**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 6 С. 1309−1329**

УДК: 519.710.34; 330.46

Модель согласования экономических интересов дуополистов при формировании ценовой политики

Е. В. Орлова

Уфимский государственный авиационный технический университет,
Институт экономики и управления, кафедра экономики предпринимательства,
Россия, 450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12

E-mail: ekorl@mail.ru

*Получено 20 мая 2015 г.,
после доработки 07 сентября 2015 г.*

Предложена модель рыночного ценообразования фирм-дуополистов, представляющая динамику цен в виде четырехпараметрического двумерного отображения. Показано, что неподвижная точка данного отображения совпадает с точкой локального равновесия цен по Нэшу при игровом взаимодействии фирм. Численно выявлены бифуркации неподвижной точки, показан сценарий перехода от периодического режима к хаотическому через удвоение периода. Для обеспечения устойчивости локального равновесия цен по Нэшу предложен механизм управления динамикой цен на рынке, позволяющий стабилизировать хаотические траектории цен и согласовать экономические интересы фирм в процессе формирования их ценовой политики.

Ключевые слова: двумерное отображение, устойчивость неподвижной точки, бифуркационный анализ; ценовая конкуренция, управление рыночными ценами, стратегическое взаимодействие фирм, равновесие по Нэшу

Model for economic interests agreement in duopoly's making price decisions

E. V. Orlova

Ufa state aviation technical university Organization, 12 K. Marks st., Ufa, 450000, Russia

Abstract. — The model of market pricing in duopoly describing the prices dynamics as a two-dimensional map is presented. It is shown that the fixed point of the map coincides with the local Nash-equilibrium price in duopoly game. There have been numerically identified a bifurcation of the fixed point, shown the scheme of transition from periodic to chaotic mode through a doubling period. To ensure the sustainability of local Nash-equilibrium price the controlling chaos mechanism has been proposed. This mechanism allows to harmonize the economic interests of the firms and to form the balanced pricing policy.

Keywords: two-dimensional map, stability of fixed point, bifurcation analysis, price competition, control of market prices, strategic interaction of firms, Nash-equilibrium

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 1309–1329 (Russian).

Введение

Многовариантность поведенческих стратегий фирм в области ценообразования продукции на рынках несовершенной конкуренции обусловлена особенностями конкретного рынка, видом взаимодействия между фирмами-конкурентами, возможностью потребителей влиять на параметры рыночного равновесия, состоянием экономики в целом. Модель, описывающая процесс формирования цены на продукцию, кроме перечисленных особенностей должна учитывать изменение затрат производителя, динамику спроса, стратегию ценообразования конкурентов.

Рассмотрение традиционных моделей процесса рыночного ценообразования показал, что основным принципом формирования цен является концепция конкурентного равновесия. Эффективность конкурентного равновесия в условиях рынков совершенной конкуренции состоит в том, что оно обеспечивает оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономической системе. Такая связь между теорией совершенной конкуренции и экономической эффективностью исследовалась в трудах Эрроу, Дебре, Хикса, Самуэльсона. Однако существует ряд причин, препятствующих эффективному распределению ресурсов, а значит, способствующих возникновению несовершенных рынков. К таким причинам можно отнести:

i) стремление производителя к снижению издержек, возникновение эффекта масштаба; если с ростом объемов производства производитель имеет возможность снизить издержки, это приводит к нарушению совершенной конкуренции, так как более рациональным становится существование в отрасли небольшого числа производителей;
ii) существование барьеров входа в отрасль в форме правовых ограничений (вмешательства государства, приобретение патента), высоких издержек входа, расходов на рекламу, дифференциация продукции.

Модели ценообразования в условиях несовершенной конкуренции разнообразны, порождаются различными типами стратегического взаимодействия фирм, степенью воздействия спроса на цену и различаются в зависимости от наличия/отсутствия следующих факторов: 1) однородности/неоднородности производимой продукции; 2) типа ограничения на производственные мощности; 3) наличия сговора конкурентов; 4) наличия фирмы-лидера по издержкам; 5) наличия барьеров входа на рынок. Такие модели объединяют следующие принципы формирования цены: а) минимизация отклонения совокупного спроса от совокупного предложения; б) рациональность экономических агентов — производителей и потребителей продукции; в) существование совершенной информации о состоянии рынков; г) эффективность рынков.

Объективные сложности исследования рыночных систем, связанные с такими их характеристиками, как наличие сложных причинно-следственных связей факторов, не полная рациональность лица, принимающего решения [Канеман, 2003; Клейнер, 2003; Ключарев, 2011; Орлова, 2012, 2014], приводят к тому, что эти системы характеризуются следующими свойствами: неопределенность и неполнота информации, стохастичность и нелинейность параметров. Например, при исследовании рынков несовершенной конкуренции выдвигаются следующие предположения относительно характеристик рыночной системы: функция реакции производителя на действия других рыночных агентов являются линейными; предельные издержки производителей часто предполагаются неизменными. Все это упрощает описание рыночных процессов, не учитывает их реальной динамики, обусловленной свойствами рынка, и не выявляет эффектов, наблюдаемых на практике.

Поэтому одним из возможных инструментов моделирования динамики рыночных цен, основанных на учете таких свойств рынка, как неопределенность, неполнота информации, необходимой для описания динамики процессов, нелинейный и стохастический характер описываемых динамику процессов параметров, являются методы нелинейной динамики. Учет перечисленных свойств осуществляется на основе моделирования равновесных процессов и изучения их (равновесий) изменений в условиях реальной динамики рыночных агентов с использованием разностных уравнений (отображений), позволяющих моделировать динамику сложных систем, выявлять условия, приводящие к возникновению бифуркаций.

В классической модели ценовой конкуренции — модели Бертрана — предполагается совершенная заменимость товаров разных производителей и, как следствие, высокая степень ценовой конкуренции. В этой модели каждый из олигополистов принимает уровень цен как данный и независимо от всех остальных участников рынка принимает решение об уровне своей цены. Известен парадокс Бертрана, состоящий в том, что весь спрос достается производителю, установившему минимальную цену, и при одинаковых предельных издержках производителей единственным равновесием Нэша будет реализация продукции на уровне этих издержек, обеспечивая производителям нулевую прибыль. Парадокс Бертрана объясняется следующими ценовыми моделями.

1. Модель динамической ценовой конкуренции [Axelrod, 1984]. Выбор оптимальной стратегии фирмы зависит от соотношения значений выигрыша по каждому из возможных вариантов в динамической (повторяющейся) игре. Фирмы отказываются от ценовой войны, если вероятность дальнейшего взаимодействия растет, и увеличивается значимость будущих прибылей, если одностороннее снижение цены приводит к незначительному росту прибыли.

2. Модель Эджворта [Вурос, 2002; Васин, 2005; Филатов, 2012] как модель с ограничениями на производственные мощности производителей. Эджворт получил следующее достаточное условие существования равновесия по Нэшу: если суммарная мощность всех производителей, за исключением фирмы с максимальной производственной мощностью, превышает объем спроса по цене, равной средней себестоимости, то равновесная цена по Нэшу совпадает с ценой конкурентного равновесия (по Вальрасу) и равна средней себестоимости.

3. Модель с дифференцированным продуктом [Puu, 1997; Dixit, 1977; Krugman, 1980; Kopel, 1997; Melitz, 2008; Ahmed, 2015; Покровский, 2015, Шаповал, 2014]. Продукт характеризуется с помощью набора характеристик: качество, долговечность, дополнительные услуги, месторасположение продавца, время продажи и др. Каждый из перечисленных компонентов может выступать в качестве фактора продуктовой дифференциации. Дифференциация товара означает выделение товара какого-то производителя из остальных товаров данного класса и представляет собой форму неценовой конкуренции. Стандартная модель Бертрана предполагает совершенную заменимость товаров фирм и, как следствие, высокую степень ценовой конкуренции. Взаимосвязь между неценовой конкуренции и географическим размещением конкурирующих фирм впервые обнаружил Г. Хотелинг [Hotelling, 1929]. Он отметил, что принцип максимизации прибыли автоматически заставляет конкурентов располагаться близко друг к другу. Чем выше степень дифференциации продукции, чем более заменяемыми оказываются товары разных фирм, тем больше расхождение между кривыми реакциями производителей, так как ценовое поведение одной фирмы в меньшей степени будет влиять на ценовое поведение другой. Равновесие на рынке в данном случае — это монопольные цены фирм. Дифференциация продукта, как по расположению, так и по качеству, позволяет создать клиентскую базу, занять определенную рыночную нишу и пользоваться рыночной властью над ней. Таким образом, дифференциация товара смягчает ценовую конкуренцию фирм, что не ведет к полному исчезновению их прибылей.

Классическая модель ценовой конкуренции описывает конкуренцию экономических агентов, каждый из которых выбирает свою рыночную цену, стремясь максимизировать свою прибыль в условиях, когда цена возрастает с ростом суммарного рыночного спроса. Прибыль производителя определяется рыночной ценой, издержками производства и величиной спроса. Целью моделирования является прогнозирование рыночного равновесия (то есть нахождение таких цен, которые максимизируют прибыли производителей), одностороннее отклонение от которого не выгодно ни одному производителю. Таким образом, ценовая модель описывает поведение экономических агентов в отсутствие управления и соответствует этапу анализа поведения управляемой системы. Следующим этапом может являться предположение о том, что выбор одного из параметров модели является управляющим воздействием. Имея решение задачи описания поведения управляемой системы в зависимости от тех или иных параметров (например, равновесия Нэша от коэффициентов функции затрат или коэффициентов функции спроса), можно прогнозировать поведение системы в зависимости от управляющих воздействий.

В теоретико-игровых задачах ценовой конкуренции, как правило, при обосновании выбора стратегий игроков ограничиваются доказательством существования и единственности ситуации равновесия. Для этого считается достаточным обосновать непрерывность функции выигрыша (прибыли фирм) и компактность множества стратегий [Петросян, 2012; Зенкевич, 2009]. Надо отметить, что при решении задач игрового взаимодействия фирм на рынке не исследуются вопросы устойчивости равновесия при изменении параметров задачи. При исследовании рынков, подверженных как экзогенной, так и эндогенной изменчивости, постановка задачи анализа и управления устойчивостью равновесных ценовых стратегий фирм представляется важной и должна являться неотъемлемой частью при формировании стратегии фирм. Так, колебания цен на производственные ресурсы фирмы, изменения поведенческих стратегий и предпочтений потребителей прямо влияют на изменения параметров в задаче формирования цен на производимую продукцию. В данной работе ставится задача анализа устойчивости равновесных по Нэшу цен в модели игрового взаимодействия фирм на рынке несовершенной конкуренции и управления этой устойчивостью с помощью механизма подбора параметров в ценовой модели на основе применения инструментов теории отображений.

1. Системный подход к анализу функционирования рынка

Базируясь на методологии системного подхода к исследованию рынков можно выделить следующих экономических агентов — потребителей, фирм-производителей, фирм-конкурентов, государство и собственно рынок с их существенными прямыми и обратными связями (рис. 1).

Рис. 1. Схематическое представление функционирования рынка

Исследование структуры рынка включает совокупность приемов и методов оценки минимально эффективного выпуска, рыночной концентрации, глубины дифференциации продуктов, высоты барьеров для входа на рынок, степени вертикальной интеграции и диверсификации на рынке. Анализ комплекса взаимоотношений фирм и спроса показал, что такие параметры поведения фирм, как цена товара и объем выпуска, могут использоваться для воздействия фирм на поведение потребителей, а также для обратного влияния спроса на функционирование фирмы. Фирма может управлять границами спроса, применяя различные ценовые стратегии и методы воздействия на потребителей с помощью рекламы. Обратное воздействие спроса на фирму проявляется в качестве ограничений рыночного поведения фирмы: эластичность спроса, потребительские предпочтения, доход потребителей.

Деятельность фирм в окружающей экономической среде зависит от множества факторов: типа рыночной структуры, уровня спроса, степени государственного вмешательства в регулирование рынков. Поведение фирм-конкурентов можно охарактеризовать как пассивное, если конкуренты приспосабливаются к существующим условиям, будучи не в состоянии влиять на рыночную ситуацию, и активное (стратегическое). Стратегическое взаимодействие фирм становится возможным, если рыночные структуры характеризуются достаточно высокой степенью концентрации, и включает следующие инструменты: а) согласованное (кооперативное) поведение в форме явного образования картелей или «молчаливого» сговора; б) предоставления или сдерживания входа на рынок фирм-конкурентов; в) слияния и поглощения.

Рынок как механизм обмена товарами объединяет производителей и потребителей. Каждый из них самостоятельно принимает решение об участии в обмене, исходя из своих предпочтений и предлагаемых условий. Для получения представления о модели рынка необходимо описание поведения этих субъектов экономики и определение цен на рынке. Для рынка совершенной конкуренции используется концепция, предложенная Вальрасом, — концепция конкурентного равновесия. Поскольку каждый участник рынка преследует свои цели, возможны конфликтные ситуации. Для нормального функционирования экономической системы эти индивидуальные действия разных участников должны быть согласованы между собой. Такой способ согласования обеспечивается через конкурентный рыночный механизм, основанный на регулирующем действии системы цен. Цена конкурентного равновесия балансирует спрос и предложение.

Конкурентное равновесие представляет собой совместное распределение производства и потребления, при котором совокупный спрос не превосходит совокупного предложения, стоимость совокупного спроса в конкурентных ценах равна стоимости совокупного предложения в этих же ценах. При этом потребитель максимизирует свою полезность, а производитель — свою прибыль при одних и тех же ценах. Таким образом, существование конкурентного равновесия означает существование такой системы цен, при которой согласуются конфликтные интересы участников рынка. Однако концепция конкурентного равновесия дает лишь качественное определение и не дает никаких количественных критериев для оценки состояния рынка совершенной конкуренции. Кроме того, даже при существовании такого равновесия нет гарантии того, что экономическая система перейдет в это состояние. Необходимо дополнительно определить условия, при которых такой переход возможен (например, условия теоремы Эрроу–Дебре о существовании конкурентного равновесия), а также сформировать управляющее правило, при котором осуществится переход экономической системы в состояние равновесия.

Структура рынка также накладывает ограничения на поведение участников рынка и стратегии ценообразования производителей. Так, в условиях совершенной конкуренции условием конкурентного равновесия является равенство рыночной цены и предельных издержек производителя, на основе чего производитель формирует уровень производства своей продукции. Эффективность такого конкурентного равновесия проявляется в том, что оно обеспечивает оптимальное по Парето распределение ресурсов в экономической системе. Возможность эффективного распределения ресурсов является следствием того, что потребители максимизируют степень удовлетворения своих потребностей, если предельная полезность равна цене. Производители выбирают такой уровень производства, при котором предельные издержки равны цене. Таким образом, предельные общественные издержки производства продукции равны предельной полезности этой продукции. Для этого необходимо, чтобы все производители были совершенными конкурентами и отсутствовали внешние эффекты.

На рынках несовершенной конкуренции набор стратегий производителей в области ценообразования намного шире. Так, на монопольном рынке цена устанавливается на уровне средних издержек производителей. В условиях изменения средних издержек в зависимости от объемов производства могут использоваться ценовая дискриминация и установление двухчастных тарифов. Монопольный рынок невыгоден для потребителя, так как при низкой эластичности спроса по цене монополисту выгодно увеличивать цену.

На олигополистическом рынке в зависимости от однородности/неоднородности продукции, типа ограничения на производственные мощности, наличия сговора конкурентов, наличия фирмы-лидера по издержкам, наличия барьеров входа на рынок, возможны разные типы стратегического взаимодействия предприятий-конкурентов и, соответственно, разные модели, описывающие такое поведение. Это модели Бертрана, модель «лидер–последователь», модель Эджворта, модель картеля и др.

Взаимосвязь производителей и потребителей состоит в прямом воздействии производителя на спрос, формирование потребительских предпочтений, манипулирование ценой для расширения границ спроса. Эти задачи рассматриваются в рамках анализа целей, механизмов и способов ценовой дискриминации. Влияние потребителя на деятельность производителя отражается в его реакции на количественные и качественные параметры производителя и анализируется на основе влияния эластичности спроса (прямой, перекрестной), эластичности по доходу на функцию спроса.

2. Описание нелинейной экономической динамики с помощью отображений

Изучение дискретных последовательностей и описывающие их уравнения, как правило, проще, чем дифференциальные уравнения. Такие объекты, как дискретные отображения, могут демонстрировать множество нетривиальных свойств, которыми обладают реальные системы. На сегодняшний день теория отображений развита довольно глубоко [Lorenz, 1989; Кузнецов, 2006; Лоскутов, 2007; Неймарк, 2010; Кузнецов, 2012] и позволяет понять важные фундаментальные законы природы (биологии, химии, физики). Однако применение теории отображений для изучения социально-экономических систем в настоящее время не достаточно развито. Поэтому приложения этой теории к экономике позволит получить новый взгляд на протекающие в ней процессы и, быть может, вскрыть новые законы эволюции динамических экономических процессов.

В ряде работ по исследованию нелинейной динамики систем разной природы (физической, химической, биологической, экономической) было установлено, что режим динамического хаоса является типичным явлением. Хаотические свойства проявляются в самых разнообразных системах, а если хаос не обнаруживается, то причиной этому может быть существование хаоса либо в небольших областях параметрического пространства, либо вне допустимых областей значений параметров. В последнее время интенсивно развивается направление в нелинейной динамике, связанное с изучением проблем предсказуемости поведения хаотических систем, управления их динамикой и стабилизацией хаоса. Речь идет о возможностях посредством небольших воздействий существенно влиять на динамику хаотических систем, стабилизировать их поведение, переводя их траектории из хаотического режима на требуемый периодический режим функционирования.

В общем случае проблема управления динамическими системами и стабилизации хаотического поведения является частью теории управляемых процессов [Неймарк, 2010]. Под стабилизацией неустойчивого или хаотического поведения обычно подразумевается искусственное создание в системе устойчивых (в основном периодических) колебаний посредством внешних мультипликативных или аддитивных воздействий. Для стабилизации необходимо найти такие возмущения, которые вывели бы систему из хаотического режима на регулярный. Стабилизация хаотического поведения может быть осуществлена двумя качественно различными способами: без введения обратной связи и с обратной связью [Лоскутов, 2007, 2010]. Оба способа управления осуществляются с помощью параметрического или силового воздействия. Первый способ обеспечивает выведение системы из хаотического режима на регулярный посредством внешних возмущений, реализованных без обратной связи, то есть без учета текущего состояния динамических переменных системы. Этот способ часто называют подавлением хаоса, стабилизацией. Второй способ реализуется посредством корректирующего воздействия в соответствии с требуемым значением динамических переменных и использованием обратной связи как необходимого компонента динамической системы. Часто этот подход называют контролированием хаоса. Очевидно, что использование обратной связи является определенным преимуществом, так как приводит к целевому результату, при котором исследуемая система выводится на желаемый режим функционирования. Ограниченностью метода стабилизации хаоса на основе обратной связи является возможность воздействия только в ситуации, при которой изображающая точка находится вблизи выбранного цикла. В ином случае необходимо находить другие способы воздействия. Одновременно с этим методы управления хаосом без обратной связи не требуют постоянного компьютерного мониторинга состояния системы, менее подвержены воздействиям шумов, следовательно, упрощается их использование в разных приложениях.

Исследования в области управления хаосом применительно к экономическим системам проводились, например, в [Holyst, Urbanowicz, 2000; Kopel, 1997; Ahmed, Hassan, 2000; Ahmed, 2015; Feichtinger, 1992; Agliari, 2003; Puu, 1997; Stachurski, 2009; Лоскутов, 2010]. Управлять хаосом предлагалось на основе уменьшения стоимость выпускаемой продукции [Ahmed, Hassan, 2000] либо путем добавления новых аддитивных слагаемых, отвечающих дополнительным инвестициям (Holyst, Urbanowicz, 2000; Kopel, 1997), или управление подбиралось в зависимости от произошедших изменений между прошлыми и текущими значениями переменных, т. е. при эффективном использовании обратной связи [Kopel, 1997; Ahmed, Hassan, 2000].

3. Математическая модель рыночного ценообразования

Предлагается модель, описывающая динамику цен на олигополистическом рынке, на котором I фирм-производителей (I не велико) предлагают дифференцированный продукт, который у разных фирм может иметь разные свойства, или потребитель отдает предпочтение определенному производителю. Каждый i-й производитель характеризуется функцией издержек $C_i(q)$ с неубывающими предельными издержками для $q \in [0; V_i]$, где V_i — его производственная мощность.

Цена, по которой i-й производитель реализует свой продукт, обозначим через p_i. Спрос на продукт характеризуется набором функций конкурентного спроса $q_i(p)$. Тогда функция выигрыша i-го производителя определяет его прибыль $\Pi_i(p) = (p_i - c_i) q_i(p)$, где $c_i > 0$ — удельные затраты, являются постоянными для любого объема выпуска. Будем считать, что каждый производитель стремится максимизировать свою прибыль и на основе этого критерия изменяет свою цену. Цены определяют набор стратегий $p = (p_i, i \in I)$.

Относительно функций спроса $q_i(p)$ будем предполагать, что они удовлетворяют следующим условиям:

1) положительны и ограничены сверху: $0 \le q_i(p) \le A = \mathrm{const}$;

2) функции $q_i(p)$ и их первые производные непрерывны по своим переменным, а вторые производные положительны и непрерывны;

3) спрос на продукцию i-го производителя убывает с ростом цены: $\dfrac{\partial q_i}{\partial p_i} < 0$ для любых $i = \overline{1, I}$;

4) спрос стремится к нулю при стремлении цены к бесконечности: $q_i(p) \to 0$, если $p \to \infty$;

5) ограничение на характер убывания функции спроса $\left|\dfrac{q_i}{\partial q_i / \partial p_i}\right| < M_i$, то есть производная $\partial q_i / \partial p_i$ стремится к нулю не быстрее, чем функция $q_i(p)$.

Взаимодействие в модели соответствует игре в нормальной форме $\Gamma_C = \left\langle I, \left[0, p(q)\right], \Pi_i(p), q_i \in \left[0, V_i\right] \right\rangle$. Вектор цен $p^* = \left(p_i^*, i \in I\right)$ является локальным равновесием Нэша (локально устойчивым по Нэшу) в игре Γ_C, если удовлетворяет следующим условиям локальных условных максимумов функции прибыли: $\dfrac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = 0$ и $\dfrac{\partial^2 \Pi_i}{\partial (p_i)^2} < 0$. Стратегией i-го производителя является изменение цены p_i пропорционально изменению своей прибыли с некоторым постоянным коэффициентом $k_i > 0$ с целью максимизации своей эффективности, то есть в достижение локального устойчивого равновесия по Нэшу. Далее рассматривается дуополия, а ценовая динамика фирм будет представлена в виде двумерного отображения — модели, в которой цены связаны рекуррентными соотношениями.

Процесс моделирования динамики рыночных цен и управления принятием согласованных решений в области формирования цен в условиях стратегического взаимодействия фирм представлен в виде последовательности этапов.

1. Оценка функции спроса на продукцию. Функция спроса определяется как решение задачи потребителя, максимизирующего свою полезность при бюджетном ограничении.

2. Формирование модели конкурентного взаимодействия производителей на основе введения адаптационного механизма.

3. Определение цен, локально равновесных по Нэшу в условиях стратегического взаимодействии фирм.

4. Анализ устойчивости локально равновесных по Нэшу цен. Вычисление матрицы Якоби, вычисление старшего ляпуновского показателя, построение бифуркационных диаграмм в пространствах параметров модели, построение аттракторов системы.

5. Реализация адаптационного механизма, основанного на изменении цен, пропорционального скорости изменения прибылей фирм.

Оценка функции спроса

Функцию спроса потребителя, то есть зависимость цены от объемов потребляемой продукции, можно получить на основании эмпирической информации об объемах продаж и средних цен эконометрически, восстановив кривую $Q = f(p)$. В этом случае возникают проблемы сбора достоверной информации, характеризующей рынок. Другим вариантом восстановления функции спроса является решение задачи потребителя, который максимизирует свою полезность при ограничении на доходы (бюджетное ограничение). В рамках настоящего исследования в качестве функции полезности используется функция полезности с постоянной эластичностью замены благ (CES-функция), которая довольно часто применяется в эмпирических исследованиях [Puu, 2003].

Придерживаясь модели Бертрана с дифференцированным продуктом, положим q_1, q_2 — объемы производства двух различных производителей. Полезность потребителя в виде CES-функции имеет вид

$$U(q_1, q_2) = q_1^\beta + q_2^\beta, \quad 0 < \beta \le 1. \tag{1}$$

Потребитель максимизирует функцию полезности (1) при бюджетном ограничении:

$$p_1q_1 + p_2q_2 = 1. \tag{2}$$

Лемма 1. Спрос на продукцию первого и второго производителей определяются формулами

$$q_1 = \frac{p_2^{\gamma}}{p_1\left(p_1^{\gamma} + p_2^{\gamma}\right)}, \quad \text{где } \gamma = \frac{\beta}{1-\beta}, \tag{3}$$

$$q_2 = \frac{p_1^{\gamma}}{p_2\left(p_1^{\gamma} + p_2^{\gamma}\right)}, \quad \text{где } \gamma = \frac{\beta}{1-\beta}. \tag{4}$$

Доказательство. Задача (1)–(2) является задачей на условный экстремум, которая сводится к нахождению безусловного экстремума функции Лагранжа:

$$L\left(q_1, q_2, \lambda\right) = q_1^{\beta} + q_2^{\beta} - \lambda\left(1 - p_1q_1 - p_2q_2\right). \tag{5}$$

Необходимые условия первого порядка — равенства нулю частных производных — имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = \beta q_1^{\beta-1} - \lambda p_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = \beta q_2^{\beta-1} - \lambda p_2 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - p_1q_1 - p_2q_2. \end{cases} \tag{6}$$

Решая первые два уравнения системы (6) относительно q_1 и q_2, получим

$$q_1 = \left(\frac{\lambda}{\beta}p_1\right)^{\frac{1}{\beta-1}}, \quad q_2 = \left(\frac{\lambda}{\beta}p_2\right)^{\frac{1}{\beta-1}}, \tag{7}$$

откуда

$$\frac{q_1}{q_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}. \tag{8}$$

Из третьего уравнения системы (6) выразим q_2: $q_2 = \dfrac{1 - p_1q_1}{p_2}$ и, подставив его в (6), получим выражение для $q_1 = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\beta-1}} \cdot \dfrac{1 - p_1q_1}{p_2}$, из которого величина спроса на продукцию первого производителя q_1 может быть определена как $q_1 = \dfrac{p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}}\left(1 - p_1q_1\right)}{p_1^{\frac{1}{1-\beta}}}$, и, далее,

$$q_1 = \frac{p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{p_1p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}} + p_1^{\frac{1}{1-\beta}}} = \frac{p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}}}{p_1\left(p_2^{\frac{\beta}{1-\beta}} + p_1^{\frac{\beta}{1-\beta}}\right)}, \text{ или } q_1 = \frac{p_2^{\gamma}}{p_1\left(p_1^{\gamma} + p_2^{\gamma}\right)}, \quad \text{где } \gamma = \frac{\beta}{1-\beta}.$$

Аналогично спрос на продукцию второго производителя q_2 определяется в виде $q_2 = \dfrac{p_1^\gamma}{p_2\left(p_1^\gamma + p_2^\gamma\right)}$, где $\gamma = \dfrac{\beta}{1-\beta}$.

Модель конкурентного взаимодействия производителей. Оценка равновесных цен

Параметр β в функции полезности (1) представляет собой степень заменяемости между двумя продуктами. В случае $\beta = 1$ функция полезности отражает предпочтения потребителей, которые считают продукты полностью взаимозаменяемыми, то есть неразличимыми. Уменьшение значения параметра β до нуля соответствует снижению степени заменяемости продуктов, а в пределе при $\beta \to -\infty$ продукты становятся взаимодополняемыми. При использовании CES-функции параметр β связан с эластичностью замещения продуктов. Необходимо также отметить, что чем выше дифференциация продукта, то есть чем менее заменяемыми являются продукты разных производителей по представлению потребителей, тем в меньшей степени ценовое поведение одного производителя будет влиять на ценовую стратегию другого производителя.

Предположим, что в рассматриваемой задаче продукты не являются близкими заменителями, проанализируем конкурентное поведение производителей в динамике для $\beta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 1$. В этом случае выражения для кривых спроса q_1 и q_2 примут вид $q_1 = \dfrac{p_2}{p_1}\dfrac{1}{p_1 + p_2}$, $q_2 = \dfrac{p_1}{p_2}\dfrac{1}{p_1 + p_2}$. Также положим, что обе фирмы имеют постоянные средние издержки c_i, а функция совокупных издержек определяется как $C_i\left(q_i\right) = c_i q_i$, $i = 1,2$. Тогда функция прибыли каждой фирмы будет равна

$$\Pi_i\left(p_i\right) = p_i q_i - c_i q_i = \frac{p_j}{p_i}\frac{1}{p_i + p_j}\left(p_i - c_i\right), \quad i, j = 1,2, \quad i \neq j.$$

Будем считать, что каждая фирма использует в динамике следующий механизм адаптации (изменения) своей цены пропорционально изменению предельной прибыли $\dfrac{\partial \Pi_i}{\partial p_i}$ [Неймарк, 1999; Островский, 2000; Puu, 2003; Ferguson, 2005; Ahmed, 2014]. В каждый период времени $(t+1)$ фирма принимает решение по увеличению (уменьшению) своей цены, если в предыдущий момент времени t предельная прибыль является положительной (отрицательной) в соответствии со следующим механизмом:

$$p_i\left(t+1\right) = p_i\left(t\right) + k_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i}, \tag{9}$$

где k_i — постоянный коэффициент, отражающий скорость адаптационного процесса; k_i есть суть управления, целью которого является приведение рынка к равновесному состоянию, локально оптимального по Нэшу.

Предельная прибыль каждого производителя в периоде t имеет вид

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = \frac{\left(p_i^2 p_j - 2c_1 p_i p_j - c_i p_j^2\right)}{p_i^2\left(p_i + p_j\right)^2}, \quad i, j = 1,2, \quad i \neq j. \tag{10}$$

Подставив (10) в (9), получаем отображение

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t) + k_1 \dfrac{\left(-p_1^2(t)\, p_2(t) + 2c_1 p_1(t)\, p_2(t) + c_1 p_2^2(t)\right)}{\left(p_1^2(t) + p_1(t)\, p_2(t)\right)^2}, \\ p_2(t+1) = p_2(t) + k_2 \dfrac{\left(-p_1(t)\, p_2^2(t) + 2c_2 p_1(t)\, p_2(t) + c_2 p_1^2(t)\right)}{\left(p_2^2(t) + p_1(t)\, p_2(t)\right)^2}. \end{cases} \tag{11}$$

Система (11) является игрой, в которой цены в период $(t+1)$ определяются через цены периода t с учетом механизма адаптации. Неподвижная точка игры (11) определяется исходя из решения системы уравнений

$$\begin{cases} p_1^2 p_2 - 2c_1 p_1 p_2 - c_1 p_2^2 = 0, \\ p_1\, p_2^2 - 2c_2 p_1 p_2 - c_2 p_1^2 = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Система уравнений (12) определяет кривые реакции фирм, решение которой выявляет оптимальные цены каждой фирмы. Совокупность этих цен составляет локальное равновесие по Нэшу $p = p_1^* = p_2^*$, так как предельные прибыли обоих производителей в этой точке обращаются в нуль.

Разделив первое уравнение в (12) на $p_2 \neq 0$, а второе на $p_1 \neq 0$, получим

$$\begin{cases} p_1^2 - 2c_1 p_1 - c_1 p_2 = 0, \\ p_2^2 - 2c_2 p_2 - c_2 p_1 = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения получившейся системы найдем p_1, а из второго — p_2. Для p_1: $D = 4c_1^2 + 4c_1 p_2$, тогда $p_{1(1,2)} = \dfrac{2c_1 \pm \sqrt{4c_1^2 + 4c_1 p_2}}{2}$, $p_{1(1)} = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_1 p_2}$, второй корень не рассматривается, так как цена не может быть установлена ниже средних издержек.

Аналогично для p_2: $p_{2(1)} = c_2 + \sqrt{c_2^2 + c_2 p_1}$.

Равновесие по Нэшу, характеризующееся парой цен p_1^* и p_2^*, является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} p_1^* = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_1 p_2^*}, \\ p_2^* = c_2 + \sqrt{c_2^2 + c_2 p_1^*}. \end{cases} \tag{13}$$

Анализ устойчивости равновесных по Нэшу цен

Итак, модель конкурентного взаимодействии фирм может описываться двумерной системой разностных уравнений (11), где $p_1(t), p_2(t)$ представляют цены фирм, взятые через дискретные интервалы времени t; вторые слагаемые в обоих уравнениях показывают, как осуществляется изменение цен в период t и как это изменение повлияет на цену в следующем $(t+1)$ периоде. Строго говоря, параметры k_1 и k_2 характеризуют прирост цен за счет изменения ценовой политики.

Далее проведем анализ эволюции динамики системы (11) в зависимости от значений параметров k_1, k_2 c_1, c_2 — наличие областей стабильности, бифуркаций, хаоса. Это можно сделать на основе таких известных аналитических и графических критериев динамического хаоса

[Шустер, 1988; Кузнецов, 2006; Лоскутов, 2007], как характеристический показатель Ляпунова, бифуркационные диаграммы, построение аттракторов системы при вариации ее параметров. Затем, для того, чтобы управлять поведением системы на основе выявленных закономерностей, необходимо подобрать такой способ изменения ее параметров, чтобы можно было вывести функционирование системы на необходимый режим. На уровне каждой фирмы это означает управление ее издержками c_i и слежением за изменением прибыли за отчетный период и выбор соответствующей реакции k_i. Практически это означает такое варьирование параметров управления, которое приводит обе фирмы к сбалансированности интересов, то есть к равновесию по Нэшу.

С экономической точки зрения это означает, что фирмы выбирают такой режим функционирования, который приведет к изменению ситуации на рынке, в результате чего уровни цен начнут эволюционировать предсказуемо, периодически. Если такое управление допустимо, то осуществляется такой переход к равновесному состоянию рынка, при котором каждая из фирм будет в среднем более эффективна.

Отметим, что неподвижная точка (p_{10}, p_{20}) системы двумерного отображения (11) определяется исходя из решения системы $\begin{cases} p_{10} = f(p_{10}, p_{20}), \\ p_{20} = g(p_{10}, p_{20}), \end{cases}$ которое, очевидно, будет совпадать с решением системы (12). Поэтому неподвижная точка системы (11) совпадает с равновесием по Нэшу, определенным для конкурентного взаимодействия фирм. Характер устойчивости неподвижной точки, как известно, определяется ее мультипликаторами. В свою очередь, мультипликаторы являются собственными числами матрицы возмущений (матрицы Якоби) и их число равно размерности отображения. Для двумерных отображений известен удобный в методическом плане подход, в рамках которого бифуркационный анализ, а также анализ устойчивости производится на плоскости параметров — инвариантов матрицы Якоби [Кузнецов, 2012]. Для двумерного отображения это след и якобиан матрицы Якоби.

Матрица Якоби динамической системы (11) в неподвижной точке имеет вид

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_{p_1} & f'_{p_2} \\ g'_{p_1} & g'_{p_2} \end{pmatrix}_{(p_{10}, p_{20})}. \tag{14}$$

Собственные числа этой матрицы представляют собой мультипликаторы отображения (13) μ_1 и μ_2, для которых справедливо соотношение $\mu^2 - S\mu + J = 0$, где S и J — два инварианта матрицы Якоби, ее след и якобиан, при этом $S = \mu_1 + \mu_2$, $J = \mu_1 \cdot \mu_2$. В соответствии с треугольником устойчивости [Кузнецов, 2012] условия устойчивости неподвижной точки имеют вид

$$\begin{cases} 1 - S + J > 0, \\ 1 + S + J > 0, \\ J < 1. \end{cases} \tag{15}$$

Исследуем матрицу Якоби системы (13) и выявим характер устойчивости ее неподвижной точки. Матрица Якоби в произвольной точке (p_1, p_2) примет вид $\hat{M} = \begin{pmatrix} f'_{p_1} & f'_{p_2} \\ g'_{p_1} & g'_{p_2} \end{pmatrix}_{(p_1, p_2)}$, где

$$f'_{p1} = \frac{k_1(2c_1p_2 - 2p_1p_2)}{(p_1^2 + p_1p_2)^2} - \frac{2k_1(2p_1 + p_2)(2c_1p_1p_2 + c_1p_2^2 - p_1^2p_2)}{(p_1^2 + p_1p_2)^3} + 1,$$

$$f'_{p2} = \frac{k_1(-p_1^2 + 2c_1p_1 + 2c_1p_2)}{(p_1^2 + p_1p_2)^2} - \frac{2k_1p_1(2c_1p_1p_2 + c_1p_2^2 - p_1^2p_2)}{(p_1^2 + p_1p_2)^3},$$

$$g'_{p1} = \frac{k_2\left(-p_2^2 + 2c_2 p_2 + 2c_2 p_1\right)}{\left(p_2^2 + p_1 p_2\right)^2} - \frac{2k_2 p_{21}\left(c_2 p_1^2 - p_1 p_2^2 + 2c_2 p_1 p_2\right)}{\left(p_2^2 + p_1 p_2\right)^3},$$

$$g'_{p2} = \frac{k_2\left(2c_2 p_1 - 2p_1 p_2\right)}{\left(p_2^2 + p_1 p_2\right)^2} - \frac{2k_2\left(2p_2 + p_1\right)\left(2c_2 p_1 p_2 + c_2 p_1^2 - p_2^2 p_1\right)}{\left(p_2^2 + p_1 p_2\right)^3} + 1. \tag{16}$$

Очевидно, аналитическое представление этой матрицы в неподвижной точке $\left(p_{10}, p_{20}\right)$ и установление областей ее устойчивости является довольно сложным, поэтому в дальнейшем будем исследовать устойчивость динамической системы численно.

4. Численные эксперименты

Определение равновесных по Нэшу цен p_1^* и p_2^*, выявление условий достижения и сохранения этого равновесия при заданных издержках.

Зафиксируем значения себестоимостей c_1, c_2 на уровне 0.1 и 0.15 соответственно и определим равновесные по Нэшу цены (13): $p_1^* = 0.33$; $p_2^* = 0.42$. Матрица Якоби (14) в этой точке будет иметь вид $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1-3.1k_1 & 0.69k_1 \\ 0.5k_2 & 1-1.77k_2 \end{pmatrix}_{\left(p_1^*, p_2^*\right)}$, для которой характеристический полином $\mu^2 - S\mu + J = 0$ имеет след и якобиан: $S = 2 - 1.77k_2 - 3.1k_1$, $J = \left(1-3.1k_1\right)\left(1-1.77k_2\right) - 0.345k_1k_2 = 1 - 3.1k_1 - 1.77k_2 + 5.142k_1k_2$.

Условия устойчивости найденного равновесия сформулированы системой (15). Решив эту систему относительно k_1 и k_2, получим диапазон изменения скоростей адаптации k_1 и k_2 для равновесия по Нэшу (0.33; 0.42): $\begin{cases} 5.142k_1k_2 - 1 > 0, \\ 5.142k_1k_2 - 6.2k_1 - 3.54k_2 + 4 > 0, \\ 1 - 3.1k_1 - 1.77k_2 + 5.142k_1k_2 < 1. \end{cases}$

Решение данной системы неравенств, определяющих треугольник устойчивости для неподвижной точки двумерного отображения цен (11), показано на рис. 2.

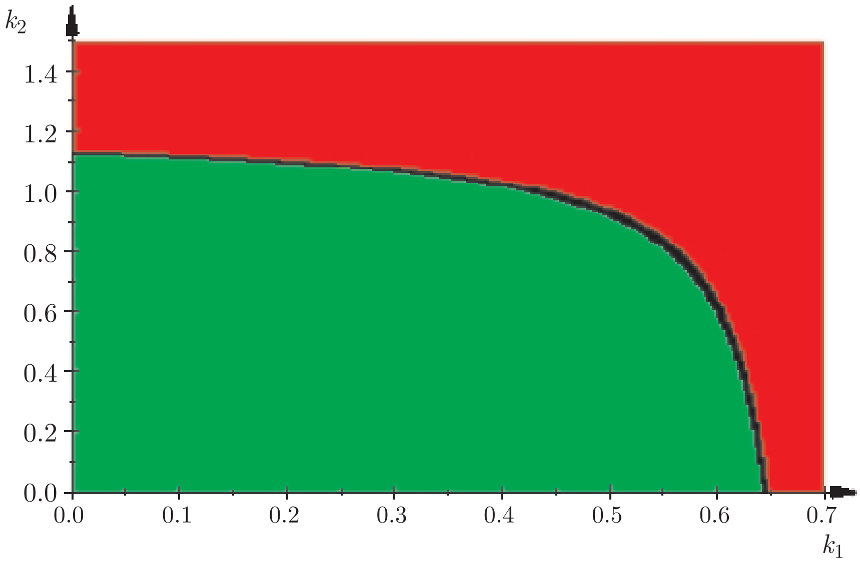

Рис. 2. Область допустимых значений адаптационных параметров

Таким образом, выявлена область допустимых значений адаптационных ценовых параметров k_1 и k_2 (на рис. 2 выделена зеленым цветом). Обеспечить устойчивость ценовому равновесию по Нэшу (0.33; 0.42) в условиях заданных значений себестоимостей фирм на уровне 0.1 и 0.15 позволит использование фирмами такой стратегии адаптации, которая основана на множестве сочетаний адаптационных параметров, находящихся в зоне допустимых значений. Как только их значения отклоняются от допустимых, происходит потеря устойчивости равновесия и переход к другому неустойчивому режиму — хаотическому. То есть какая бы ни была первоначальная цена у конкурента или самой фирмы, они достигнут равновесия по Нэшу, если будут использовать ценовую стратегию в соответствии с найденными значения адаптационных ценовых характеристик. Эти характеристики не способны изменить ценового равновесия по Нэшу, поэтому для увеличения своей эффективности фирмы должны использовать предлагаемое адаптивное управление.

Определение параметров системы, способствующих переходу от периодического поведения к хаотическому.

Как было показано выше, исследование устойчивости решения системы (11) аналитически не представляется возможным из-за сложности выражений, входящих в систему. В зависимости от параметров k_1, k_2, c_1, c_2 решение данной системы может быть регулярным или хаотическим. Для комплексного численного изучения поведения решения системы и динамических режимов, в которых может находиться система, положим $\beta = \frac{1}{2}$, $k_1 = 0.9$, $k_2 = 1$, $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.15$. Примем также следующие начальные условия: $p_{10} = 0.3$, $p_{20} = 0.31$. Исходные временные ряды рыночных цен, порождаемые системой (11), имеют вид, рис. 3.

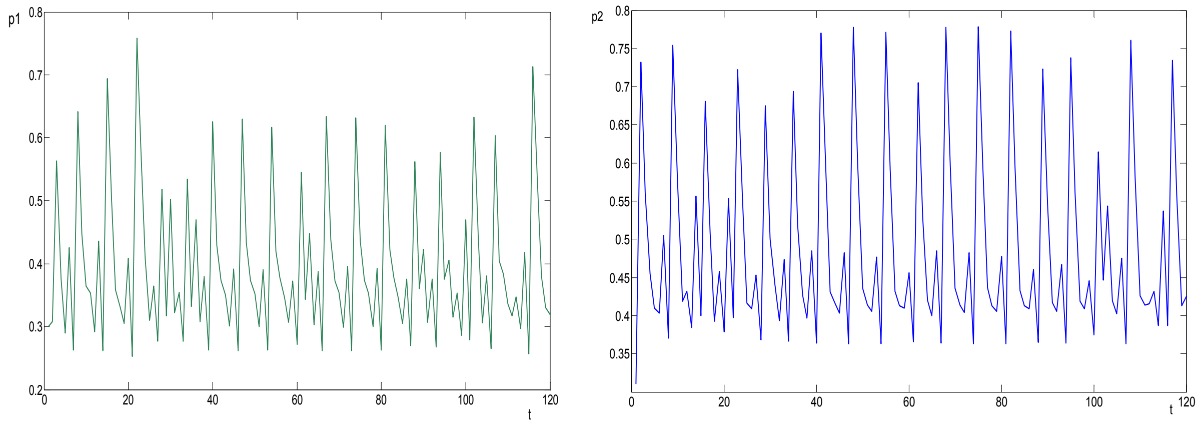

Рис. 3. Хаотическая динамика рынка при следующих значениях параметров: $k_1 = 0.9, k_2 = 1, c_1 = 0.1, c_2 = 0.15$

Наличие разных режимов эволюции рыночных цен иллюстрирует бифуркационная диаграмма (дерево Фейгенбаума) от параметра k_1 (рис. 4).

Наблюдается следующая последовательность режимов. Сначала имеется неподвижная точка при значениях $k_1 < 0.61$, т. е. Нэш-равновесие ценовой модели является устойчивым. Затем возникает синхронный режим периода два при $k_1 \in (0.61, 0.8)$. При дальнейшем росте управляющего параметра 2-цикл испытывает удвоение периода и далее возникает сложный, неповторяющийся процесс — динамический хаос. Белые просветы на диаграмме характеризуют окна периодичности. Аналогичный сценарий эволюции цен происходит при изменении другого управляющего параметра — издержек c_i. Бифуркационная диаграмма цены первой фирмы p_1 относительно ее себестоимости c_1 представлена на рис. 5.

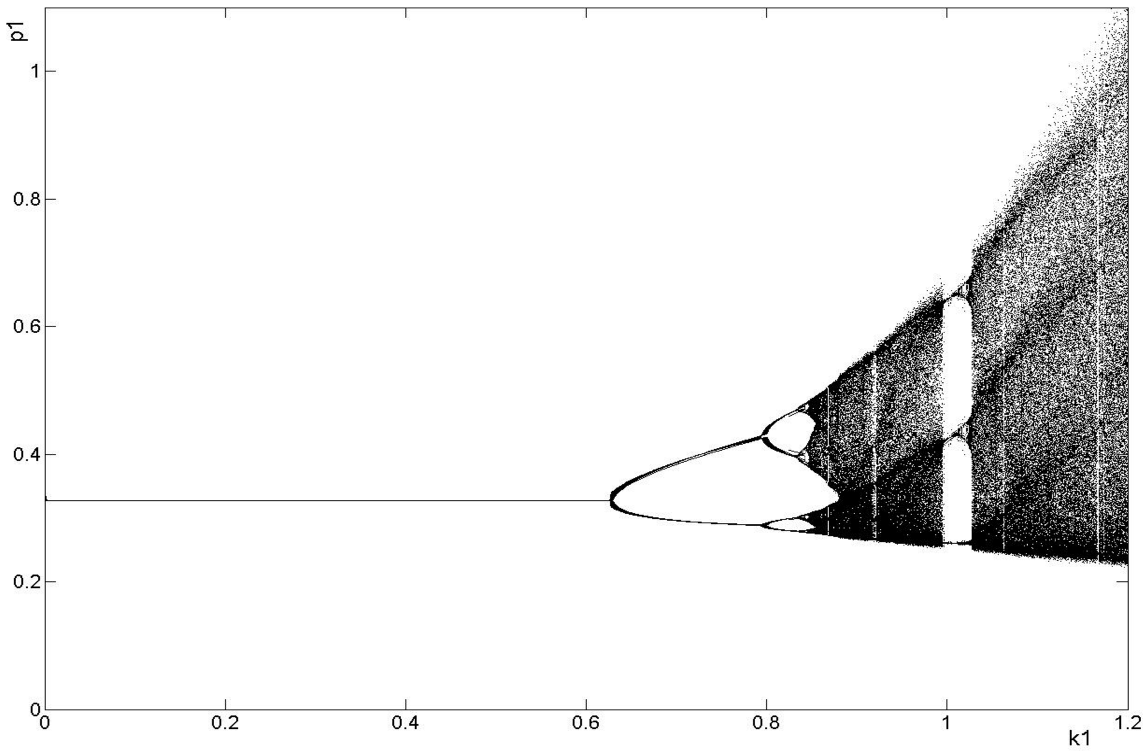

Рис. 4. Бифуркационная диаграмма ценовой модели в зависимости от изменений параметра k_1 ($k_2 = 1$, $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.15$)

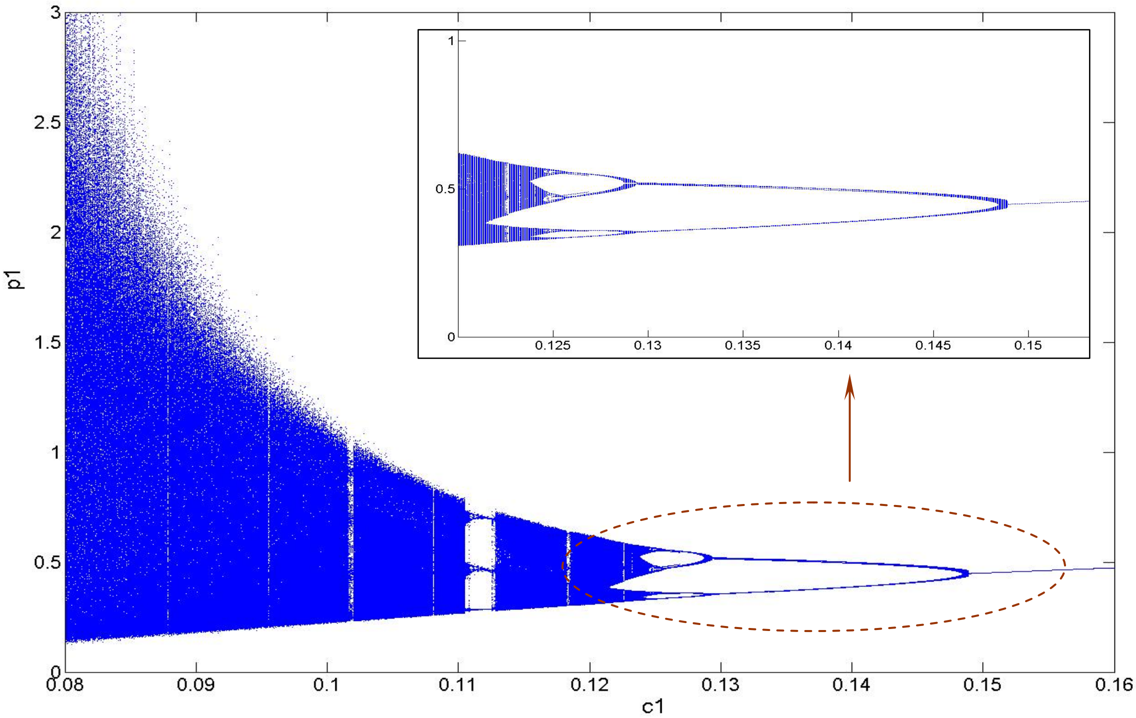

Рис. 5. Бифуркационная диаграмма ценовой модели в зависимости от изменений параметра c_1 ($k_1 = 1.2$, $k_2 = 0.1$, $c_2 = 0.15$)

Если предполагается снижать удельные затраты c_1, в этом случае возможна потеря устойчивости и возникновение бифуркации удвоения периода на уровне затрат $c_1 = 0.149$. Далее происходит бифуркация удвоения периода, и фирма для достижения одного и того же значения своей эффективности при заданном уровне затрат в диапазоне $c_1 \in (0.13, 0.49)$ может устанавливать две разные цены. Например, при удельных затратах на определенную продукцию $c_1 = 0.14$ возможно установить для этой продукции два уровня цены: 0.35 и 0.65 без потери эффективности.

Рис. 6 демонстрирует хаотический аттрактор динамической системы (11) при значения ценовых адаптационных параметров: $k_1 = 1,\ k_2 = 1.15$. Хаотическое поведение динамической системы цен определяется свойством нелинейности этой системы и проявляется в экспоненциально быстром расхождении первоначально близких траекторий в ограниченной области фазового пространства. Хаотический характер динамики системы цен обусловлен неустойчивостью фазовых траекторий, ростом малого начального возмущения во времени, перемешиванием элементов фазового объема и, как следствие, приводит к непредсказуемости поведения системы на длительных временных интервалах.

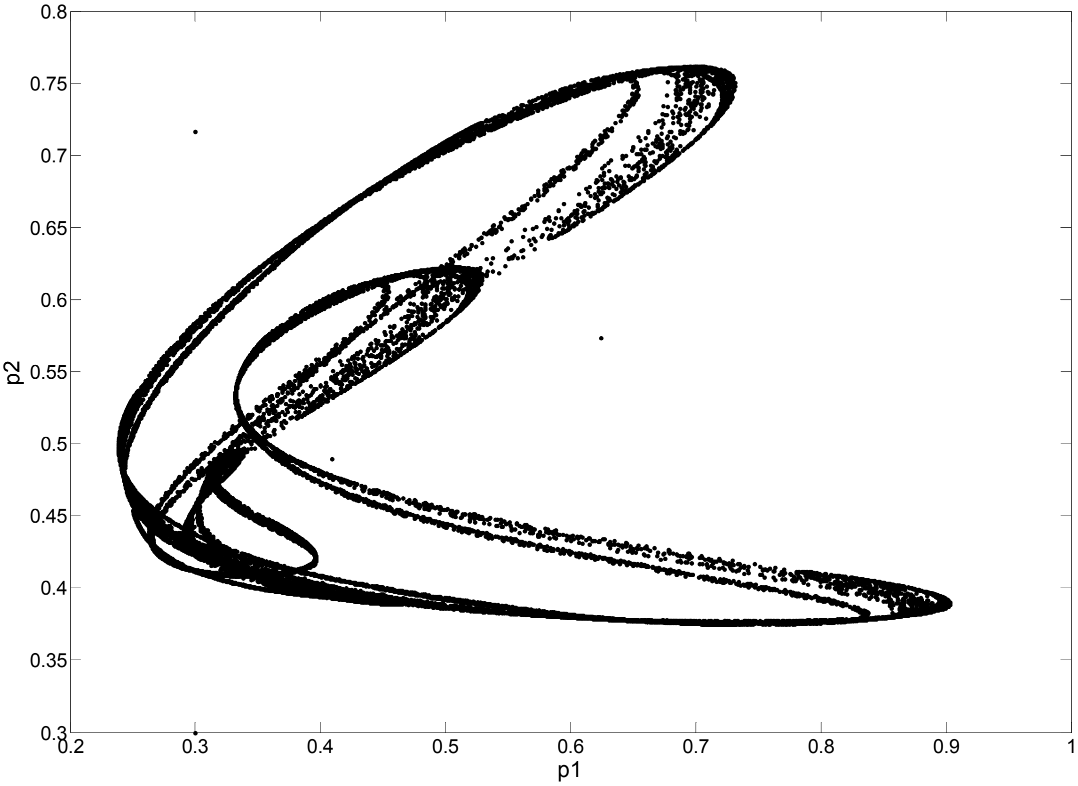

Рис. 6. Хаотический аттрактор системы (11) при $k_1 = 1.01, k_2 = 1, c_1 = 0.1, c_2 = 0.15$

Рис. 6 демонстрирует хаотический аттрактор динамической системы (11) при значения ценовых адаптационных параметров: $k_1 = 1, k_2 = 1.15$. Хаотическое поведение динамической системы цен определяется свойством нелинейности этой системы и проявляется в экспоненциально быстром расхождении первоначально близких траекторий в ограниченной области фазового пространства. Хаотический характер динамики системы цен обусловлен неустойчивостью фазовых траекторий, ростом малого начального возмущения во времени, перемешиванием элементов фазового объема и, как следствие, приводит к непредсказуемости поведения системы на длительных временных интервалах.

Для исследования поведения моделируемой системы цен необходимо установить области, где она проявляет регулярные и хаотические свойства. Для этого можно использовать известные критерии динамического хаоса: показатели Ляпунова, автокорреляционную функцию и спектральную плотность, энтропию Колмогорова. Поскольку хаотичность является следствием неустойчивости фазовых траекторий, так, что близкие траектории с течением времени расходятся, представляется вполне естественным в качестве одного из таких критериев выбрать именно меру разбегания фазовых траекторий системы.

Анализ устойчивости траекторий ценовой модели по Ляпунову

Из теории нелинейной динамики и динамического хаоса известно, что критерием хаоса является присутствие положительного старшего характеристического ляпуновского показателя. Ляпуновский показатель является важной характеристикой системы, позволяет определить тип ее динамики (периодический, непериодический).

Для одномерных отображений вида $x_{n+1} = f(x_n)$ ляпуновский показатель можно рассчитать как предел среднего логарифма производной функции $f(x_n)$: $\Lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \ln\left|f'(x_i)\right|$. Для многомерных отображений ляпуновские показатели можно ввести через матрицу эволюции малых возмущений (матрицу Якоби) и ее собственные числа [Farmer, 1983; Мун, 1990].

Для N-мерного отображения вида $x_{n+1} = f(x_n)$, где x — вектор в N-мерном фазовом пространстве, n — дискретное время. Имеем две близкие траектории, порождаемые N-мерным отображением при немного различающихся условиях x_n и $y_n = x_n + \tilde{x}_n$. Подставив выражение для y в исходное отображение и разложив правую часть в ряд Тейлора по $\tilde{x}$, получим $x_{n+1} + \tilde{x}_{n+1} = f(x_n) + a(x_n)\tilde{x}_n + \ldots$, где a — есть матрица частных производных от компонент векторной функции $f(x)$ по компонентам вектора x: $a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$.

В общем случае можно найти собственные числа матрицы a и расположить их в порядке $j_1(n) \ge j_2(n) \ge \ldots \ge j_N(n)$, где $j_k(n)$ — абсолютные величины собственных значений. Тогда показатели Ляпунова можно определить с помощью предельного перехода:

$$\lambda_i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln j_i(n). \tag{17}$$

Для непериодических режимов ляпуновский показатель, как правило, находится численно. Расчет по формуле (17) осуществляется путем замены при достаточно большом числе итераций n предела при $n \to \infty$ вычислением суммы. Полученный таким образом график зависимости ляпуновского показателя для отображения (13) от параметра k_1 приведен на рис. 7.

На графиках рис. 6 отчетливо видно, что до тех пор, пока в системе реализуются периодические режимы, ляпуновский показатель отрицателен. По графику ляпуновского показателя также можно зафиксировать точки бифуркаций удвоения: в этих точках показатель обращается в ноль. Появлению же непериодического режима соответствует положительный ляпуновский показатель. Возникает интересная ситуация. С одной стороны, ляпуновский показатель положителен и режим неустойчив: две изначально близкие траектории с течением времени экспоненциально расходятся. С другой стороны, значения переменной остаются конечными. Возникающий режим можно идентифицировать как динамический хаос. При этом необходимо отличать непериодические и хаотические режимы. Любой хаотический режим всегда является непериодическим, однако не всякий непериодический режим является хаотическим.

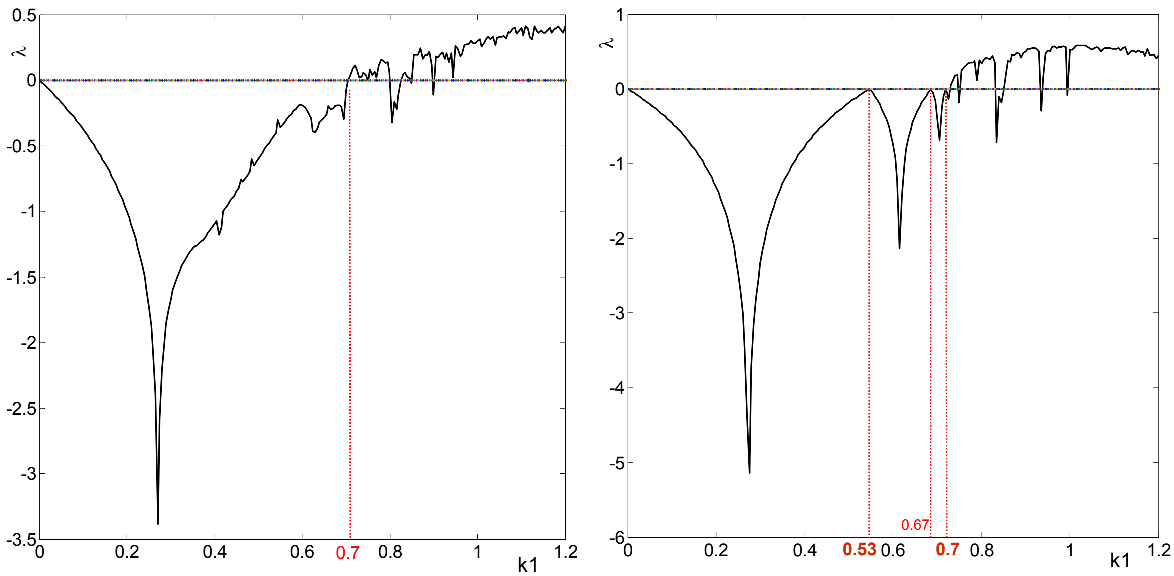

Рис. 7. Графики старшего ляпуновского характеристического показателя ценовой модели, построенные при значениях $k_2 = 1.2$ (слева) и $k_2 = 0$ (справа)

Наличие в исследуемой системе положительного ляпуновского показателя и реализация режима динамического хаоса приводят к тому, что динамическая система цен является полностью детерминированной, для которой можно на основе задания точного текущего значения динамической переменной абсолютно точно определить значение этой переменной в любой последующий момент времени. Однако абсолютно точное задание значений переменной ни в условиях реального функционирования системы, ни в численном эксперименте принципиально невозможно из-за ограниченности разрядности используемой переменной. Поэтому значение переменной можно определить лишь с некоторой погрешностью. Если ляпуновский показатель отрицателен, то при моделировании динамики системы эта погрешность будет убывать, то есть значения переменных через некоторый интервал времени оцениваются примерно с той же погрешностью, с которой были заданы начальные условия, и получаемая в ходе эксперимента информация вполне адекватно опишет динамику системы. В противном случае, если ляпуновский показатель положителен, погрешность задания начальных условий будет сильно нарастать и через некоторый интервал времени даже при очень небольшой начальной погрешности величина исследуемой переменной может стать сравнимой с размером области, в которой варьируются все значения переменной. Это приводит к ситуации, в которой полученные в ходе такого эксперимента значения переменных уже не несут значимой информации о динамике траектории системы, исходящей из конкретной начальной точки, т. е. поведение системы является непредсказуемым. В этом состоит суть проявления режима динамического, или детерминированного, хаоса.

Области хаотичности в пространстве параметров k_1 и k_2 при фиксированных c_1, c_2 представлены на рис. 8.

Анализ карты старшего ляпуновского показателя показывает следующее. На карте хорошо видна граница между областями хаотических и нехаотических (регулярных) режимов: хаосу соответствует положительный ляпуновский показатель, регулярным режимам — нулевой и отрицательный. При выбранной палитре темному цвету соответствуют очень большие отрицательные значения ляпуновских показателей. Мультипликатор отображения при этом также близок к нулю, поэтому на этих линиях реализуются режимы максимальной устойчивости.

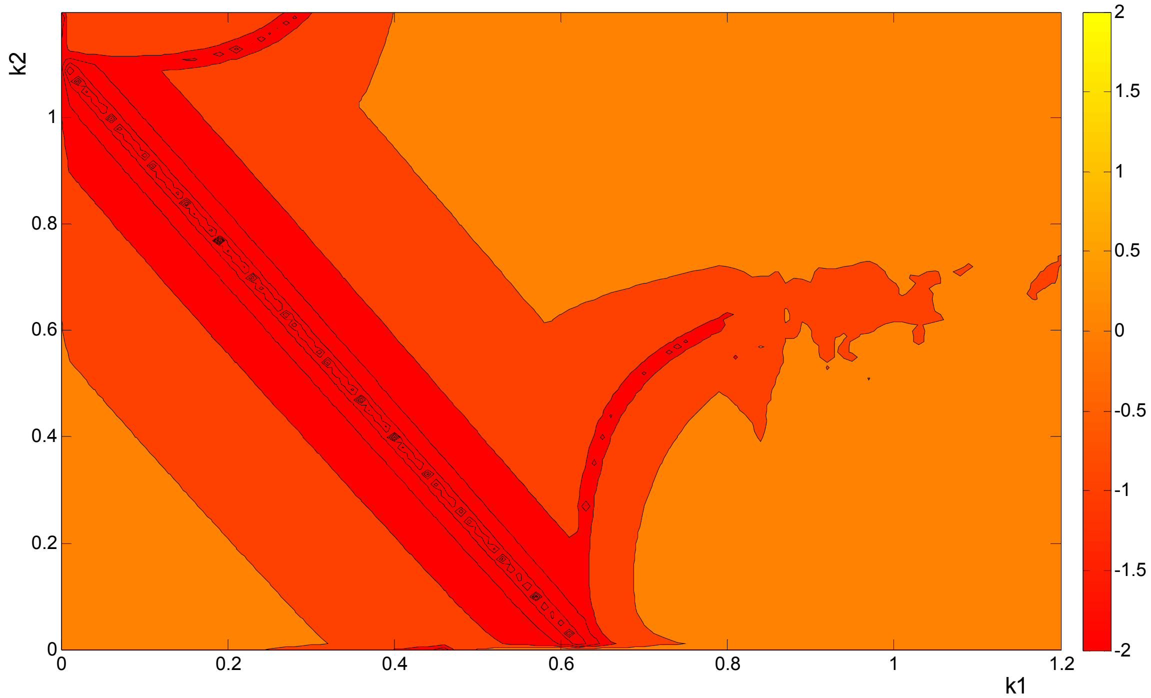

Рис. 8. Карта распределения старшего ляпуновского показателя на плоскости параметров k_1 и k_2 ценовой модели $(c_1 = 0.1,\ c_2 = 0.15)$

На основе карты ляпуновских показателей выявлены режимы максимальной устойчивости. Для первой фирмы это отражается в том, что с ростом скорости реакции изменений ценовой политики, начиная со значения $k_2 = 0.6$ второй фирмы, первая должна реагировать пропорционально. Самые устойчивые ценовые стратегии наблюдаются при взвешенной ценовой политике обеих фирм. В условиях, когда вторая фирма начинает агрессивную ценовую войну и ее значение $k_2 > 0.8$, первая фирмы, поступая аналогичным образом, рискует погрузить весь рынок в хаос. Поэтому мониторинг карты старшего ляпуновского показателя является залогом устойчивого развития рынка.

Заключение

Итак, описание стратегического ценообразования фирм с применением теоретико-игрового подхода и методов нелинейной динамики позволяет получить новый взгляд на динамику процесса конкурентного взаимодействия фирм на рынке. В работе показано, что динамическая система рыночного ценообразования может обладать сложными и многообразными типами движений, в результате структура ее фазового пространства и зависимость этой структуры от параметров являются очень сложными. По структуре разбиения фазового пространства на траектории выделены два основных типа динамического поведения системы: устойчивость–неустойчивость и синхронность–хаотичность.

Исследование нелинейной динамической модели рынка осуществлено с использованием теории нелинейной динамики, теории бифуркаций. Это дало возможность проведения качественного анализа свойств системы с помощью особых точек фазового пространства (неподвижных точек), анализа траекторий вблизи этих неподвижных точек.

Динамика рыночных цен смоделирована с помощью двумерного отображения, при этом согласование ценовых решений фирм осуществляется на основе мониторинга устойчивости равновесия по Нэшу. Как было показано в работе, оно в разработанной модели совпадает с неподвижной точкой отображения цен. Поэтому анализ устойчивости равновесия по Нэшу осуществлен на основе анализа устойчивости неподвижной точки отображения. Численное моделирование показало существование бифуркаций неподвижной точки, продемонстрировало сценарий перехода от периодического режима к хаотическому через удвоение периода. Для прояснения взаимосвязи между устойчивостью неподвижной точки и параметрами модели построена карта ляпуновского показателя. Положительные значения ляпуновского показателя означают чувствительную зависимость хаотической динамики рыночных цен от начальных условий и характерны для тех же наборов параметров, при которых рынок переходит к циклам и хаотическому режиму функционирования. Хаос в модели рыночного ценообразования означает, что если одна из фирм изменит свою цену даже незначительно, в долгосрочной перспективе возможны непредсказуемые изменения цен других производителей и всего рынка. Поэтому все фирмы должны иметь инструменты для управления хаосом.

Для того чтобы избежать нежелательной хаотической динамики рыночных цен, предложен адаптационный механизм управления ценами, основанный на пропорциональном изменении цены относительно изменения предельной прибыли фирм. Применение такого механизма позволит обеспечить устойчивость равновесия по Нэшу, а следовательно, сбалансировав экономические интересы фирм и согласовав ценовые решения, можно сохранить режим максимальной эффективности их функционирования.

Список литературы

Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики. — М.: МАКС Пресс, 2005. — 272 с.

Вурос А., Розанова Н. Экономика отраслевых рынков. — М.: ТЕИС, 2002. — 253 с.

Зенкевич Н. А., Петросян Л. А., Янг Д. В. К. Динамические игры и их приложения в менеджменте. — СПб.: Высшая школа менеджмента, 2009. — 417 с.

Канеман Д. Рациональный выбор, ценности и фреймы // Психологический журнал. — 2003. — Т. 24, № 4. — С. 31–42.

Клейнер Г. Б. К методологии моделирования принятия решений экономическими агентами // Экономика и математические методы. — 2003. — Т. 39, № 2.

Ключарев В. А. Нейроэкономика: нейробиология принятия решений // Экспериментальная психология. — 2011. — № 2. — С. 14–35.

Кузнецов С. П. Динамический хаос. — М.: Физматлит, 2006. — 356 с.

Кузнецов А. П., Савин А. В., Седова Ю. В., Тюрюкина Л. В. Бифуркации отображений. — Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012. — 196 с.

Лоскутов А. Ю., Михайлов А. С. Основы теории сложных систем. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. — 620 с.

Лоскутов А. Ю. Нелинейная оптимизация хаотической динамики рынка // Экономика и математические методы. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 58–70.

Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. — М.: Мир, 1990. — 312 с.

Неймарк Ю. И., Островский А. В. О некоторых моделях ценообразования в рыночной экономике // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1999. — № 6. — С. 35–41.

Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Книжный дом «Либроком». 2010. — 336 с.

Орлова Е. В. Механизм эффективного ценообразования на продукцию промышленных предприятий // Экономика и предпринимательство. — 2013. — № 12-1. — С. 622–626.

Орлова Е. В. Моделирование функции полезности с учетом иррациональных факторов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. — 2012. — № 3. — С. 24–30.

Орлова Е. Экономическое поведение: синтез рационального и иррационального // Проблемы теории и практики управления. — 2014. — № 3. — С. 127–136

Островский А. В. Об одном классе моделей конкурентного ценообразования в рыночной экономике // Дифференциальные уравнения и процессы управления. Электронный журнал. — 2000. — № 2. — С. 58–77. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal/pdf/j058.pdf (дата обращения: 06.03.2015).

Покровский Д. А., Шаповал А. Б. Распределение предпринимательских способностей и миграция: структура занятости, неравенство доходов и благосостояние // Журнал Новой экономической ассоциации. 2015. — № 2. — С. 36–62.

Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 424 с.

Филатов А. Ю., Айзенберг Н. И. Математические модели несовершенной конкуренции. — Иркутск: Изд-во ИГУ. 2012. — 117 с.

Шаповал А. Б., Гончаренко В. М. Монополистическая конкуренция в двухсекторной экономике при неопределенном спросе // Пространственная экономика. — 2014. — № 3. — С. 12–25.

Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. — М.: Мир, 1988. — 240 с.

Ahmed E., Hassan S. Z. On controlling chaos in cournot-games with two and three competitors // Nonlinear dynamics, Phychology, and life sciences. — 2000. — Vol. 4, No. 2.

Ahmed E., Elsadany A. A., Puu T. On Bertrand duopoly game with differentiated goods // Applied Mathematics and Computation. — 2015. — Vol. 251. — P. 169–179.

Agliari A., Gardini L., Puu T. Global Bifurcations in Duopoly when the Cournot Point is Destabilized through a Subcritical neimark bifuraction. working paper. — 2003. — 25 p. URL: http://www.cerum.umu.se/digitalAssets/18/18883_cwp_66_03.pdf (дата обращения: 04.03.2015).

Axelrod R. The evolution of cooperation. — N.Y.: Basic Book, 1984.

Dixit A. K., Stiglitz J. E. Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity // The American Economic Review. — 1977. — Vol. 67. — P. 297–308.

Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A. The dimension of chaotic attractors // Physica 7D. — 1983. — P. 153–180.

Feichtinger G. Economic evolution and demographic change. — Berlin: Springer, 1992.

Ferguson B. S., Lim G. C. Dynamic economic models in discrete time. theory and empirical applications. Taylor & Francis e-Library, 2005. — 174 p.

Holyst J. A., Urbanowicz K. Chaos Control in Economical Model by Time-Delayed Feedback Method // Physica A. — 2000. — Vol. 287.

Hotelling H. Stability in Competition // Economic Journal. — 1929. — Vol. 39, No. 153. — P. 41–57.

Lorenz H.-W. Nonlinear dynamical economics and chaotic motion. — Berlin: Springer-Verlag, 1989.

Kopel M. Improving the performance of an economic system: controlling chaos // J. of evolutionary Econ. — 1997. — Vol. 7.

Krugman P. Scale Economies, Product Differentiation, and the Pattern of Trade // The American Economic Review. — 1980. — Vol. 70 (5). — P. 950–959.

Melitz M. J., Ottaviano G. I. P. Market size, Trade, and Productivity // Review of Economic Studies. — 2008. — Vol. 75(1). — P. 295–316.

Puu T. Nonlinear economic dynamics. — Springer, 1997. — 284 p.

Puu T. Attractors, bifurcations, and chaos: nonlinear phenomena in economics, 2nd Edition, Springer, 2003. — 545 p.

Stachurski D. Economic dynamics: theory and computation. — MIT Press, 2009. — 392 p.