КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2016 Т. 8 № 1 С. 9–18

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.929

Вычисление частных решений неоднородных линейных уравнений с двумя линейными операторами, из которых по крайней мере один почти алгебраический, в случае простых корней характеристического уравнения

В. Г. Цирулик

Россия, 347922, г. Таганрог, ул. Чехова, д. 6, кв. 6

E-mail: tcrlk@pbox.ttn.ru

Получено 24 июня 2015 г.,
после доработки 8 февраля 2016 г.

Понятие оператора, почти алгебраического относительно некоторого двустороннего идеала, алгебры линейных операторов, действующих в некоторых конечномерных линейных пространствах, распространяется на тот случай, когда идеал только левый. Доказывается теорема о виде частного решения уравнения вида $\sum\limits_{i=0,j=0}^{n,m} a_{ij}A^iB^ju = f$, где A и B — линейные операторы, f — элемент некоторого линейного пространства. Результаты применяются к дифференциально-разностным уравнениям.

Ключевые слова: почти алгебраические дифференциальные операторы, почти алгебраические разностные операторы, левые регуляризаторы линейных операторов, дифференциально-разностные операторы, частные решения неоднородных линейных дифференциально-разностных уравнений

Calculation of particular solutions of nonhomogeneous linear equations with two linear operators, of which at least one is almost algebraic, in the case of simple roots of the characteristic equation

V. G. Tsirulik

61, 6 Chekhov st., Taganrog, 347922, Russia

Abstract. — The concept of an operator is an almost algebraic with respect to two-sided ideal of the algebra of linear operators in some finite-dimensional linear spaces, it extended to the case when the ideal is left. We prove a theorem on the following equation particular solution $\sum\limits_{i=0,j=0}^{n,m} a_{ij}A^iB^ju = f$, where A and B is a linear operator, f is an element of a linear space. The result is applied to the differential-difference equations.

Keywords: almost algebraic differential operators, almost algebraic difference operators, left regularizers of linear operators, differential-difference operators, partial solutions of inhomogeneous linear difference-differential equations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 9–18 (Russian).

Введение

Дифференциально-разностные уравнения рассматривались разными авторами и с различных точек зрения, например, в [Беллман, Кук, 1967; Мышкис, 1986]. Общая теория линейных уравнений в банаховом пространстве приведена в монографии [Крейн, 1971]. Частные решения неоднородных линейных дифференциально-разностных уравнений можно вычислять проще, если использовать понятие почти алгебраического элемента, рассматривавшегося в работе [Przeworska-Rolewicz, 1973].

Линейные операторы, алгебраические относительно левого идеала

Пусть N — конечномерное линейное пространство над полем комплексных чисел C; $\mathcal{A}_0$ — алгебра линейных операторов с единицей ϵ, действующих в пространстве N; I — нетривиальный (ненулевой) левый главный идеал алгебры, образованный операторами, аннулирующими пространство N.

Утверждение «главный идеал I аннулирует конечномерное пространство N» означает, что это пространство аннулирует образующая идеала.

Далее через $a \equiv b(\mathrm{mod} I)$ обозначается сравнение по модулю левого идеала I.

Определение 1. Множество Π_s операторов $P_i \in \mathcal{A}_0$ называется оптимальным множеством разделенных проекторов мощности s относительно идеала I, если выполняются условия

$$P_1 + \dots + P_s \equiv \epsilon(\mathrm{mod} I), \tag{1}$$

$$P_i(N) \bigcap P_j(N) = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{2}$$

Определение 2. Множество проекторов относительно идеала I, удовлетворяющих дополнительно условию

$$P_j P_k \equiv \begin{cases} P_j & (\mathrm{mod} I), k = j, \\ 0 & (\mathrm{mod} I), k \neq j, \end{cases} \tag{3}$$

называется I-идемпотентной системой ортогональных проекторов.

В дальнейшем для краткости — I-идемпотентная система проекторов.

Определение 3. Оператор $A \in \mathcal{A}_0$ называется почти алгебраическим относительно левого идеала I, если существует такой ненулевой многочлен $\nu(t)$ с коэффициентами в поле C, что $\nu(A) \in I$.

Сравните с [Przeworska-Rolewicz, 1973], где идеал I двусторонний. Алгебраическим оператором является, например, инволюция некоторого порядка. Почти алгебраические операторы возникают как решения уравнения $XD = DY$, где D — заданный оператор, а X, Y — операторы, подлежащие определению [Цирулик, 2002]; Y — компонента решения, является почти алгебраическим оператором.

Определение 4. Оператор A называется почти алгебраическим степени m, если существует нетривиальный многочлен степени m такой, что $\nu(A) \in I$, и не существует многочлена меньшей степени такого, что $\nu(A) \in I$. Если это так, то многочлен $\nu_m(t)$ называется характеристическим многочленом оператора A, а его корни называются характеристическими корнями оператора A.

Далее полагаем, что почти алгебраические операторы $A \in \mathcal{A}_0$ и $A \notin I$. Старшие коэффициенты характеристических многочленов операторов будем считать равными единице.

Лемма 1 (Ш. Эрмит). *Для произвольного многочлена* $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=1}^{s}(t-t_i)^{r_i}$*, построенного по множеству пар* $(t_i; r_i)$, $i = \overline{1,s}, s \geq 2$*, где* t_i *— попарно различные комплексные числа, называемые узлами,* r_i *— натуральные числа, называемые кратностями,* $r_1 + \cdots + r_s = m$*, справедливо тождество*

$$1 \equiv \sum_{i=0}^{s} p_i(t), \tag{4}$$

где

$$p_i(t) = q_i(t) \prod_{j=1; j\neq i}^{s} (t-t_j)^{r_j}, \tag{5}$$

причем $q_i(t) = \sum\limits_{k=0}^{r_i-1} \dfrac{(t-t_i)^k}{k!} \dfrac{d^k}{dt^k}\left[\dfrac{(t-t_i)^{r_i}}{\nu_m(t)}\right]_{t=t_i}$.

Тождество (4) называется разбиением единицы.

Построим по формулам (5) операторы

$$P_i = p_i(A), \tag{6}$$

где $A \in \mathcal{A}_0$ — почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=1}^{s}(t-t_i)^{r_i}$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, $r_1 + \cdots + r_s = m$.

Лемма 2. *Операторы* P_i *обладают свойством*

$$(A - t_i\epsilon)^{r_i} P_i \equiv 0(\mathrm{mod} I) \forall i = \overline{1,s}. \tag{7}$$

Доказательство. Действительно,

$$(A - t_i\epsilon)^{r_i} P_i = (A - t_i\epsilon) q_i(t) \prod_{j=1; i\neq j}^{s} (A - t_j\epsilon)^{r_j} = q_i(t)\nu_m(A) \in I \; \forall i = 1, \cdots, s.$$

□

Лемма 3. *Операторы* $P_i = p_i(A)$ *образуют* I*-идемпотентную систему проекторов.*

Доказательство. Свойство (1) следует из (4). Обозначим $N_j = P_j(N)$. Согласно (7) $(A - t_j\epsilon)^{r_j} P_j x = 0 \; \forall x \in N$. А поскольку уравнения $(A - t_j\epsilon)^{r_j} y = 0$, $(A - t_i\epsilon)^{r_i} y = 0$ при $i \neq j$ не имеют общих нетривиальных решений, то $P_j(N) \bigcap P_i(N) = 0$.

Идемпотентность. По построению операторы P_j коммутативные, поэтому при $j \neq k$ получим

$$P_j P_k = p_j(A) p_k(A) = q_j(A) q_k(A) \prod_{i=1; i\neq j}^{s} (A - t_i\epsilon)^{r_i} \prod_{i=1; i\neq k}^{s} (A - t_i\varepsilon)^{r_i} =$$

$$= q_j(A) q_k(A) \prod_{i=1; i\neq j; i\neq k}^{s} (A - t_i\epsilon)^{r_i} \nu_m(A) \in I.$$

При $j = k$ имеем

$$P_j^2 - P_j = \sum_{i=1; i\neq j}^{s} P_j P_i \in I,$$

то есть $P_j^2 \equiv P_j(\mathrm{mod} I)$. □

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

а) оператор $A \in \mathcal{A}_0$ *является почти алгебраическим относительно левого идеала* I *с характеристическим многочленом* $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=0}^{s}(t-t_i)^{r_i}$*;*

б) существуют I*-идемпотентная система проекторов* $P_j \in \mathcal{A}_0$, $j = 1, \cdots, s$*;*

в) пространство N *является прямой суммой своих подпространств:* $N = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} N_j$, $N_j = P_j(N)$.

Доказательство.

а)→ б). Положим $P_j = p_j(A)$, где $p_j(t)$ определяются по формуле (5), поэтому утверждение следует из формулы (4) и леммы 3.

б) → в). Из справедливости б) и по определению 1.

в) → а). Пусть N является прямой суммой подпространств $N_j = P_j(N) = ker(A - t_j\epsilon)^{r_j}$. Обозначим $\nu_m(A) = \prod\limits_{j=1}^{s}(A - t_j\epsilon)^{r_j}$. Согласно предположению $\forall x \in N$ имеем $x = \sum\limits_{j=1}^{s} x_j$, $x_j \in N_j$. Отсюда

$$\nu_m(A)x = \nu_m(A)\sum_{j=1}^{s} x_j = \sum_{j=1}^{s}\left[\prod_{k=1;k\neq j}^{s}(A - t_k\epsilon)^{r_k}\right](A - t_j\epsilon)^{r_j}x_j = 0.$$

Следовательно, оператор A почти алгебраический степени $r_1 + \cdots + r_s = m$. □

Теорема 2. *Если характеристический многочлен* $\nu_m(t)$ *оператора* A *не имеет кратных корней, то*

$$A^k \equiv \sum_{j=1}^{m} t_j^k P_j(\mathrm{mod} I), k = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Доказательство. Так как все собственные корни оператора простые, то из (7) следуют сравнения $AP_j \equiv t_j P_j$ (mod I). Складывая эти сравнения, получим в силу (4)

$$A \equiv \prod_{j=1}^{s} t_j P_j(\mathrm{mod} I). \tag{9}$$

Применяя далее индукцию по k, находим

$$A^k \equiv \sum_{j=1}^{s} t_j^k P_j(\mathrm{mod} I). \tag{10}$$

□

Рассмотрим теперь уравнение

$$L_r(A, B)u = f, \tag{11}$$

где $L_r = L_r(A, B) = \sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{j=0}^{q} a_{i\,j}A^iB^j$ — оператор (многочлен от A, B), $r = \max(p, q, p+q)$ — совокупный порядок оператора, коэффициенты которого a_{ij} принадлежат некоторому полю K, содержащему поле комплексных чисел C, замкнутому относительно действия линейных операторов A, B, то есть $\forall a \in K$, $A(a) \in K$, $B(a) \in K$. Оператор L_r можно рассматривать как многочлен от A с коэффициентами, зависящими от оператора B, и записывать его как $L_r = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i(B)A^i$ либо как многочлен от оператора B с коэффициентами, зависящими от оператора A, и записывать его как $L_r = \sum_{j=0}^{q} b_j(A)B^j$; $\epsilon = A^0 = B^0$ — операторная единица.

Элемент f принадлежит некоторому конечномерному линейному пространству N над полем C. Далее предполагается, что операторы A, B действуют в пространстве N и, следовательно, $A, B \in \mathcal{A}_0$, I — левый главный идеал алгебры операторов $\mathcal{A}_0$, аннулирующих пространство N.

Частное решение уравнения будем искать в пространстве N, так что оператор L_r по предположению кроме своей естественной области определения M действует и в этом пространстве.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (11) *оператор B почти алгебраический относительно идеала I с характеристическим многочленом $\nu_m(t)$ и простыми характеристическими корнями $t_j, j = \overline{1, m}$; P_j — I-идемпотентная система проекторов, $f_j = P_j(f)$. Если операторы $L_r(A, t_j)$, полученные из оператора $L_r(A, B)$ подстановкой чисел $t_j^i, i = \overline{0, q}$, вместо операторов B^i, действуют в пространстве N и $kerL_r(A, t_j) \bigcap N = 0$, то частное решение уравнения* (11) *может быть вычислено как сумма частных решений системы независимых уравнений*

$$L_r(A, t_j)u_j = f_j, j = \overline{1, m} \,. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку операторы $A, B, L_r(A, B)$ действуют в пространстве N, то искомое решение существует. Заменив степени B^i в силу теоремы 2, получим $\sum_{i=0}^{q} b_i(A) \sum_{j=1}^{m} t_j^i P_j u = f$. Меняя порядок суммирования и учитывая, что $f \in N$, найдем $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{q} b_i(A)t_j^i P_j u = \sum_{j=1}^{m} P_j f$ или $\sum_{j=1}^{m} (L_r(A, t_j)P_j u - P_j f) = 0$. В силу предположения правые части $L_r(A, t_j)P_j u$ системы отличны от нуля, а поскольку пространство N является прямой суммой своих подпространств $N_j = P_j N$, то приходим к (12). □

Почти алгебраические дифференциальные операторы

Пусть K — дифференциальное поле с дифференцированием $\delta = d/dx$ (элементами поля K являются функции $f(x)$ вещественной или комплескной переменной x), поле комплексных чисел $C \subset K$.

Обозначим через $K[\delta]$ алгебру обыкновенных линейных дифференциальных операторов (ОЛДО), то есть многочленов вида $D_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta^i$, $a_i \in K$, $a_n \neq 0$, n — порядок оператора, $\delta^0 = \epsilon$ — единица алгебры.

Почти алгебраические ОЛДО возникают, например, при рассмотрении уравнения

$$XD_n = D_n Y \tag{13}$$

[Цирулик, 2002], где $D_n \in K[\delta]$ — заданный оператор, а X, Y — операторы, подлежащие определению. Коэффициенты этих операторов, вообще говоря, принадлежат некоторому расширению $R \supset K$, полученному присоединением к полю K решений системы дифференциальных уравнений на коэффициенты операторов X, Y.

Определение 5. Решением уравнения (13) называется любая пара операторов (X, Y) из $R[\delta] \times R[\delta]$, обращающая его в тождество.

Множество решений этого уравнения не пусто, поскольку в нем содержатся элементы централизатора оператора D_n в $R[\delta]$. Поскольку множества X и Y компонент решений уравнения (13) являются изоморфными C-алгебрами, то ограничимся рассмотрением алгебры Y, а ее элементы будем называть решениями уравнения (13).

Обозначим через N пространство решений уравнения $D_n(y) = 0$. Из рассмотрения уравнения (13) следует, что операторы Y являются гомоморфизмами пространства N, $\mathcal{A}_0$ — алгебра этих операторов. Множество операторов из Y, аннулирующих пространство N, является левым идеалом в кольце $R[\delta]$, обозначается I. Этот идеал является главным, с образующей D_n, $I = (D_n)$.

Теорема 4. *Каждая Y-компонента решения уравнения* (13) *является алгебраическим оператором относительно идеала I.*

Доказательство. Оператор Y действует на пространстве N посредством матрицы определенной в некотором базисе. Пусть $\nu_n(t)$ — характеристический многочлен. Для каждого его корня t_i кратности r_i, $i = 1, \cdots, s$, оператор $(Y - t_i\epsilon)^{r_i}$ имеет ровно r_i линейно независимых решений в пространстве N, а произведение этих операторов аннулирует пространство N. Значит, $\nu_n(Y) \in I$. □

Пусть оператор D_q таков, что оператор D_n допускает представление $D_n = \sum\limits_{i=0}^{m} c_i D_q^i$, $c_i \in C$, $n = mq$. Тогда оператор D_q почти алгебраический с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=0}^{s}(t - t_i)^{r_i}$, где $t_1, t_2, \cdots, t_s$ — различные характеристические корни оператора D_q, $r_1, \cdots, r_s$, соответственно, их кратности, $r_1 + \cdots + r_s = m, m \geq 2, n = mq$.

Теорема 5. *Следующие условия эквивалентны:*

а) D_q *— почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом* $\nu_m(t)$*;*

б) существует s *линейных операторов* $P_j \in \mathcal{A}_0$ *таких, что*

$$\sum_{j=1}^{s} P_j \equiv \epsilon (\mathrm{mod} I), \tag{14}$$

$$P_j P_k \equiv \begin{cases} P_j & (\mathrm{mod} I), k = j, \\ 0 & (\mathrm{mod} I), k \neq j, \end{cases} \tag{15}$$

$$(D_q - t_j\epsilon)^{r_j} P_j \equiv 0 (\mathrm{mod} I); \tag{16}$$

в) пространство N является прямой суммой своих подпространств $N_j = \ker(D_q - t_j\epsilon)^{r_j}$, $N = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} N_j$, *где* $r_1 + \cdots + r_s = m$.

Утверждение является следствием теоремы 1.

Почти алгебраические разностные операторы

Пусть K — поле функций $f(x)$ вещественной или комплексной переменной x, содержащее поле комплексных чисел C, замкнутое относительно «разностного» оператора ω, действующего по формуле $\omega f(x) = f(x + h)\ \forall f(x) \in K, h \in C$. Обозначим через $K[\omega]$ алгебру обыкновенных линейных разностных операторов (ОЛРО), то есть многочленов вида $\Omega_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\omega^i$, $a_i \in K$, $a_n \neq 0$, n — порядок оператора, $\omega^0 = \epsilon$ — единица алгебры.

Почти алгебраические ОЛРО возникают, например, при рассмотрении уравнения, аналогичного (13),

$$X\Omega_n = \Omega_n Y, \tag{17}$$

где $\Omega_n \in K[\omega]$ — заданный оператор, а X, Y — операторы, подлежащие определению. Коэффициенты этих операторов, вообще говоря, принадлежат некоторому расширению $G \supset K$, полученному присоединением к полю K решений системы разностных уравнений на коэффициенты операторов X, Y.

Определение 6. Решением уравнения (17) называется любая пара операторов (X, Y) из $G[\omega] \times G[\omega]$, обращающая (17) в тождество.

Множество решений этого уравнения не пусто, поскольку в нем содержатся элементы централизатора оператора Ω_n в $G[\omega]$. Поскольку множества X- и Y-компонент решений уравнения (17) являются изоморфными C-алгебрами, то ограничимся рассмотрением алгебры Y, а ее элементы будем называть решениями уравнения (17). Обозначим через N пространство решений уравнения $\Omega_n(y) = 0$. Из рассмотрения уравнения (17) следует, что операторы Y являются гомоморфизмами пространства N, $\mathcal{A}_0$ — алгебра этих операторов. Множество операторов из Y, аннулирующих пространство N, является левым идеалом в алгебре $G[\omega]$, обозначается I. Этот идеал является главным, с образующей Ω_n, $I = (\Omega_n)$.

Теорема 6. *Каждая Y-компонента решения уравнения* (17) *является алгебраическим оператором относительно идеала I.*

Доказательство. Оператор Y действует на пространстве N посредством матрицы определенной в некотором базисе. Пусть $\nu_n(t)$ — характеристический многочлен. Для каждого его корня t_i кратности r_i оператор $(Y - t_i\epsilon)^{r_i}$ имеет ровно r_i, $i = \overline{1, s}$, линейно независимых решений в пространстве N, а произведение этих операторов аннулирует пространство N. Значит? $\nu_n(Y) \in I$. □

Пусть оператор Ω_q таков, что оператор Ω_n допускает представление $\Omega_n = \sum\limits_{i=0}^{m} c_i\Omega_q^i$, $c_i \in C$, $n = mq$. Тогда оператор Ω_q почти алгебраический, с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=0}^{s}(t - t_i)^{r_i}$, где $t_1, t_2, \cdots, t_s$ — различные характеристические числа оператора Ω_q, $r_1, \cdots, r_s$, соответственно, их кратности, $r_1 + \cdots + r_s = m, m \geq 2, n = mq$.

Теорема 7. *Следующие условия эквивалентны:*

а) Ω_q — почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\nu_m(t)$;

б) существует s линейных операторов $P_j \in \mathcal{A}_0$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{s} P_j \equiv \epsilon (\mathrm{mod} I), \tag{18}$$

$$P_j P_k \equiv \begin{cases} P_j & (\mathrm{mod} I), k = j, \\ 0 & (\mathrm{mod} I), k \neq j, \end{cases} \tag{19}$$

$$(\Omega_q - t_j\epsilon)^{r_j} P_j \equiv 0 (\mathrm{mod} I); \tag{20}$$

в) пространство N является прямой суммой своих подпространств $N_j = \ker(\Omega_q - t_j\epsilon)^{r_j}$, $N = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} N_j$, где $r_1 + \cdots + r_s = m$.

Утверждение является следствием теоремы 1.

Дифференциально-разностные уравнения

Применим понятие почти алгебраического элемента (оператора) к дифференциально-разностным уравнениям. Пусть поле K замкнуто относительно «разностного» ω и дифференциального δ операторов и операторов $\Omega_p = \sum\limits_{i=0}^{p} b_i\omega^i \in K[\omega]$, $b_i \in K$; $D_q = \sum\limits_{i=0}^{q} a_i\delta^i \in K[\delta]$, $a_i \in K$. Операторы $A_m = A_m(\Omega_p, D_q) = \sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{s} a_{i\,j}\Omega_p^i D_q^j$, $a_{ij} \in K$, где $m = \max(rp, sq, rp + sq)$ — совокупный порядок оператора, можно рассматривать как алгебру $\mathcal{A}[\Omega_p]$ многочленов от Ω_p с коэффициентами, зависящими от оператора D_q, и записывать ее элементы как $A_m = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i D_q \Omega_p^i$ либо как алгебру $\mathcal{A}[D_q]$ многочленов от оператора D_q с коэффициентами, зависящими от оператора Ω_p, и записывать ее элементы как $A_m = \sum\limits_{j=0}^{s} b_j(\Omega_p)D_q^j$; $\epsilon = \omega^0 = \delta^0$ — единица алгебры.

Рассмотрим уравнение

$$A_m(\Omega_p, D_q)u = f \tag{21}$$

с оператором $A_m(\Omega_p, D_q)$ и функцией $f(x)$, принадлежащей пространству N решений некоторого дифференциального уравнения $D_n(y) = 0$, $D_n \in K[\delta]$, M — область определения оператора A_m, а областью его значений будем считать пространство N.

Пусть $I = I(D_n)$ — левый главный идеал алгебры $\mathcal{A}_0$ с образующей $D_n \in K[\delta]$, $D_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j\delta^j, a_j \in K$. Если оператор D_n может быть представлен в виде $D_n = \sum\limits_{i=0}^{k} c_i D_q^i$, $c_i \in C$, $n = kq$, то он является алгебраическим относительно идеала I с характеристическим многочленом $\nu_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{s}(t - t_i)^{r_i}$, $r_1 + \cdots + r_s = k$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$.

Будем искать решение уравнения в пространстве N, то есть предполагать, что оператор $A_m(\Omega_p, D_q)$ действует и в этом пространстве.

Теорема 8. *Если операторы $A_m(\Omega_p, t_j)$, полученные из оператора $A_m(\Omega_p, D_q)$ подстановкой чисел t_j^i, $i = \overline{0, s}$, вместо операторов D_q^i, действуют в пространстве N и $kerA_m(\Omega_p, t_j) \bigcap N = 0$, то частное решение уравнения* (21) *может быть вычислено как сумма частных решений системы независимых уравнений*

$$A_m(\Omega_p, t_j)u_j = f_j, j = \overline{1, s}, \tag{22}$$

где $f_j = P_j(N), P_j$ — проекторы.

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство теоремы 3 при замене операторов A, B на операторы Ω_p, D_q соответственно. □

Заметим, что методы решения однородных и неоднородных обыкновенных линейных разностных уравнений даны в [Миролюбов, Солдатов, 1981; Миролюбов, Солдатов, 1986].

Пример

Вычислим частное решение уравнения

$$u(x+1)_{xx}^{(4)} - 2u(x+1)_{xx}^{(4)} + 2u(x+1)_{xx}^{(2)} - 4u(x)_{xx}^{(2)} + 2u(x+1) - u(x) = f(x) \tag{23}$$

с правой частью $f(x) = \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$.

Перепишем уравнение в операторной форме

$$A_5(u) = [(\omega - 2\epsilon)(\delta^4 + 2\delta^2 + \epsilon) + \omega + \epsilon]u = f(x). \tag{24}$$

Здесь δ — оператор дифференцирования по переменной x, оператор ω действует на функцию $f(x)$ по формуле $\omega(f(x)) = f(x+1)$. Приведем три варианта решения, выбирая различным образом почти алгебраический оператор.

Вариант 1. Запишем оператор в виде $A_5(u) = (\omega-2\epsilon)(\delta^2+\epsilon)^2+\omega+\epsilon$. Правая часть уравнения принадлежит пространству решений дифференциального уравнения $D_4(u) = \left((\delta^2+\epsilon)^2 - \frac{9}{4}\epsilon\right) u = 0$, которое принимаем в качестве пространства N. Таким образом, оператор $\delta^2+\epsilon$ — алгебраический относительно левого главного идеала $I = (D_4)$, с характеристическим многочленом $\nu_2(t) = t^2 - \frac{9}{4}\epsilon$ и простыми характеристическими корнями $t_1 = -\frac{3}{2}, t_2 = \frac{3}{2}$.

Построим проекторы по формулам (6), которые в силу простых корней имеют вид

$$P_1 = -\tfrac{1}{6}(2\delta^2 - \epsilon), P_2 \quad = \tfrac{1}{6}(2\delta^2 + 5\epsilon), \tag{25}$$

тогда $P_1(f(x)) = f_1(x) = \cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right), P_2(f(x)) = f_2(x) = \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Согласно теореме 8 для вычисления частного решения имеем систему независимых уравнений

$$A_5(t_1)u_1 = \cos\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}x\right), \qquad A_5(t_2)u_2 = \exp\left(\tfrac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{26}$$

Частные решения этих уравнений найдем, построив левые регуляризаторы операторов в их левых частях по формулам

$$R^j_{m_1} A_5(t_j) + B^j_{m_2}\Omega^j_1 = \epsilon, j = 1, 2, \tag{27}$$

которые рассматриваются как уравнения относительно неизвестных операторов $R^j_{m_1}$ и $B^j_{m_2}$. Операторы $R^j_{m_1}$ называются левыми регуляризаторами операторов $A_5(t_j)$, Ω^j_1 — операторы, аннулирующие функции $f_j(x) = P_j(f(x))$. В каждом случае ищем минимальное решение [Цирулик, 2002] уравнения (27).

Имеем $A_5(t_1) = A_5(t_2) = \frac{13}{4}\omega - \frac{7}{2}\epsilon$. Для первого уравнения $\Omega^1_2 = \omega^2 - 2\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\omega + \epsilon$ — оператор, аннулирующий правую часть. Поэтому минимальное решение уравнения (27) нужно искать в виде $R^1_1 = a_1\omega + b_1\epsilon$, $B^1_0 = c_1\epsilon$. Составляя и решая систему относительно a_1, b_1, c_1, получим $a_1 = \frac{52}{365-364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$, $b_1 = -\frac{2}{7} + \frac{338}{7\left(365-364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)}$, $c_1 = \frac{169}{365-364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$, следовательно, $u_1(x) = $ $= R^1_1(f_1(x)) = \frac{52\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}(x-1)\right) - 56\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)}{365-364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$.

Для второго уравнения имеем: $\Omega^2_1 = \omega - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\epsilon$, поэтому решение уравнения (27) ищем в виде $R^2_0 = a_2\epsilon$, $B^2_0 = b_2\epsilon$. Получаем $a_2 = \frac{4}{-14+13\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, следовательно, $u_2(x) = \frac{4\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{-14+13\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$.

Таким образом, искомое частное решение таково:

$$u(x) = \frac{52\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}(x-1)\right) - 56\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)}{365 - 364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)} + \frac{4\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{-14 + 13\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Вариант 2. Строим оператор $D_3 = (\delta - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon)(\delta^2 + \frac{5}{2}\epsilon)$, ядру N которого принадлежит правая часть уравнения. Оператор дифференцирования δ является алгебраическим относительно левого идеала $I = (D_3)$, с характеристическим многочленом третьей степени и простыми характеристическими корнями $t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $t_2 = \frac{5}{\sqrt{2}}i$, $t_3 = -\frac{5}{\sqrt{2}}i$. В этом случае имеются три проектора: $P_1 = \frac{1}{3}(\delta^2 + + \frac{5}{2}\epsilon)$, $P_2 = \frac{-i}{5i+\sqrt{5}}\delta^2 + \frac{i-\sqrt{5}}{2^{1/2}(5i+\sqrt{5})}\delta + \frac{\sqrt{5}}{2(5i+\sqrt{5})}\epsilon$ и $P_3 = \frac{i}{-5i+\sqrt{5}}\delta^2 - \frac{i+\sqrt{5}}{2^{1/2}(-5i+\sqrt{5})}\delta + \frac{\sqrt{5}}{2(-5i+\sqrt{5})}\epsilon$, применение которых к правой части уравнения приводит к следующей системе: $\left(\frac{13}{4}\omega - \frac{7}{2}\epsilon\right)u_1(x) = \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{13}{4}\omega - \frac{7}{2}\epsilon\right)u_2(x) = \frac{1}{2}\exp\left(-i\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$, $\left(\frac{13}{4}\omega - \frac{7}{2}\epsilon\right)u_3(x) = \frac{1}{2}\exp\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$. Вычисляя левые регуляризаторы операторов и применяя их к уравнениям, получим, вообще говоря, комплексные решения: $u_1(x) = 4\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(-14 + 13\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^{-1}$, $u_2(x) = 2\exp\left(-i\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)\left(-14 + 13\cos\left(-i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)^{-1}$, $u_3(x) = = 2\exp\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)\times\left(-14 + 13\cos\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)^{-1}$. Выделив вещественную часть, придем к решению, полученному ранее.

Вариант 3. Рассмотрим кратко случай, когда почти алгебраическим элементом выбирается оператор ω. Перепишем оператор уравнения в виде $A_5(u) = (\delta^4 + 2\delta^2 + 2\epsilon)\omega - (\delta^4 + 2\delta^2 - \epsilon)$. В качестве образующей левого главного идеала выбираем разностный оператор Ω_3, аннулирующий пространство N, с базисом из функций $\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$, $\sin\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$. Теперь оператор ω является алгебраическим относительно идеала $I = (\Omega_3)$ с простыми характеристическими корнями $k_1 = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k_2 = \exp\left(-i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $k_3 = \exp\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. Проекторы $P_i, i = \overline{1,3}$, зависят от оператора ω, что приводит к трем независимым уравнениям $\big((t_i - 1)\,\delta^4 + 2\,(t_i - 1)\,\delta^2 + (2t_i - 1)\,\epsilon\big)u_i(x) = = P_i(f(x))$. Частные решения этих уравнений вычислим, построив с помощью уравнений (27) левые регуляризаторы операторов в левых частях.

Проверка найденных частных решений неоднородных разностных уравнений проводилась с помощью пакетов Mathematica и Maple, при этом отмечено, что частные решения, вычисленные этими пакетами, отличаются от найденных предлагаемым методом на некоторые слагаемые из ядер соответствующих операторов.

Список литературы

Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 518 с.

Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные однородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1981. — 204 с.

Миролюбов А. А., Солдатов М. А. Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.

Мышкис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздыванием. — М.: Наука, 1972. — 352 с.

Цирулик В. Г. Уравнения с коэффициентами из некоммутативных колец и некоторые их приложения // Тезисы докладов IX Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование». — Дубна, 2002. — С. 109.

Przeworska-Rolewicz D. Equation which transformed argument an algebraic approch. — PWN: Elsevier, 1973. — 200 p.