмотка имеет те же размеры и то же значение тока, что и установленные до нее две обмотки. Размеры вдоль оси  $OZ$  оставлены без изменения.

На рис. 8, в приведено распределение  $B_y$  в плоскости  $XOZ$ . Значение  $\int_{-L}^L B_y(0,0,z)dz = 3,0$ .

Таким образом, увеличение  $\int_{-L}^L B_y(0,0,z)dz$ , по сравнению с исходной конфигурацией рис. 7, а произошло в 1,3 раза.

Рис. 6. Распределения  $B_y(x)$  при  $y = y_1$  для различных сетокРис. 7. Сечение магнита СП-94 в плоскости  $XOY$ 

## Заключение

1. В случае когда  $\mu(H) \rightarrow 1$  при  $H \rightarrow \infty$ , асимптотически сделана верхняя оценка допустимого роста магнитного поля  $\vec{H}(p)$  в окрестности угловой точки:

$$H(p) \leq C_0 \ln \frac{1}{r_p} + w(p),$$

где  $C_0$  — постоянная величина,  $w(p)$  — ограниченная функция,  $r_p$  — расстояние до «угловой точки».

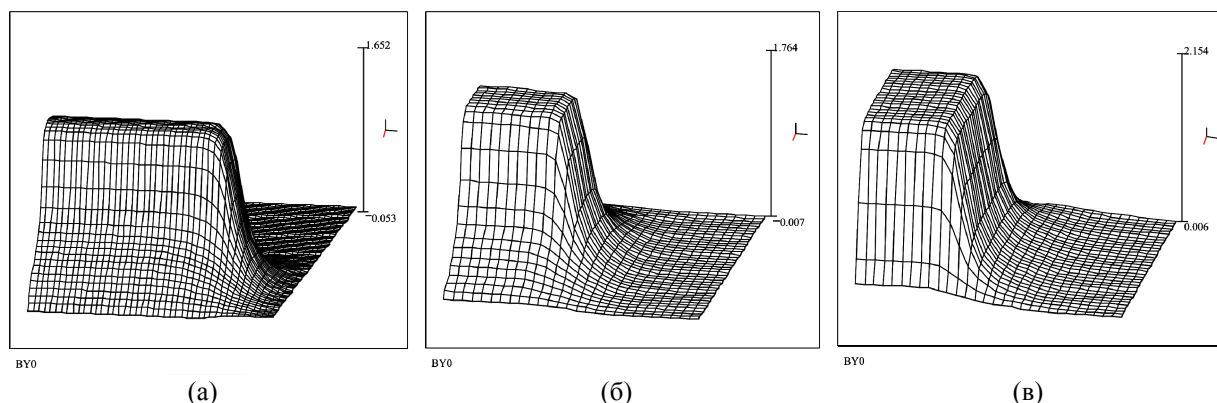


Рис. 8. Распределение  $B_y$  для трех конфигураций магнита

2. Предложен метод сгущения разностной сетки в окрестности «угловой точки», который дает существенное улучшение точности вычисляемого решения.

3. Приведены результаты численного моделирования магнитной системы СП-94 эксперимента «Дельта-Сигма», осуществляемого в рамках тематического плана ОИЯИ по международному сотрудничеству. Произведено 2- и 3-мерное моделирование конфигурации магнитного сердечника и обмоток с током с целью получения максимального значения

интеграла  $\int_{-L}^L B_y(0,0,z)dz$ .

## Список литературы

- Жидков Е. П., Перепёлкин Е. П. Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с углом // P5-2000-52. — Сообщения ОИЯИ. — Дубна, 2000.
- Жидков Е. П., Перепёлкин Е. П. Оценка роста магнитного поля в окрестности угловой точки ферромагнетика для задачи магнитостатики // P11-2003-40. — 2003.
- Жидков Е. П., Перепёлкин Е. Е., Полякова Р. В., Юдин И. П. Численное моделирование некоторых модификаций спектрометрического магнита СП-94 // BDO2002. — Саратов, 2002.
- Марчук Г. И., Шайдуров В. В. Повышение точности решений разностных схем. — М.: Наука, 1979.
- Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
- Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. — М.: Мир, 1977.
- Шайдуров В. В. Численное решение задачи Дирихле в области с углами // Вычислительные методы в прикладной математике. — Новосибирск: Наука, 1982.
- Perepelkin E. E., Polyakova R. V., Yudin I. P. The Boundary Value Problem for Elliptic Equation in the Corner Domain // Вестник РУДН. — 2014. — No. 2.
- Zhidkov E. P., Perepelkin E. E. An analytical approach for quasi-linear equation in secondary order // CMAM. — 2001. — Vol. 1, No. 3. — P. 285–297.