

Пристеночные функции для высокорейнольдсовых расчетов в программном комплексе FlowVision

С. В. Жлуктов^{1,2,a}, А. А. Аксёнов^{1,2}

¹ Общество с ограниченной ответственностью (ООО) ТЕСИС,
Россия, 127083, г. Москва, ул. Юннатов, д. 18, офис 705

² ОИВТ РАН, Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13

E-mail: ^asz@tesis.com.ru

Получено 16 июня 2015 г.,
после доработки 05 ноября 2015 г.

В данной работе представлена модель пристеночных функций FlowVision, позволяющая моделировать турбулентные течения жидкости и газа около твердых непроницаемых поверхностей на разных сетках. Рассматриваются четыре модели турбулентности: $k-\varepsilon$ FlowVision, $k-\varepsilon$ Стандартная, SST $k-\omega$, SA. Обсуждаются особенности реализации моделей турбулентности в программном комплексе FlowVision. Демонстрируются результаты решения двух тестовых задач.

Ключевые слова: турбулентное течение, высокорейнольдсовые расчеты, пристеночные функции, пластина, обратный уступ

Wall functions for high-Reynolds calculations in FlowVision software

S. V. Zhlukov^{1,2}, A. A. Aksenov^{1,2}

¹ TESIS LLC, off. 705, 18 Unnatov st., Moscow, 127083, Russia

² JIHT RAS, 13 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

Abstract. — The article submits wall functions model “FlowVision”. The model allows simulating turbulent flows of fluid and gas over solid impermeable surfaces on different grids. Four turbulence models are considered: $k-\varepsilon$ FlowVision, $k-\varepsilon$ Standard, SST $k-\omega$, SA. Details of implementation of turbulence models in FlowVision software are discussed. Calculations of two test cases are demonstrated.

Keywords: turbulent flow, high-Reynolds number calculations, wall functions, plate, backward facing step

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 1221–1239 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках ФЦП Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы по соглашению № 14.604.21.0090 от 8 июля 2014 г. Идентификатор проекта: RFMEFI60414X0090.

Введение

Важным инструментом инженерных расчетов являются пристеночные функции. Пристеночные функции — это предопределенные профили характеристик турбулентного потока в части пограничного слоя, непосредственно примыкающей к твердой непроницаемой поверхности (к стенке). Пристеночные функции позволяют не разрешать сеткой эту часть пограничного слоя и, соответственно, проводить расчеты на относительно грубых сетках. При этом в примыкающих к стенке ячейках (в пристенных ячейках) течение реконструируется с использованием пристеночных функций, в остальных же ячейках используется та или иная модель турбулентности. Такие расчеты традиционно называют высокорейнольдсовыми. Они позволяют экономить вычислительные ресурсы. Особый интерес представляют течения с отрывом и присоединением потока. В таких течениях y^+ (безразмерное расстояние от стенки до центра пристенной ячейки) может меняться от нуля до нескольких сотен. Область применимости традиционных пристеночных функций: $y^+ > 30$. Предлагаемые в данной работе пристеночные функции применимы до значений $y^+ \sim 4$.

В основе модели пристеночных функций FlowVision (WFFV) — идея наличия в турбулентном потоке *пути перемешивания* (см., например, [Шлихтинг, 1974]). Демпфирование пути перемешивания около стенки по Ван-Дристу позволяет получить гладкий профиль коэффициента турбулентной вязкости и гладкий профиль касательной составляющей скорости. Классическая модель пути перемешивания не учитывает влияние градиента давления на характеристики течения. Модель WFFV включает эффект градиента давления.

Традиционно термин *пристеночная функция* интерпретируется как профиль касательной составляющей скорости. В программном комплексе (ПК) FlowVision пристеночные функции — это набор алгебраических выражений, определяющих профили практически всех характеристик турбулентного течения: касательной составляющей скорости, коэффициента турбулентной вязкости, турбулентной энергии, скорости ее диссипации, коэффициента турбулентной теплопроводности и температуры. В процессе работы над моделью WFFV были рассмотрены различные опубликованные модельные выражения для турбулентной энергии, скорости ее диссипации и температуры. В результате были отобраны, доработаны и реализованы наиболее здравые идеи и наиболее эффективные подходы. Таким образом, модель WFFV — комплексная в том смысле, что она предоставляет алгебраическое замыкание всех решаемых уравнений на интервале между стенкой и центром пристенной ячейки. В данной работе рассматриваются изотермические течения. Поэтому профили коэффициента турбулентной теплопроводности и температуры не обсуждаются.

Первая версия модели WFFV была опубликована в работе [Жлуктов, Аксёнов и др., 2010]. В настоящей статье представлена усовершенствованная версия этой модели пристеночных функций.

В работе [Жлуктов, Аксёнов, Карасёв, 2014] была представлена двухпараметрическая k - ε модель турбулентности KEFV. Проведенные низкорейнольдсовые расчеты показали, что эта модель может адекватно предсказывать байпасный ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое на твердой поверхности. В настоящей работе демонстрируются высокорейнольдсовые расчеты с использованием четырех моделей турбулентности: k - ε KEFV, k - ε Стандартная, SST k - ω , SA. Как будет показано ниже, модель KEFV имеет преимущества перед другими моделями турбулентности, реализованными в ПК FlowVision.

1. Граничное условие для уравнения импульсов

Выберем локальную (связанную со стенкой в данной точке) систему координат (СК) следующим образом: ось y направим по нормали к стенке, ось x направим вдоль касательной

составляющей скорости, взятой в центре пристенной ячейки. Будем полагать, что на интервале между стенкой и центром пристенной ячейки можно пренебречь конвективными членами и вязкими членами, содержащими производные по координате x . Запишем проекцию упрощенного стационарного уравнения импульсов на ось x :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} \right] = \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.1)$$

Здесь μ — динамический коэффициент молекулярной вязкости, μ_t — динамический коэффициент турбулентной вязкости, V — скорость, p — статическое давление. Индексом c будем обозначать значения величин в центре пристенной ячейки, индексом w — значения на стенке. Проинтегрируем уравнение (1.1) от стенки до центра пристенной ячейки (давление поперек пограничного слоя предполагаем постоянным):

$$\left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} \right]_c - \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} \right]_w = \frac{\partial p}{\partial x} y. \quad (1.2)$$

Подставляя в (1.2) вязкое напряжение (удельную силу трения) на стенке

$$\tau_w = \left[(\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} \right]_w, \quad (1.3)$$

получим

$$(\mu + \mu_t) \frac{\partial V_x}{\partial y} - \tau_w = \frac{\partial p}{\partial x} y. \quad (1.4)$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \tau_w \frac{1}{\mu + \mu_t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y}{\mu + \mu_t}. \quad (1.5)$$

В результате интегрирования соотношения (1.5) от стенки до центра пристенной ячейки получаем

$$V_x = \tau_w J_{V1} + \frac{\partial p}{\partial x} J_{V2}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$J_{V1} = \int_0^{yc} \frac{dy}{\mu + \mu_t}, \quad J_{V2} = \int_0^{yc} \frac{y dy}{\mu + \mu_t}. \quad (1.7)$$

Таким образом, если известен профиль турбулентной вязкости, то, вычисляя интегралы (1.7), получаем связь между касательной скоростью в центре пристенной ячейки и вязкой силой. Эта связь дает требуемое граничное условие для уравнения импульсов на стенке:

$$\tau_w = \frac{1}{J_{V1}} V_x - \frac{J_{V2}}{J_{V1}} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Из этого выражения следует, что при большом положительном градиенте давления вязкая сила, действующая на стенку, может стать отрицательной (в зоне отрыва).

2. Модель пристеночных функций FlowVision

2.1. «Путь перемешивания»

Модель WFFV предполагает наличие двух «путей перемешивания» около твердой поверхности. Первый «путь перемешивания» позволяет получить гладкий профиль касательной составляющей скорости около стенки в случае безградиентного течения ($\partial p / \partial x = 0$):

$$l_1 = \kappa_1 y \cdot \left(1 - \exp \left(-y_1^+ \frac{1}{A_1} \right) \right), \quad (2.1)$$

$$y_1^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}, \quad (2.2)$$

$$u_\tau = (\tau_w / \rho)^{1/2}, \quad (2.3)$$

где ρ — плотность. Выражение (2.1) можно найти, например, в учебном пособии [Белов, Исаев, 2001]. Второй «путь перемешивания» позволяет получить гладкий профиль касательной составляющей скорости около стенки в точке отрыва потока ($\tau_w = 0$) (см. раздел 2.3):

$$l_2 = \kappa_2 y \sqrt{y_2^+} \cdot \left(1 - \exp \left(-y_2^+ \frac{1}{A_2} \right) \right), \quad (2.4)$$

$$y_2^+ = \frac{\rho u_p y}{\mu}, \quad (2.5)$$

$$u_p = \left(\mu \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| / \rho^2 \right)^{1/3}. \quad (2.6)$$

Значения по умолчанию модельных констант:

$$\kappa_1 = 0.41, \quad A_1 = 25, \quad \kappa_2 = 0.2, \quad A_2 = 13.6.$$

Общий путь перемешивания определяется соотношением

$$l^2 = \max \left(\text{sign}(\tau_w) l_1^2 + \text{sign} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) l_2^2, 0 \right). \quad (2.7)$$

Таким образом, в пристенных ячейках допускается возможность как положительных, так и отрицательных значений силы трения и градиента давления.

2.2. Профиль вязкости

Динамический коэффициент турбулентной вязкости определяется соотношением

$$\mu_t = \rho l^2 \frac{\partial V_x}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Подставим (2.8) в (1.4):

$$\left(\mu + \rho l^2 \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \frac{\partial V_x}{\partial y} - \tau_w = \frac{\partial p}{\partial x} y. \quad (2.9)$$

Отсюда

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{1}{2\rho l^2} \left(-\mu + \mu \sqrt{1 + \frac{4\rho l^2}{\mu^2} \left(\tau_w + \frac{\partial p}{\partial x} y \right)} \right), \quad (2.10)$$

$$\mu_t = \frac{1}{2} \left(-\mu + \mu \sqrt{1 + \frac{4\rho l^2}{\mu^2} \left(\tau_w + \frac{\partial p}{\partial x} y \right)} \right). \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) определяет профиль динамического коэффициента турбулентной вязкости $\mu_t(y)$. Выражения (2.10) и (2.11) обеспечивают правильное асимптотическое поведение производной скорости и турбулентной вязкости при $y \rightarrow 0$.

2.3. Профиль скорости

Выражение (2.10) определяет профиль касательной составляющей скорости $V_x(y)$. В литературе [Шлихтинг, 1974; Белов, Исаев, 2001; Shih, Povinelli et al., 1999] известны две эмпирические формулы для касательной составляющей скорости на некотором расстоянии от стенки для двух предельных ситуаций: $\partial p / \partial x = 0$ и $\tau_w = 0$:

$$U_1 / u_\tau = \frac{1}{\kappa_1} \ln(E_1 y_1^+), \quad (2.12)$$

$$U_2 / u_p = \frac{1}{\kappa_2} \ln(E_2 y_2^+), \quad (2.13)$$

где κ_1 , E_1 , κ_2 , E_2 — модельные константы. Выражение (2.12) определяет логарифмическую часть профиля скорости в безградиентном логарифмическом подслое (см., например, [Шлихтинг, 1974]). В нашей модели при $\partial p / \partial x = 0$

$$\mu_t = \frac{1}{2} \left(-\mu + \mu \sqrt{1 + \frac{4\rho l_1^2}{\mu^2} \rho u_\tau^2} \right), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\mu_t}{2\rho l_1^2}. \quad (2.15)$$

В безразмерном виде

$$\mu_t^+ = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4l_1^{+2}} \right), \quad (2.16)$$

$$\frac{dV_{x,1}^+}{dy_1^+} = \frac{\mu_t^+}{l_1^{+2}}. \quad (2.17)$$

Здесь

$$\mu_t^+ = \mu_t / \mu, \quad V_{x,1}^+ = V_x / u_\tau, \quad l_1^+ = \rho u_\tau l_1 / \mu.$$

Выражение (2.13) определяет логарифмическую часть профиля скорости в точке отрыва (см. [Shih, Povinelli et al., 1999]). В нашей модели при $\tau_w = 0$

$$\mu_t = \frac{1}{2} \left(-\mu + \mu \sqrt{1 + \frac{4\rho l_2^2}{\mu^2} \frac{\rho^2 u_p^3}{\mu}} \right), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\mu_t}{2\rho l_2^2}. \quad (2.19)$$

В безразмерном виде

$$\mu_t^+ = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 4l_2^{+2} y_2^+} \right), \quad (2.20)$$

$$\frac{dV_{x,2}^+}{dy_2^+} = \frac{\mu_t^+}{l_2^{+2}}. \quad (2.21)$$

Здесь

$$V_{x,2}^+ = V_x / u_p, \quad l_2^+ = \rho u_p l_2 / \mu.$$

В работе [Shih, Povinelli et al., 1999] предлагается представлять профиль касательной скорости в виде суперпозиции двух профилей:

$$V_x = V_{x,1} + \text{sign} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \cdot V_{x,2}. \quad (2.22)$$

Касательная составляющая градиента давления ($\partial p / \partial x$) может быть как положительной, так и отрицательной. Ее знак определяется относительно касательной составляющей скорости в центре пристенной ячейки.

Профили $V_{x,1}^+(y_1^+)$ и $V_{x,2}^+(y_2^+)$ вычисляются один раз и табулируются:

$$V_{x,1}^+ = \int_0^{y_1^+} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4l_1^{+2}}}{2l_1^{+2}} dy_1^+, \quad l_1^+ = \kappa_1 y_1^+ \cdot \left(1 - \exp \left(-\frac{y_1^+}{A_1} \right) \right), \quad (2.23)$$

$$V_{x,2}^+ = \int_0^{y_2^+} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4l_2^{+2} y_2^+}}{2l_2^{+2}} dy_2^+, \quad l_2^+ = \kappa_2 y_2^+ \sqrt{y_2^+} \cdot \left(1 - \exp \left(-y_2^+ \frac{1}{A_2} \right) \right). \quad (2.24)$$

Верхние пределы интегрирования — табличные значения y_1^+ и y_2^+ соответственно. Таблицы используются для нахождения динамической скорости u_τ в том случае, если в начале шага по времени произошло перестроение расчетной сетки и вычисленное в конце предыдущего шага значение τ_w утеряно. Если же τ_w известно (стенка неподвижная, расчетная сетка не перестраивалась), то профили $V_{x,1}^+$ и $V_{x,2}^+$ не используются. Это одно из отличий предлагаемой версии модели WFFV от ее предыдущей версии [Жлуктов, Аксёнов и др., 2010].

2.4. Профиль турбулентной энергии

Равновесные пристеночные функции для $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделей предполагают задание турбулентной энергии в центре пристенной ячейки. В ПК FlowVision реализованы следующие способы вычисления величины k_c . Для модели SST $k-\omega$:

$$k_{c,1} = \frac{u_\tau^2}{0.3 + \frac{1}{0.002 \cdot (y_1^+)^{3.5}}}, \quad (2.25)$$

$$k_{c,2} = \frac{u_\tau^2}{0.3} \min \left(\left(\frac{y_1^+}{3} \right)^2, 1 \right), \quad (2.26)$$

$$k_{c,3} = \frac{u_\tau^2}{0.3}. \quad (2.27)$$

Выражение (2.27) определяет «классический» способ определения k в центре пристенной ячейки (см. [Wilcox, 1994]). Выражение (2.26) — его модификация, учитывающая наличие параболического участка функции $k(y)$ в ламинарном подслое около стенки. Выражение (2.25) предложено в работе [Гарбарук, Стрелец, Шур, 2012]. Для Стандартной k - ε -модели:

$$k_c = \frac{u_{\tau-p}^2}{0.3 + \frac{1}{0.003 \cdot (y_{\tau-p}^+)^{3.5}}}, \quad (2.28)$$

$$y_{\tau-p}^+ = \frac{\rho u_{\tau-p} y_c}{\mu}, \quad (2.29)$$

где y_c — расстояние от стенки до центра примыкающей к стенке ячейки. Для модели KEFV:

$$k_c = \frac{u_{\tau-p}^2}{0.3}. \quad (2.30)$$

Обобщенная динамическая скорость $u_{\tau-p}$, присутствующая в выражениях (2.28)–(2.30), определяется следующим образом:

$$u_{\tau-p} = \sqrt{\max\left(\text{sign}(\tau_w) \cdot u_\tau^2 + \text{sign}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \cdot \frac{u_p^3}{\mu / \rho} y, 0\right)}. \quad (2.31)$$

Как будет показано в разделе 5, выражения (2.28) и (2.30) обеспечивают хорошее совпадение значений коэффициента трения $C_f(\text{Re}_x)$, рассчитанных с использованием модели WFFV, с известными эмпирическими корреляциями.

2.5. Профиль скорости диссипации турбулентной энергии

Модель равновесных пристеночных функций предполагает, что уравнение для k в пристенных ячейках не решается (см. выражения (2.25)–(2.30)). Модель неравновесных пристеночных функций предполагает, что уравнение для k в пристенных ячейках решается. Равновесные и неравновесные пристеночные функции для k - ε -моделей предполагают задание скорости диссипации турбулентной энергии в центре пристенной ячейки. В равновесной версии предлагаемой в настоящей работе модели WFFV:

$$\varepsilon_c = u_{\tau-p}^3 / l_\varepsilon, \quad (2.32)$$

$$l_\varepsilon = \kappa_\varepsilon y_c \left(1 - \exp(-y_{\tau-p}^+ / A_\varepsilon)\right). \quad (2.33)$$

В неравновесной версии модели WFFV:

$$\varepsilon_c = u_k^3 / l_\varepsilon, \quad (2.34)$$

$$l_\varepsilon = \kappa_\varepsilon y \left(1 - \exp(-y_k^+ / A_\varepsilon)\right), \quad (2.35)$$

$$y_k^+ = \frac{\rho u_k y_c}{\mu}, \quad (2.36)$$

$$u_k = C_\mu^{1/4} k_c^{1/2}. \quad (2.37)$$

Значения по умолчанию модельных констант:

$$\kappa_\varepsilon = 0.41, \quad A_\varepsilon = 15.$$

2.6. Профиль удельной скорости диссипации турбулентной энергии

Равновесные и неравновесные пристеночные функции для модели SST $k-\omega$ предполагают задание удельной скорости диссипации турбулентной энергии в центре пристенной ячейки (ω_c). В ПК FlowVision реализованы три известных способа вычисления этой величины:

$$\omega_{c,1} = \sqrt{\omega_{\text{vis}}^2 + \omega_{\text{turb}}^2}, \quad (2.38)$$

$$\omega_{c,2} = \exp(\Gamma) \cdot \omega_{\text{vis}} + \exp(1/\Gamma) \cdot \omega_{\text{turb}}, \quad (2.39)$$

$$\omega_{c,3} = \omega_{\text{turb}}, \quad (2.40)$$

$$\omega_{\text{turb}} = \frac{u_\tau}{0.3\kappa_1 y_c}, \quad (2.41)$$

$$\Gamma = -\frac{a(y_1^+)^4}{1 + by_1^+}, \quad a = 0.01, \quad b = 5.$$

Метод комбинирования «вязкого» и «турбулентного» профилей ω , определяемый соотношением (2.38), взят из работы [Menter, Carregal Ferreira et al., 2003]. Метод (2.39) взят из работы [Kader, 1981]. Выражение для ω_{turb} приводится в книге [Wilcox, 1994]. Для величины ω_{vis} в литературе можно найти различные выражения. Например, в книге [Wilcox, 1994] дается формула

$$\omega_{\text{vis}} = \frac{80 \cdot \mu / \rho}{y_c^2}. \quad (2.42)$$

В учебном пособии [Гарбарук, Стрелец, 2012] —

$$\omega_{\text{vis}} = \frac{800 \cdot \mu / \rho}{y_c^2}. \quad (2.43)$$

Интерфейс FlowVision позволяет задавать эти и другие известные выражения для ω_{vis} . Отметим, что при выборе модели неравновесных пристеночных функций присутствующая в выражении (2.41) величина u_τ автоматически заменяется на величину u_k .

2.7. Неравновесные пристеночные функции

Модель неравновесных пристеночных функций предполагает, что уравнение для k (в $k-\varepsilon$ - и $k-\omega$ -моделях) решается в пристенных ячейках с граничным условием

$$\partial k / \partial y|_w = 0. \quad (2.44)$$

При этом генерационный член в этих ячейках вычисляется особым образом:

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\max \left[\tau_w + \frac{\partial p}{\partial x} y, 0 \right]}{\mu + \mu_t} \right)^2. \quad (2.45)$$

Выражение для P_k в общем случае приведено в следующем разделе.

3. Модель турбулентности KEFV

В работе [Жлуктов, Аксёнов, Карасёв, 2014] была представлена модель турбулентности KEFV. Ниже приводится доработанная версия этой модели.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla(\rho V k) = \nabla \left(\left(\mu + f_t \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k + P_{k,gen} + G_k - \rho \varepsilon \left(1 + \xi \left(\max(M_t^2, M_{t0}^2) - M_{t0}^2 \right) \right) - D_{pp}. \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla(\rho V \varepsilon) = \nabla \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{\text{Re}_t}}} \frac{\varepsilon}{k} \left(C_{\varepsilon 1} f_1 (P_k + G_k) - C_{\varepsilon 2} f_2 \rho \varepsilon \right), \quad (3.2)$$

$$\mu_t = \rho C_\mu k^2 / \varepsilon, \quad (3.3)$$

$$P_k = \mu_t \left(S - \frac{2}{3} (\nabla \cdot V)^2 \right) - \frac{2}{3} \rho (\nabla \cdot V) k,$$

$$P_{k,gen} = \mu \mu_{gen}^+ S \exp \left\{ - \left(\frac{\text{Re}_t}{C_6} \right)^2 \right\}, \quad (3.4)$$

$$G_k = \mu_t \frac{\beta}{\text{Pr}_t} \mathbf{g} \cdot \nabla T,$$

$$D_{pp} = \begin{cases} 0 & y > L \cdot y_{pp}^*, \\ C_{pp} \rho \{ \mathbf{n} \cdot \nabla (k |\mathbf{V}|) \} & y \leq L \cdot y_{pp}^*, \end{cases} \quad (3.5)$$

$$f_t = 1 + C_1 \exp \left\{ - \left(\frac{\text{Re}_t}{C_2} \right)^2 \right\},$$

$$f_1 = 1 - C_{\varepsilon 3} + C_{\varepsilon 3} \frac{P_k}{\rho \varepsilon},$$

$$f_2 = \frac{1}{1 + C_{\text{Rich}} \sqrt{\frac{W}{S}} \left(\sqrt{\frac{W}{S}} - 1 \right)} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{y_{\text{Kolm}}^+}{C_4} \right) \right\}^2 \left[1 - C_3 \exp \left\{ - \left(\frac{\text{Re}_t}{C_5} \right)^2 \right\} \right], \quad (3.6)$$

$$y_{\text{Kolm}}^+ = \frac{(\varepsilon \cdot \mu / \rho)^{1/4} y}{\mu / \rho}, \quad \text{Re}_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}, \quad M_t^2 = \frac{2k}{a^2},$$

$$S = 2 \sum_{i,j} S_{ij} S_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right),$$

$$W = 2 \sum_{i,j} W_{ij} W_{ij}, \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

Значения по умолчанию модельных констант:

$$\sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_{pp} = 0.003, \quad y_{pp}^* = 10^{20}, \\ C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_{\varepsilon 3} = 0.05,$$

$$C_1 = 5, \quad C_2 = 50, \quad C_3 = 0.335, \quad C_4 = 3.4, \quad C_5 = 5.8, \\ C_6 = 10000, \quad \mu_{\text{gen}}^+ = 0, \quad C_{\text{Rich}} = 0, \quad \xi = 1.5, \quad M_{t_0} = 0.25.$$

Здесь x_i — декартовы координаты, t — время, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, β — коэффициент теплового расширения, a — скорость звука, $C_\mu = 0.09$ — фиксированная модельная константа.

В уравнении (3.1) член D_{pp} (3.5) учитывает диффузию турбулентной энергии, обусловленную пульсациями давления (см. [Жлуктов, Аксёнов, Карасёв, 2014]). Он оказывает существенное влияние на положение байпасного ламинарно-турбулентного перехода на твердой поверхности. Константа y_{pp}^* — расстояние от стенки, определяющее зону действия члена D_{pp} ; L — линейный масштаб задачи (характерный размер обтекаемого объекта). Вектор \mathbf{n} — локальная нормаль к стенке. Точное значение константы $y_{pp}^* \sim 1$ определяется решаемой задачей. Значение по умолчанию $y_{pp}^* = 10^{20}$ означает, что член D_{pp} действует во всей расчетной области.

В уравнении (3.1) присутствует дополнительный генерационный член $P_{k,\text{gen}}$, позволяющий задавать принудительную генерацию турбулентности в некоторой части расчетной области. Константа $\mu_{\text{gen}}^+ \sim 1$ — искусственная турбулентная динамическая вязкость.

С помощью коэффициента $\left(1 + \xi \left(\max(M_t^2, M_{t_0}^2) - M_{t_0}^2\right)\right)$ в уравнении для k учитывается влияние сжимаемости потока на диссипацию турбулентной энергии. Константы ξ и M_{t_0} определяют используемую для этого модель. Указанные выше значения задают модель Вилкокса (см. [Wilcox, 1994]). Значения $\xi = 1$, $M_{t_0} = 0$ задают модель Саркара (см. там же).

Коэффициент $\left[1 + C_{\text{Rich}} \sqrt{\frac{W}{S}} \left(\sqrt{\frac{W}{S}} - 1\right)\right]^{-1}$ в демпфирующей функции f_2 (3.6) учитывает

кривизну линий тока. Этот способ учета влияния завихренности потока был предложен в работе [Hellsten, 1998] для модели SST $k-\omega$. В ней было рекомендовано значение $C_{\text{Rich}} = 3.6$. Однако, данное значение не является универсальным. В настоящей работе при моделировании течения за обратным уступом (см. раздел 5) с использованием моделей SST $k-\omega$ и KEFV задается значение $C_{\text{Rich}} = 2$.

4. Реализация моделей турбулентности в ПК FlowVision

Численное интегрирование уравнений в ПК FlowVision основано на методе конечных объемов и методе расщепления по физическим переменным [Aksenov, Zhluktov, Savitskiy et al., 2015]. Во всех ячейках решаемые уравнения в частных производных аппроксимируются разностной схемой высокого порядка точности. Решение в областях с большими градиентами характеристик течения и геометрическими особенностями границы уточняется посредством автоматической локальной динамической адаптации расчетной сетки. При адаптации расчетные ячейки либо разбиваются на более мелкие, либо сливаются в более крупные.

В ПК FlowVision реализовано 7 моделей турбулентности: алгебраическая модель Смагоринского (см. [Гарбарук, Стрелец, 2012]), модель Спаларта–Аллмареса (см. [Wilcox, 1994; Гарбарук, Стрелец, 2012]), модель Shear Stress Transport $k-\omega$ (см. [Menter, Kuntz, Langtry, 2003]) и четыре $k-\varepsilon$ -модели — стандартная (см. [Wilcox, 1994]), AKN [Abe, Kondoh, Nagano, 1994], квадратичная [Lien, Chen, Leschziner, 1996] и KEFV. Также реализовано 2 модели пристеноч-

ных функций: модель стандартных пристеночных функций и модель WFFV. Константы моделей турбулентности и пристеночных функций выведены в интерфейс FlowVision. Значения констант по умолчанию обеспечивают высокую точность вычисления характеристик различных турбулентных течений. В общем случае, варьируя константы, пользователь может настроить ту или иную модель на конкретный класс задач.

5. Результаты численных расчетов

Модель WFFV настраивалась на тестовой задаче ТЗА [Savill, 1992]. В таблице 1 приведены условия этой задачи. Значения интенсивности турбулентности и безразмерной турбулентной вязкости даны для передней кромки пластины. Обсуждаемое течение характеризуется пренебрежимо малым продольным градиентом давления.

Таблица 1. Условия тестовой задаче ТЗА

Скорость на входе, м с ⁻¹	Интенсивность турбулентности, %	μ_t/μ	Плотность (кг м ⁻³)	Динамическая вязкость (кг м ⁻¹ с ⁻¹)
5.4	3.3	12	1.2	$1.8 \cdot 10^{-5}$

Расчетная область и граничные условия показаны на рис. 1. Размеры расчетной области: по координате x — 2.2 м, по координате y — 1 м. Длина пластины — 2 м. Граничное условие «выход» предполагает фиксированное значение статического давления на соответствующих поверхностях расчетной области. При задании турбулентности на входе учитывается ее затухание от входного сечения до передней кромки пластины.

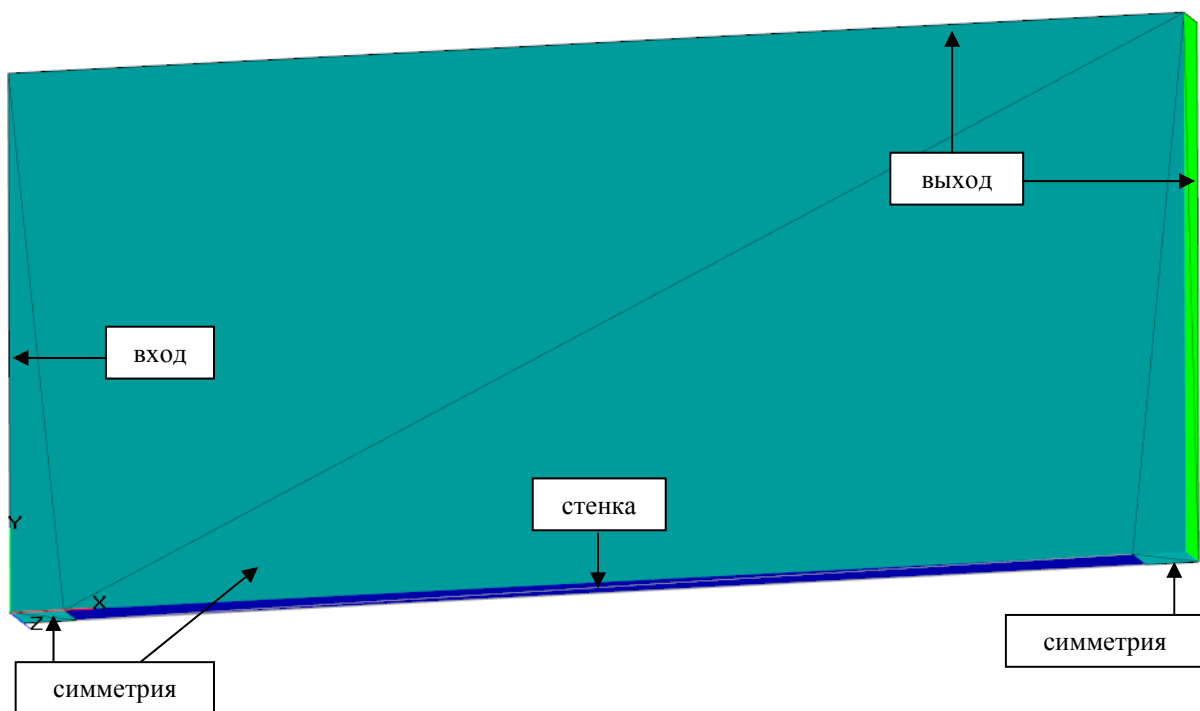


Рис. 1. Расчетная область и граничные условия

Предварительные расчеты проводились на различных сетках. По координате x сетки различным образом сгущались около передней и задней кромок пластины. По координате y сетки сгущались около пластины. В таблице 2 приведены характеристики пяти фиксированных сеток,

на которых проводились систематические расчеты. Коэффициент разрежения всех сеток по координате y (по мере удаления от пластины) — 1.05. Величина y_1^+ дается для второй половины пластины.

Таблица 2. Характеристики расчетных сеток

	$N_x \times N_y$	y_1^+
Сетка 1	661×42	63
Сетка 2	661×54	32
Сетка 3	661×66	16
Сетка 4	661×80	8
Сетка 5	661×93	4

В таблице 2 N_x и N_y — число ячеек по направлениям x и y .

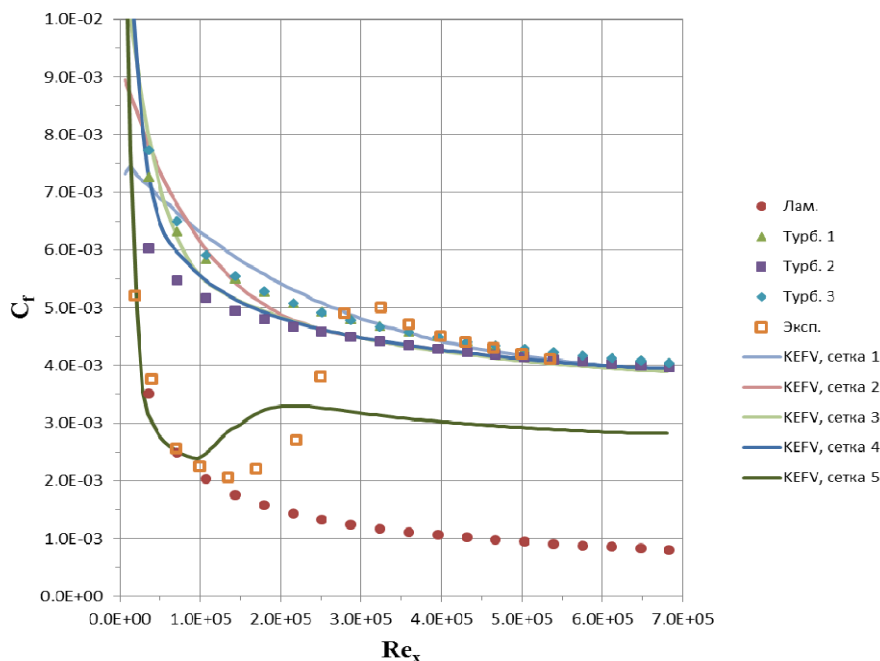


Рис. 2. Коэффициент трения, модель KEFV, равновесные ПФ

На рис. 2–8 представлены распределения коэффициента трения вдоль пластины, полученные с использованием равновесных и неравновесных пристеночных функций (ПФ). Рассматриваются 4 модели турбулентности: KEFV, KES (k – ε стандартная), SST k – ω и SA (Спаларта–Аллмареса). На рисунках приведены экспериментальные данные и корреляции

$$C_{f, \text{Лам.}} = 0.664 \cdot \text{Re}_x^{-0.5}, \quad (5.1)$$

$$C_{f, \text{Турб.1}} = 0.027 \cdot \text{Re}_x^{-1/7}, \quad (5.2)$$

$$C_{f, \text{Турб.2}} = 0.0592 \cdot \text{Re}_x^{-0.2}, \quad (5.3)$$

$$C_{f, \text{Турб.3}} = 0.288 \cdot (\lg \text{Re}_x)^{-2.45}, \quad (5.4)$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho V_\infty^2}, \quad \text{Re}_x = \rho V_\infty x / \mu,$$

Выражение (5.1) — корреляция Блазиуса для коэффициента трения при ламинарном безградиентном обтекании пластины (см. [Шлихтинг, 1974]). Выражения (5.2)–(5.4) — корреляции для

коэффициента трения при турбулентном обтекании пластины (см. соответственно [Abu Darag, Uruba, Horak, 2011; Шлихтинг, 1974; Crabtree, Dommert, Woodley, Farnborough, 1970]). Отметим, что в книге [Семёнов, 2013] корреляция (5.2) приводится с коэффициентом 0.0263. Также в литературе эта корреляция встречается с коэффициентом 0.0277.

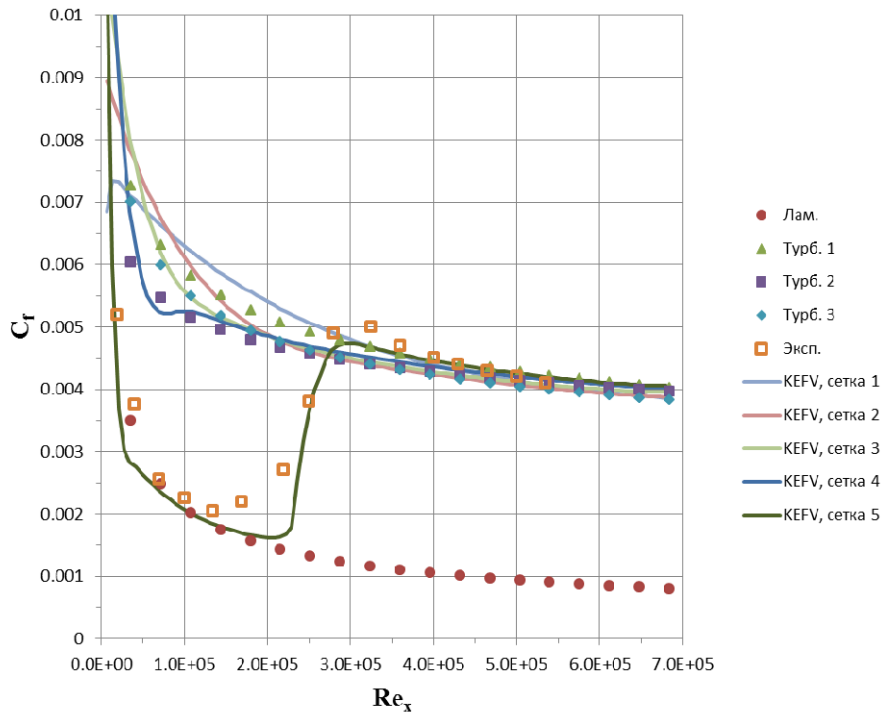


Рис. 3. Коэффициент трения, модель KEFV, неравновесные ПФ

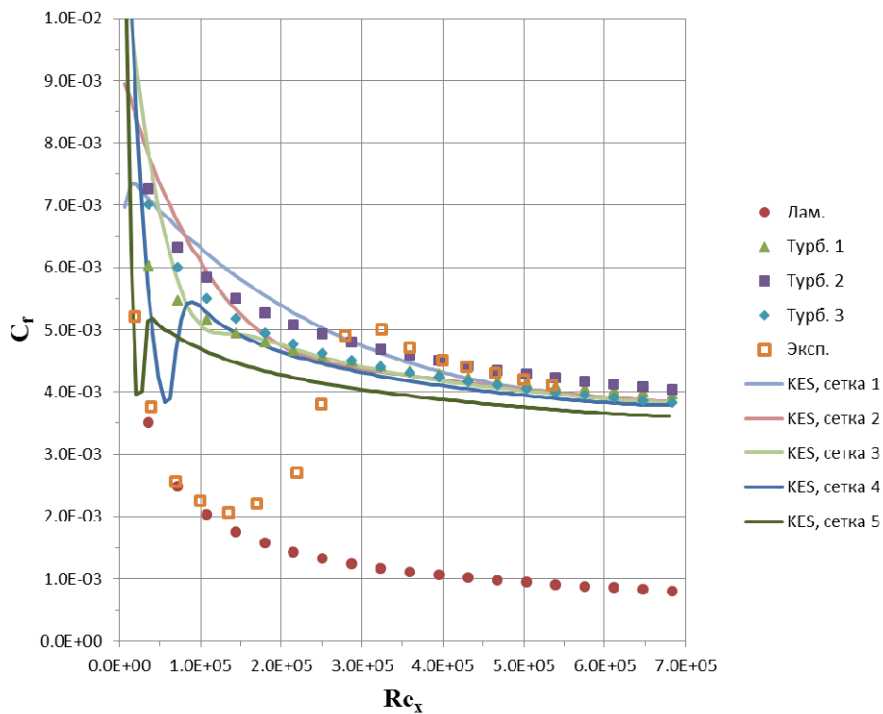


Рис. 4. Коэффициент трения, модель KES, равновесные ПФ

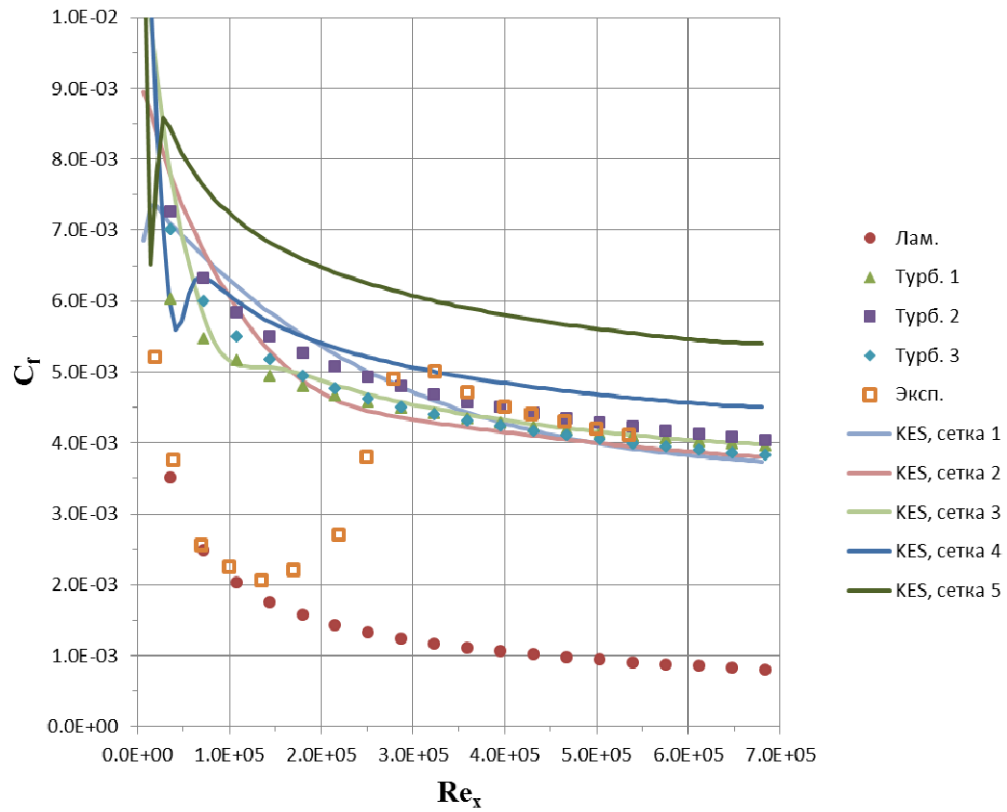


Рис. 5. Коэффициент трения, модель KES, неравновесные ПФ

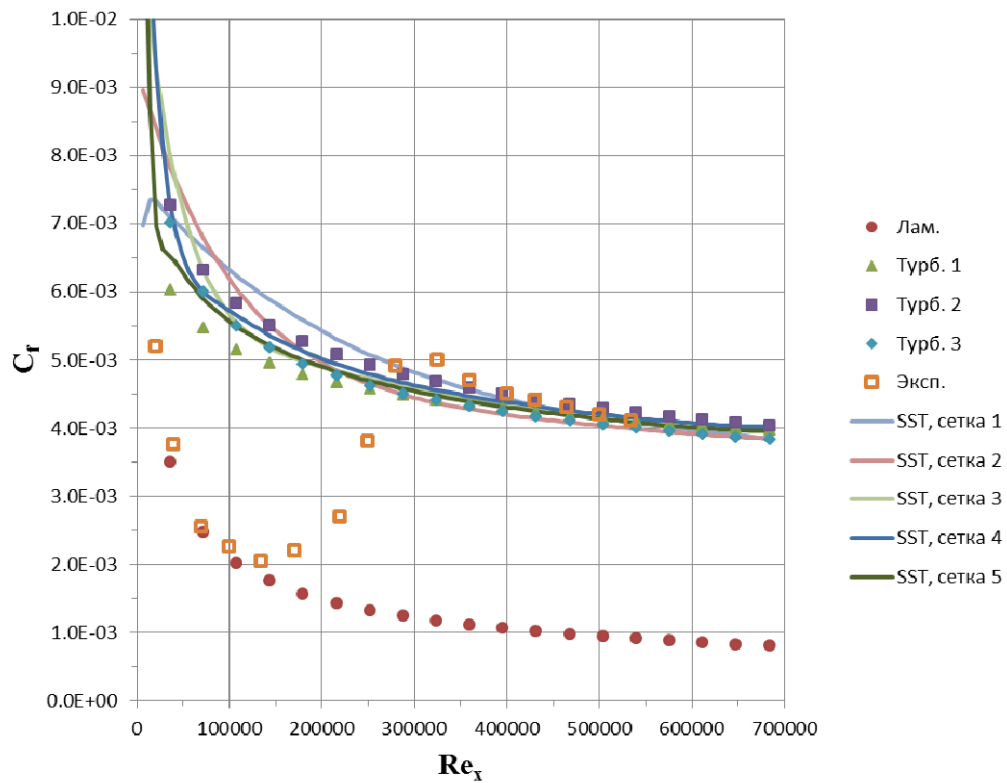


Рис. 6. Коэффициент трения, модель SST, равновесные ПФ

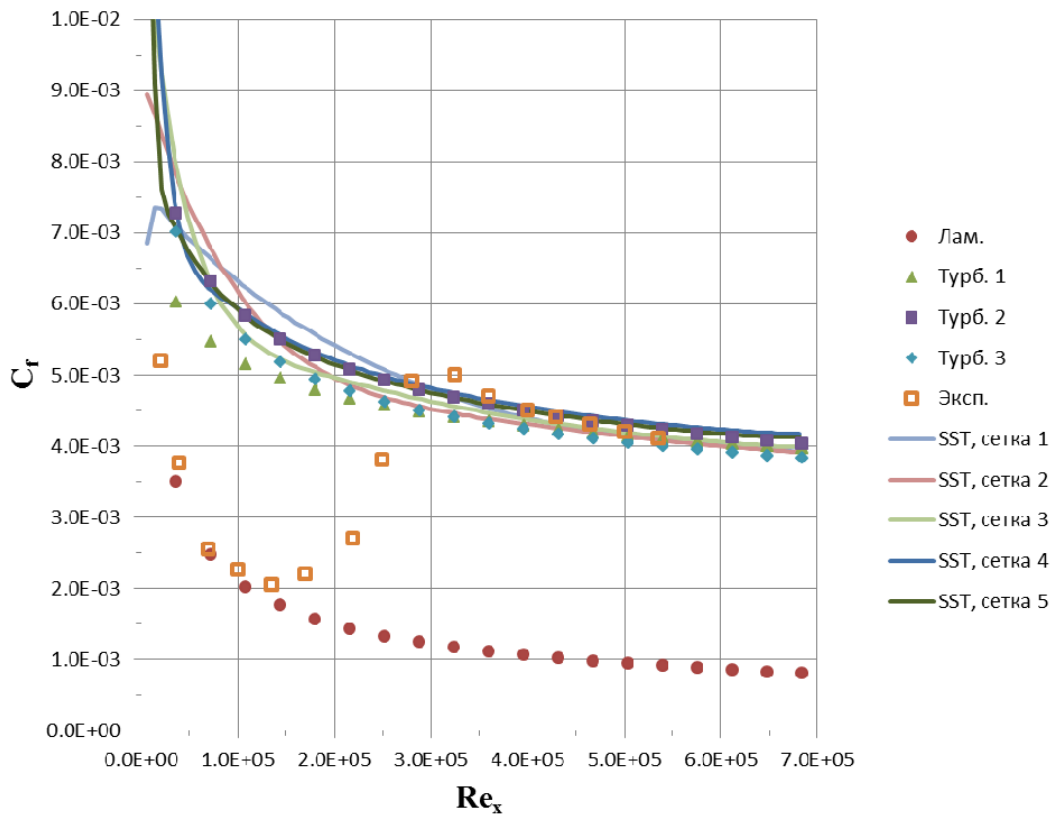


Рис. 7. Коэффициент трения, модель SST, неравновесные ПФ

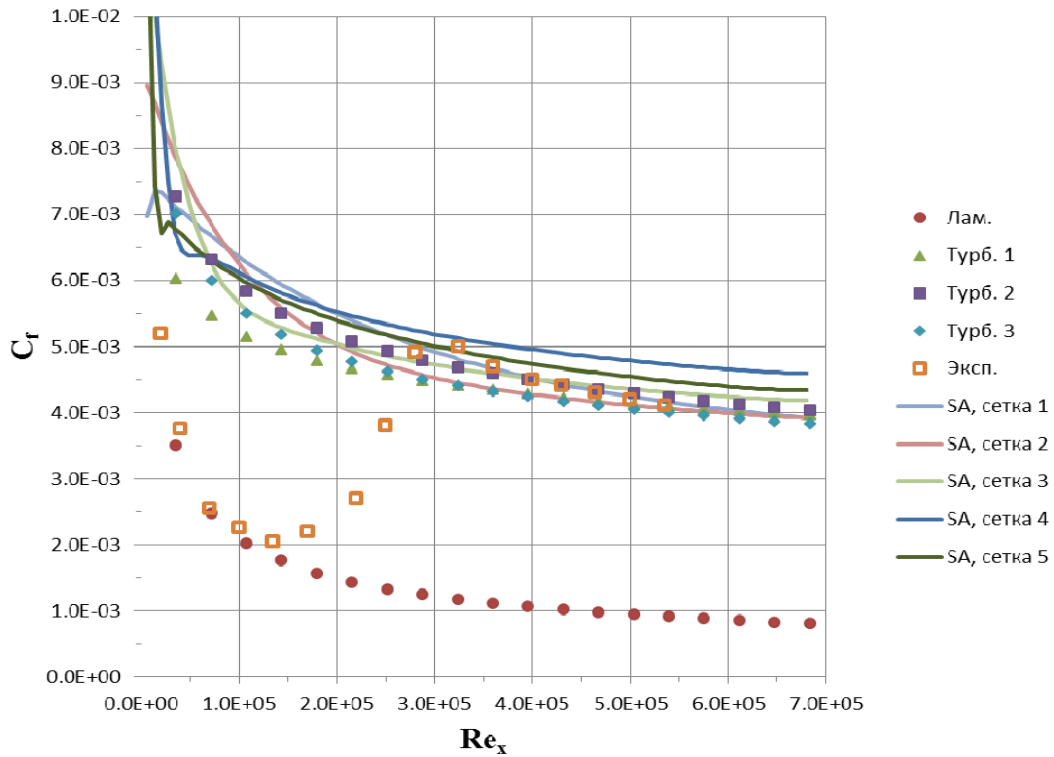


Рис. 8. Коэффициент трения, модель SA

Из рисунков видно, что результаты, полученные на относительно грубых сетках ($y_r^+ \geq 16$) с использованием как равновесных, так и неравновесных пристеночных функций, хорошо согласуются с известными корреляциями для коэффициента трения. На более мелких сетках хорошие результаты получаются с использованием моделей KEFV и SST. При этом высокорейнольдсовые расчеты с использованием модели KEFV и неравновесных пристеночных функций на сетке $y_r^+ \sim 4$ дают правильное положение байпасного ламинарно-турбулентного перехода.

Предлагаемый подход является универсальным в смысле его применимости ко всем моделям турбулентности: при использовании разных моделей турбулентности задаются одни и те же константы. Подчеркнем, что при использовании модели SST значения величин k и ω в центрах пристенных ячеек вычисляются по известным (из литературы) формулам.

Модель WFFV была протестирована на задаче «Течение за обратным уступом» [Kim, Kline, Johnson, 1980]. Расчетная область показана на рис. 9.

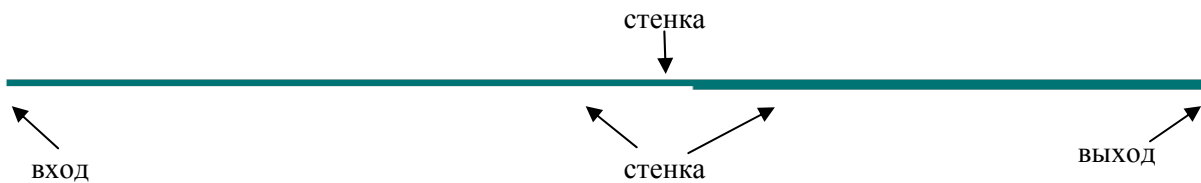


Рис. 9. Расчетная область и граничные условия. На боковых поверхностях установлено граничное условие «симметрия». Высота уступа $H = 0.0381$ м. Коэффициент расширения канала 1.5. Расчеты проводились на трех сетках (см. рис. 10)

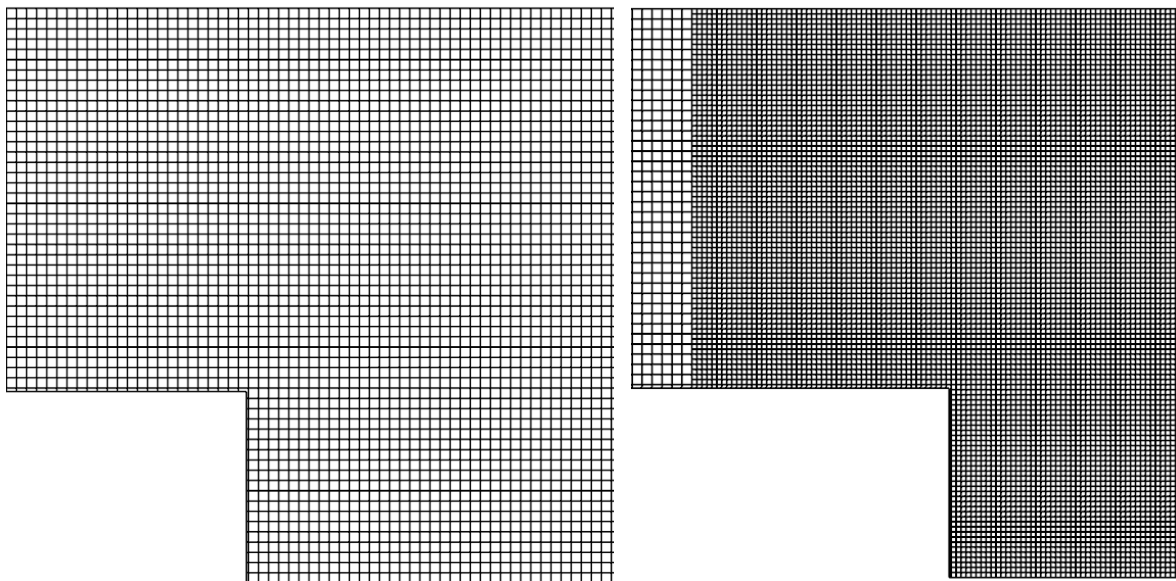


Рис. 10. Структура «Сетки 1» (слева) и «Сетки 2» (справа) около уступа. «Сетка 3» получена двукратным измельчением «Сетки 2» по обоим направлениям в зоне адаптации

Размер ячеек «Сетки 1»: 0.002 м ($\sim 0.05 H$). Зона адаптации с большим запасом перекрывает рециркуляционную зону за уступом. На рис. 11 показаны распределения величины y_1^+ , характеризующие три расчетные сетки.

В таблицах 3–6 представлены значения длины рециркуляционной зоны, полученные на этих сетках. Длина зоны определялась по положению точки, в которой касательная компонента скорости меняет знак. Точка минимума величины y_1^+ располагается дальше от уступа. При из-

мельчении сетки эти точки сближаются. Экспериментальное значение зоны — 7.1 Н, погрешность эксперимента — 6.3 %. Рассматриваются те же 4 модели турбулентности.

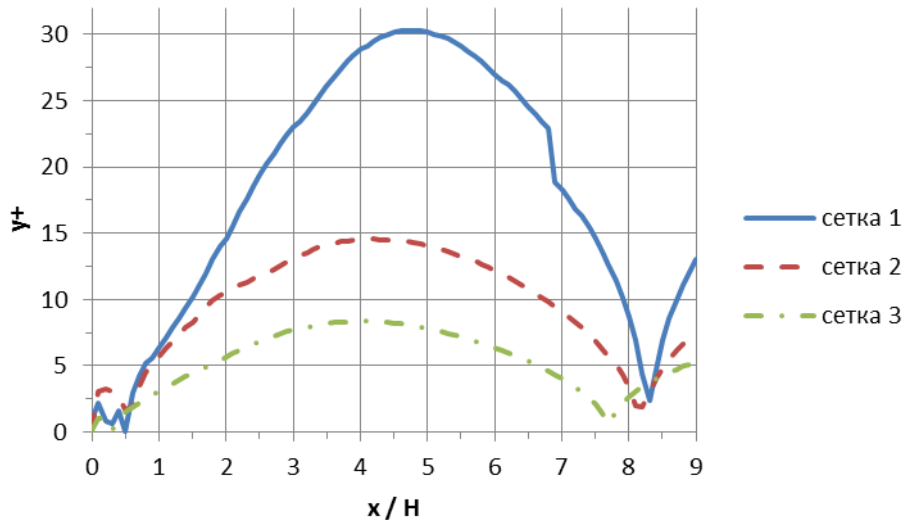


Рис. 11. Распределение y_1^+ на нижней стенке за уступом, полученное с использованием модели KEFV и неравновесных пристеночных функций (x — расстояние до уступа)

Таблица 3. Длина рециркуляционной зоны, модель KEFV

Сетка	Равновесные ПФ	Неравновесные ПФ
1	6.92 Н (-2.6 %)	6.88 Н (-3.1 %)
2	7.15 Н (+0.7 %)	7.30 Н (+2.8 %)
3	7.31 Н (+3.0 %)	7.36 Н (+3.7 %)

Таблица 4. Длина рециркуляционной зоны, модель KES

Сетка	Равновесные ПФ	Неравновесные ПФ
1	6.13 Н (-13.7 %)	6.18 Н (-12.9 %)
2	6.31 Н (-11.1 %)	6.48 Н (-8.7 %)
3	6.51 Н (-8.3 %)	6.52 Н (-8.1 %)

Таблица 5. Длина рециркуляционной зоны, модель SST

Сетка	Равновесные ПФ	Неравновесные ПФ
1	6.88 Н (-3.1 %)	7.03 Н (-1 %)
2	7.12 Н (+0.3 %)	7.31 Н (+3.0 %)
3	7.60 Н (+7.1 %)	7.55 Н (+6.4 %)

Таблица 6. Длина рециркуляционной зоны, модель SA

Сетка	Равновесные ПФ
1	6.50 Н (-8.5 %)
2	6.97 Н (-1.8 %)
3	7.23 Н (+1.8 %)

Как видно из таблиц, наиболее точно длину рециркуляционной зоны за обратным уступом предсказывает модель KEFV.

Выводы

В настоящей работе представлена модель пристеночных функций WFFV. В основе модели — идея наличия двух «путей перемешивания» около твердой поверхности. Первый «путь перемешивания» определяет гладкий профиль скорости в случае безградиентного течения ($\partial p / \partial x = 0$). Второй «путь перемешивания» определяет гладкий профиль скорости около стенки в точке отрыва потока ($\tau_w = 0$). В пристенных ячейках допускается возможность как положительных, так и отрицательных значений силы трения и касательной составляющей градиента давления. В работе обсуждаются две версии модели WFFV: равновесная и неравновесная. В равновесной модели значение турбулентной энергии в центрах пристенных ячеек вычисляется с использованием алгебраических соотношений. В неравновесной модели значение турбулентной энергии в пристенных ячейках получается в результате решения дифференциального уравнения.

Модель WFFV позволяет проводить высокорейнольдсовые расчеты различных течений с k - ε -моделями турбулентности, а также с моделями SST k - ω и SA. Результаты, полученные на относительно грубых сетках ($y_1^+ \geq 16$) с использованием как равновесных, так и неравновесных пристеночных функций, хорошо согласуются с известными корреляциями для коэффициента трения. На более подробных сетках хорошие результаты получаются с использованием моделей KEFV и SST. При этом расчеты с использованием модели KEFV и неравновесных пристеночных функций на сетке $y_1^+ \sim 4$ дают правильное положение байпасного ламинарно-турбулентного перехода. Следует отметить, что область применимости «классических» пристеночных функций — $y_1^+ \geq 30$.

Решение тестовой задачи [Kim, Kline, Johnson, 1980] с использованием равновесных и неравновесных пристеночных функций показало, что обе версии модели WFFV дают удовлетворительное значение длины рециркуляционной зоны в сочетании со всеми рассмотренными моделями турбулентности, за исключением стандартной k - ε -модели. Из литературы [Comsol software, 2013] известно, что эта модель дает значение длины рециркуляционной зоны порядка 6.1 Н (–14 %). Пристеночные функции WFFV заметно уточняют результат (см. таблицу 4). Наиболее точно длину рециркуляционной зоны за обратным уступом предсказывает модель KEFV.

Список литературы

- Белов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбулентных течений: Учебное пособие. — Санкт-Петербург: Издательство Балтийского государственного технического университета, 2001. — 108 с.
- Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 197–207.
- Гарбарук А. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. Учебное пособие. — СПб.: Издательство Политехнического университета, 2012. — 88 с.
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Харченко С. А., Москалёв И. В., Сушко Г. Б., Шишаева А. С. Моделирование отрывных течений в программном комплексе FlowVision-HPC // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Том 11. — С. 234–245.
- Жлуктов С. В., Аксёнов А. А., Карасёв П. И. Моделирование ламинарно-турбулентного перехода в рамках k - ε подхода // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 6. — С. 879–888.

- Семёнов В. П.* Основы механики жидкости: Учебное пособие. — М.: ФЛИНТ, 2013. — 375 с.
- Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
- Abe K., Kondoh T., Nagano Y.* A New Turbulence Model for Predicting Fluid Flow and Heat Transfer in Separating and Reattaching flows-I. Flow Field Calculation // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. — 1994. — Vol. 37, No. 1. — P. 139–151.
- Abu Darag S., Uruba V., Horak V.* An Evaluation of Novel Integral Scheme for Calculations of Transitional Boundary Layers // Colloquium FLUID DYNAMICS, Institute of Thermomechanics AS CR, v.v.i., Prague, Czech Society for Mechanics, the ERCOFTAC Czech Pilot Centre, 2011. — 6 p.
- Aksenov A. A., Zhlukov S. V., Savitskiy D. V., Bartenev G. Y., Pokhilko V. I.* Simulation of 3D Flows past Hypersonic Vehicles in FlowVision Software // Journal of Physics: Conference Series. — 2015. — Vol. 653, No. 012072. — <http://iopscience.iop.org/1742-6596/Y2015>.
- Comsol software* Turbulent Flow Over a Backward Facing Step // https://www.comsol.de/model/download/176341/models.cfd.turbulent_backstep.pdf. — 2013. — 18 p.
- Crabtree L. F., Dommert R. L., Woodley J. G., Farnborough R. A. E.* Estimation of Heat Transfer to Flat Plates, Cones and Blunt Bodies // Aeronautical Research Council Reports and Memoranda. — London: Her Majesty's Stationery office, 1970. — 59 p.
- Kader B. A.* Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 1981. — Vol. 24, No. 9. — P. 1541–1544.
- Kim J., Kline S. J. and Johnson J. P.* Investigation of a Reattaching Turbulent Shear Layer: Flow over a Backward-Facing Step // J. Fluids Eng., ASME Trans. — 1980. — Vol. 102. — P. 302–308.
- Lien F. S., Chen W. L., Leschziner M. A.* Low Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain / Vorticity Relations // Engineering Turbulence Modelling and Measurements 3, Elsevier. — 1996. — P. 91–100.
- Menter F., Carregal Ferreira J., Esch T., Konno B.* The SST Turbulence Model with Improved Wall Treatment for Heat Transfer Predictions in Gas Turbines // Proceedings of the International Gas Turbine Congress, 2003, Tokyo, November 2–7. — 7 p.
- Menter F. R., Kuntz M., Langtry R.* Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc. — 2003. — P. 625–632.
- Savill A. M.* A Synthesis of T3 Test Case Predictions // Numerical Simulation of Unsteady Flows and Transition to Turbulence, ed. O. Pironneau, W. Rodi, I. L. Ryhming, A. M. Savill, and T. V. Truong. — New York: C.U.P., 1992. — P. 404–442.
- Shih T.-H., Povinelli L. A., Liu N.-S., Potapczuk M. G., Lumley J. L.* A Generalized Wall Function // NASA/TM. — 1999. — 209398. — ICOMP-99-08. — 16 p.
- Wilcox D. C.* Turbulence modeling for CFD // DCW Industries, Inc. — 1994. — 460 p.