

УДК: 519.6

Разработка, калибровка и верификация модели движения трафика в городских условиях. Часть II

Я. А. Холодов^{1,2,а}, А. Е. Алексеенко^{1,2}, А. С. Холодов^{1,2},
М. О. Васильев¹, В. Д. Мишин^{1,2}

¹ Московский физико-технический институт,
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

² Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, г. Москва, ул. 2-ая Брестская, д. 19/18

E-mail: ^а kholodov@cres.mipt.ru

Получено 06 ноября 2015 г.

Целью данной работы является обобщение макроскопических гидродинамических моделей второго порядка, описывающих автомобильное движение, с помощью алгоритма построения адекватного реальным измерениям уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока, получаемого эмпирическим образом для каждого отдельного участка транспортной сети с использованием данных транспортных детекторов. Доказано, что именно вид уравнения состояния, замыкающего систему модельных уравнений и полученного из экспериментально наблюдаемого вида фундаментальной диаграммы — зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности, полностью определяет все свойства любой феноменологической модели. Проверка работоспособности предложенного подхода проводилась с использованием численных расчетов, путем проведения вычисленных экспериментов на типичных данных, предоставляемых системой PeMS (<http://pems.dot.ca.gov/>), таких как моделирование движения трафика на заданном участке транспортной сети автомагистрали I-580 в Калифорнии.

Ключевые слова: автомобильное движение, транспортные потоки, макроскопические гидродинамические модели, уравнение состояния, феноменологические модели

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 6, pp. 1205–1219 (Russian).

Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-0060914, РНФ № 14-11-00877.

© 2015 Ярослав Александрович Холодов, Андрей Евгеньевич Алексеенко, Александр Сергеевич Холодов, Михаил Олегович Васильев, Виктор Дмитриевич Мишин

Development, calibration and verification of mathematical model for multilane urban road traffic flow. Part II

Ya. A. Kholodov^{1,2}, A. E. Alekseenko^{1,2}, A. S. Kholodov^{1,2}, M. O. Vasiliev¹, V. D. Mishin^{1,2}

¹ *Moscow Institute of Physics and Technology, 9, Institutskii per., Dolgoprudnyi, Moscow region, 141700, Russia*

² *Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences (ICAD RAS), 19/18 2nd Brestskaya st., Moscow, 123056, Russia*

Abstract. — The goal of this work is to generalize second order mathematical models for automotive flow using algorithm for building state equation — the dependency of pressure on traffic density — which is adequate with regard to real world data. The form of state equation, which closes the system of model equations, is obtained from experimental form of fundamental diagram — the dependency of traffic flow intensity on its density, and completely defines all properties of any phenomenological model. The proposed approach was verified using numerical experiments on typical traffic data, obtained from PeMS system (<http://pems.dot.ca.gov/>), using segment of I-507 highway in California, USA as model system.

Keywords: automotive flow, traffic flow, macroscopic hydrodynamic models, state equation, phenomenological models

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 1205–1219 (Russian).

Работа поддержана грантами РФФИ № 14-01-0060914, РНФ № 14-11-00877.

© 2015 Ярослав Александрович Холодов, Андрей Евгеньевич Алексеенко, Александр Сергеевич Холодов, Михаил Олегович Васильев, Виктор Дмитриевич Мишин

1. Введение

В первой части статьи нами была предложена новая гидродинамическая модель второго порядка, которая замыкалась через уравнение зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$. В современных макроскопических моделях транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка (для плотности и скорости потока) в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 1998; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006; Siebel, Mauser, 2006], в которых по-разному учитывается зависимость интенсивности или скорости потока от его плотности. Тем не менее можно показать, что практически все гидродинамические модели второго порядка могут быть обобщены путем использования единого вида для уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока $P(\rho)$, замыкающего систему используемых уравнений.

В свою очередь, вид уравнения состояния для каждого отдельного участка транспортной сети может быть получен эмпирическим образом с использованием данных транспортных детекторов. Для этого вначале мы должны построить уравнение зависимости интенсивности или скорости транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$, используя полученные с детекторов данные. Затем, зная аналитическое соотношение между $P(\rho)$ и $Q(\rho)$, мы получаем уравнение состояния в виде функции зависимости давления от плотности транспортного потока. Как получается это соотношение, будет подробно показано в следующем разделе. Можно только добавить, что методика автоматической калибровки, предложенная в первой части статьи, для получения уравнения зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности также отлично работает при построении зависимости давления от плотности транспортного потока.

Для верификации предложенного подхода, в котором исследуемые гидродинамические модели второго порядка обобщаются путем использования единого вида эмпирического уравнения состояния, были выполнены вычисленные эксперименты на типичных данных, предоставляемых системой PeMS (<http://pems.dot.ca.gov/>), такие как моделирование движения трафика на заданном участке транспортной сети автомагистрали I-580. Проведенные расчеты показали полное совпадение результатов, полученных при использовании различных макроскопических моделей второго порядка, использующих одни и те же эмпирические уравнения состояния.

2. Обобщенная модель

2.1. Система макроскопических уравнений второго порядка

В первой части статьи нами была получена макроскопическая модель второго порядка для плотности и скорости транспортного потока:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = f_0, \\ \partial v / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial \rho} \partial v / \partial x = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} - v \right) \frac{f_0}{\rho}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Также мы показали, что в соответствии с теоремой, доказанной в работе [Zhang, 2003], полученная нами математическая модель обеспечивает анизотропию транспортного потока на решениях системы уравнений (2.1), поскольку для ее собственных значений $\lambda_{1,2} = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}$ на всем диапазоне значений плотности ($0 \leq \rho \leq \rho_{\max}$) выполняется условие $\lambda_{1,2} = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} < v(\rho)$.

В современных макроскопических моделях второго порядка транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 1998; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006; Siebel, Mauser, 2006], в которых по-разному учитывается зависимость интенсивности или скорости потока от его плотности. Мы рассмотрим наиболее известные из макроскопических моделей второго порядка и на их примере покажем, как можно исследуемую гидродинамическую модель второго порядка привести к общему виду посредством использования обобщенного уравнения состояния.

Начнем наш обзор в историческом порядке с модели Payne–Whitham [Payne, 1971; Whitham, 1974] с нулевой правой частью:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \partial v / \partial t + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c_0^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (2.2)$$

обобщим ее на случай произвольного вида уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока $P(\rho) = \int_0^\rho c(\tilde{\rho})^2 d\tilde{\rho}$, как это было сделано в работе [8]:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Систему уравнений (2.3) можно также записать в дивергентной форме:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + P(\rho))}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Теперь нужно ответить на самый важный вопрос: как нам явно выразить давление $P(\rho) = \int_0^\rho c(\tilde{\rho})^2 d\tilde{\rho}$ или скорость распространения возмущений в транспортном потоке $c(\rho) = \pm \sqrt{\frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho}}$ через рассчитываемые переменные — плотность и скорость транспортного потока? Начнем с выражения для производной давления по плотности:

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = c(\rho)^2 = \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{P_x}{\rho_x} = \left(\rho_x = -\frac{\rho_t}{Q_\rho} \right) = -\frac{Q_\rho}{\rho_t} P_x. \quad (2.5)$$

Далее выразим производную давления по координате из дивергентной формы уравнений (2.4):

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Qv)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

подставим ее в (2.5):

$$c(\rho)^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = -\frac{Q_\rho}{\rho_t} P_x = \frac{Q_\rho}{\rho_t} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = \frac{\partial Q}{\partial \rho} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} - \frac{\partial(Qv)}{\partial Q} \right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{\partial(Qv)}{\partial \rho}.$$

Воспользуемся известными дифференциальными соотношениями

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)^2 = \left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial \rho}\right)^2 = \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2 = v^2 + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2, \\ \frac{\partial(Qv)}{\partial \rho} = \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial \rho} = v^2 + \rho \frac{\partial(v^2)}{\partial \rho} = v^2 + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho}. \end{cases}$$

Подставим эти соотношения в выражение для производной давления по плотности и получим окончательную формулу для производной давления по плотности $\frac{\partial P}{\partial \rho} = c(\rho)^2$:

$$c(\rho)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right)^2 - \frac{\partial(Qv)}{\partial \rho} = v^2 + 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho} + \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2 - v^2 - 2\rho v \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2. \quad (2.6)$$

Используем формулу (2.6) во втором уравнении системы (2.3):

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

А теперь снова воспользуемся известным дифференциальным соотношением $\frac{\partial Q}{\partial \rho} = v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}$ и подставим его в (2.7):

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho}\right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

В итоге мы получили предложенную нами в первой части статьи макроскопическую модель второго порядка для плотности и скорости транспортного потока (2.1) с нулевой правой частью. Отсутствие релаксационного члена $\frac{1}{\tau}(V(\rho) - v)$ в правой части второго уравнения (2.1) мы подробно обосновывали в первой части статьи. Стоит также отметить, что выражение для скорости распространения возмущений вида $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ впервые было предложено в работе [Zhang, 2002], только вместо текущей скорости транспортного потока $v(\rho)$ в ней использовались желаемая (равновесная) скорость $V(\rho)$ и уравнение импульса в форме $\frac{\partial v}{\partial t} + (v + c(\rho)) \frac{\partial v}{\partial x} = 0$. При этом автором в статье [Zhang, 2002] выражение для скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ выводилось из модели следования за лидером [Helbing, 2001], тогда как мы смогли получить наше выражение для скорости распространения возмущений $c(\rho) = \pm \sqrt{\frac{\partial P(\rho)}{\partial \rho}} = \pm \sqrt{\rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2} = \pm \rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho}$ в обобщенном виде из дивергентной формы системы уравнений (2.4), не накладывая никаких ограничений на зависимость скорости от плотности $v(\rho)$.

Посмотрим теперь, как выглядят другие используемые гидродинамические модели второго порядка. В работе [Zhang, 2002] система модельных уравнений предлагалась в следующем виде:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c(\rho) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

где скорость распространения возмущений вида, как упоминалось выше, выражалась через производную желаемой (равновесной) скорости: $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$.

Стоит отметить, что в таком виде система уравнений (2.9) почти полностью идентична не-дивергентной форме системы уравнений, предложенной в работе [Aw, Rascle, 2000]. Различие состоит только в обозначениях, в работе [Aw, Rascle, 2000] вместо желаемой (равновесной) скорости $V(\rho)$ использовалась гладкая функция $p(\rho)$:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v - \rho \frac{\partial p(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

С физической точки зрения использование в (2.10) желаемой (равновесной) скорости $V(\rho)$ вместо гладкой возрастающей функции $p(\rho) \sim \rho^\gamma$, $\gamma > 0$, гораздо более очевидно и обосновано (см. [Zhang, 2002]). Хотя бы потому, что зависимость $V(\rho)$ не может быть гладкой при переходе между различными фазовыми состояниями транспортного потока.

Такой же вид, как в (2.9), для системы модельных уравнений с добавлением специального релаксационного члена $\beta(\rho, v)(V(\rho) - v)$ в правую часть использовался в работах [Siebe, Mauser, 2006a; Siebe, Mauser, 2006b]:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(v + \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \beta(\rho, v)(V(\rho) - v), \end{cases} \quad (2.11)$$

где в качестве желаемой (равновесной) скорости бралась функция $V(\rho) = V_{\max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^{n_1} \right)^{n_2}$

в работе [Siebel, Mauser, 2006a] и функция $V(\rho) = V_{\max} \left(1 - \exp \left(- \frac{\lambda}{V_{\max}} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\max}} \right) \right) \right)$ в работе [Siebel, Mauser, 2006b].

Сформулируем полученные выше результаты в виде следующей теоремы.

Теорема. Любую макроскопическую систему гиперболических уравнений второго порядка, описывающую автомобильное движение, можно привести к диагональному виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = f_0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} - v \right) \frac{f_0}{\rho} + f_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

путем использования обобщенного уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока $P(\rho) = \int_0^\rho c(\tilde{\rho})^2 d\tilde{\rho} = \int_0^\rho \tilde{\rho}^2 \left(\frac{\partial v(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho}$, замыкающего исходную систему уравнений. При этом f_1 в правой части (2.15) будет играть роль релаксационного слагаемого в случае необходимости в нем.

Функции $Q(\rho)$ или $V(\rho)$ — зависимости интенсивности или желаемой (равновесной) скорости от плотности — каждый исследователь может строить так, как ему больше нравится. Мы предлагаем делать это эмпирическим образом для каждого отдельного участка транспортной сети с использованием алгоритма калибровки данных транспортных детекторов. Это подробно обсуждалось в первой части статьи, где мы строили зависимость интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho) = \rho V(\rho)$ в соответствии с теорией трех фаз транспортного потока Б. С. Кернера [Kerner, 2009]. Мы еще вернемся к этому вопросу в следующем разделе статьи.

Что касается использования в правой части уравнения изменения импульса релаксационного члена $\frac{1}{\tau}(V(\rho) - v)$, то мы его отбрасываем, исходя из соображений, что все особенности поведения транспортного потока автоматически учитываются при получении функциональной зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$ по данным измерений с автострадных датчиков.

В этом разделе осталось обсудить еще один важный вопрос, касающийся собственных значений модельных систем уравнений второго порядка. Системы уравнений в частных производных (2.3), (2.4), (2.7)–(2.10) имеют гиперболический тип. Вводя в рассмотрение векторы $V = \{\rho, v\}^T$, $U = \{\rho, \rho v\}^T$, $F = \{\rho v, \rho v^2 + P(\rho)\}^T$, системы уравнений (2.3), (2.4), (2.7)–(2.10) можно записать в векторном виде:

$$\partial V / \partial t + A_0 \partial V / \partial x = 0 \tag{2.13}$$

с матрицей Якоби A_0 для недивергентной формы записи этих уравнений (2.3), (2.7)–(2.11):

$$A_0 = \begin{pmatrix} v & \rho \\ \frac{c(\rho)^2}{\rho} & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & \rho \\ 0 & v + c(\rho) \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \end{Bmatrix} \tag{2.14}$$

или с матрицей Якоби $A = \partial F / \partial U$ для дивергентной формы (2.4):

$$\partial U / \partial t + \partial F / \partial x = \partial U / \partial t + A \partial U / \partial x = 0. \tag{2.15}$$

Собственные числа матриц Якоби A_0 или $A = \partial F / \partial U = U_v A_0 U_v^{-1}$ будут иметь различный вид в зависимости от того, в какой форме они записаны: $\lambda_{1,2} = v \pm c(\rho)$ или

$\lambda_1 = v + c(\rho) = v + \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} \leq \lambda_2 = v$. При этом, как только мы выражаем скорость распространения возмущений в транспортном потоке $c(\rho)$ через его плотность и скорость:

$c^2(\rho) = \rho^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \rho} \right)^2$, оба различных собственных значения сворачиваются к одному-единственному: $\lambda_{1,2} = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = v + \rho \frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho}$. Это позволяет закрыть все вопросы, связанные с анизотроп-

ными свойствами систем уравнений второго порядка, которые возникали раньше из-за наличия второго собственного значения, большего, чем скорость транспортного потока.

2.2. Получение эмпирического уравнения состояния

В первой части статьи мы уже писали об алгоритме использовании данных детекторов транспорта для калибровки модельной системы уравнений. Именно данные измерений с автострадных датчиков позволяют идентифицировать фундаментальные диаграммы для соответствующих участков автострады и построить функциональные зависимости $Q(\rho)$. Каждый исследователь волен сам выбирать вид модельной системы уравнений второго порядка, поскольку определять свойства модели будет только вид зависимости скорости распространения возмущений от плотности $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$. Функцию зависимости желаемой (равновесной) скорости от плотности $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$ мы предлагаем получать из эмпирически найденной функциональной зависимости интенсивности от плотности $Q(\rho)$ с использованием данных транспортных детекторов и автомобильных GPS-треков.

Для проверки работоспособности предложенного подхода, в котором исследуемые гидродинамические модели второго порядка обобщаются путем использования единого вида эмпирического уравнения состояния, мы взяли архивные данные наблюдений из базы данных системы PeMS (<http://pems.dot.ca.gov/>). Поскольку в системе PeMS не предусмотрено использование автомобильных GPS-треков, нам пришлось вместо скорости волны торможения транспортного потока использовать скорость «заднего фронта широкого движущегося кластера» (линия J на рисунке), предложенную Кернером [Kerner, 2009]. Как показали исследования, проведенные для МКАД в первой части статьи, эти две скорости практически совпадают по своим значениям и могут заменять друг друга.

Фундаментальные диаграммы для двух различных участков транспортной сети автострады I-580 в Калифорнии, полученные с использованием данных системы PeMS за период с января по декабрь 2012 года, представлены на рис. 2.2.

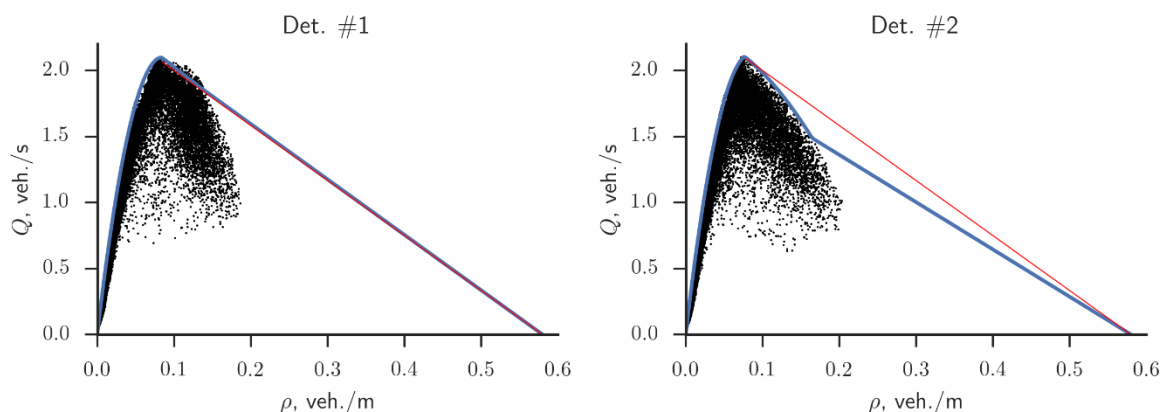


Рис. 2.1. Фундаментальные диаграммы для двух различных участков транспортной сети автострады I-580, полученные с использованием данных системы PeMS: слева — для данных с детектора № 1, справа — с детектора № 2. Красным цветом обозначена линия J (см. [Kerner, 2009])

Как и в первой части статьи, в соответствии с теорией трех фаз транспортного потока Б. С. Кернера [Kerner, 2009] на скоростных автомагистралях выделяем три фазы транспортного потока и строим для каждой из фаз свои функциональные зависимости $Q(\rho)$, сшивая их в точ-

как фазового перехода: ρ_1 — переход от фазы свободного потока к синхронизированной фазе; ρ_2 — переход от синхронизированной фазы к заторному потоку.

1. Свободный поток: $Q(\rho) = \alpha_2 \rho^2 + \alpha_1 \rho, \quad 0 \leq \rho < \rho_1.$
2. Синхронизированный поток: $Q(\rho) = \beta_2 \rho^2 + \beta_1 \rho + \beta_0, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2.$
3. Заторный поток: $Q(\rho) = c_* (\rho_{\max} - \rho), \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_{\max}.$

Коэффициенты функциональных зависимостей $Q(\rho)$ находим, приравнявая значения функций в найденных точках к известным значениям интенсивностей в них (подробнее об этом — во второй части). Затем, зная функциональные зависимости интенсивности от плотности $Q(\rho)$,

получаем зависимости желаемой (равновесной) скорости $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$, собственных значений $\lambda_{1,2}(\rho) = \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho}$ и скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ от плотности.

1. Свободный поток:
$$\begin{cases} V(\rho) = \alpha_2 \rho + \alpha_1, \\ \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = 2\alpha_2 \rho + \alpha_1, \quad 0 \leq \rho < \rho_1, \\ c(\rho) = \alpha_2 \rho. \end{cases}$$
2. Синхронизированный поток:
$$\begin{cases} V(\rho) = \beta_2 \rho + \beta_1 + \frac{\beta_0}{\rho}, \\ \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = 2\beta_2 \rho + \beta_1, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2, \\ c(\rho) = \beta_2 \rho - \frac{\beta_0}{\rho}. \end{cases}$$
3. Заторный поток:
$$\begin{cases} V(\rho) = c_* \left(\frac{\rho_{\max}}{\rho} - 1 \right), \\ \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} = -c_*, \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_{\max}, \\ c(\rho) = -\frac{c_* \rho_{\max}}{\rho}. \end{cases}$$

Итоговые уравнения состояния получаем по известной нам аналитической формуле

$$P(\rho) = \int_0^\rho c(\tilde{\rho})^2 d\tilde{\rho} = \int_0^\rho \tilde{\rho}^2 \left(\frac{\partial V(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho}.$$

1. Свободный поток: $P(\rho) = \frac{\alpha_2^2 \rho^3}{3}, \quad 0 \leq \rho < \rho_1.$

2. Синхронизированный поток:

$$P(\rho) = \frac{\beta_2^2}{3} (\rho^3 - \rho_1^3) + 2\beta_0 \beta_2 (\rho_1 - \rho) + \beta_0^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) + \frac{\alpha_2^2 \rho_1^3}{3}, \quad \rho_1 \leq \rho < \rho_2.$$

3. Заторный поток:

$$P(\rho) = c_*^2 \rho_{\max}^2 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} \right) + \beta_0^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) + \frac{\beta_2^2}{3} (\rho_2^3 - \rho_1^3) + 2\beta_0 \beta_2 (\rho_1 - \rho_2) + \frac{\alpha_2^2 \rho_1^3}{3}, \quad \rho_2 \leq \rho \leq \rho_{\max}.$$

Для транспортных данных, представленных на рис. 2.1, были получены следующие значения параметров для калибровки фундаментальных диаграмм:

– детектор № 1: $Q_1 = \max_{\rho} [Q(\rho)] = 2.10 \text{ АТС/с}$, $\rho_1 = 0.084 \text{ АТС/м}$, $\alpha_1 = 49.6$,

$$\alpha_2 = -293.2, Q_2 = \max \sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2} = 1.84 \text{ АТС/с}, \rho_2 = 0.141 \text{ АТС/м}, \beta_0 = 2.5,$$

$$\beta_1 = -4.9, \beta_2 = 1.6, c_* = 4.20 \text{ [м/с]}, \rho_{\max} = 0.58 \text{ Атс/м};$$

– детектор № 2: $Q_1 = \max_{\rho} [Q(\rho)] = 2.11 \text{ АТС/с}$, $\rho_1 = 0.076 \text{ АТС/м}$, $\alpha_1 = 50.2$,

$$\alpha_2 = -295.7, Q_2 = \max \sqrt{\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}}\right)^2} = 1.49 \text{ АТС/с}, \rho_2 = 0.165 \text{ АТС/м}, \beta_0 = 2.30,$$

$$\beta_1 = -0.4, \beta_2 = -27.6, c_* = 3.58 \text{ м/с}, \rho_{\max} = 0.58 \text{ Атс/м};$$

На рис. 2.2 для этих же наборов данных показаны зависимости желаемой (равновесной) скорости $V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$ и скорости распространения возмущений $c(\rho) = \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}$ от плотности. Итоговые уравнения состояния, полученные эмпирическим образом, для двух различных участков транспортной сети автострады I-580 соответственно представлены на рис. 2.3.

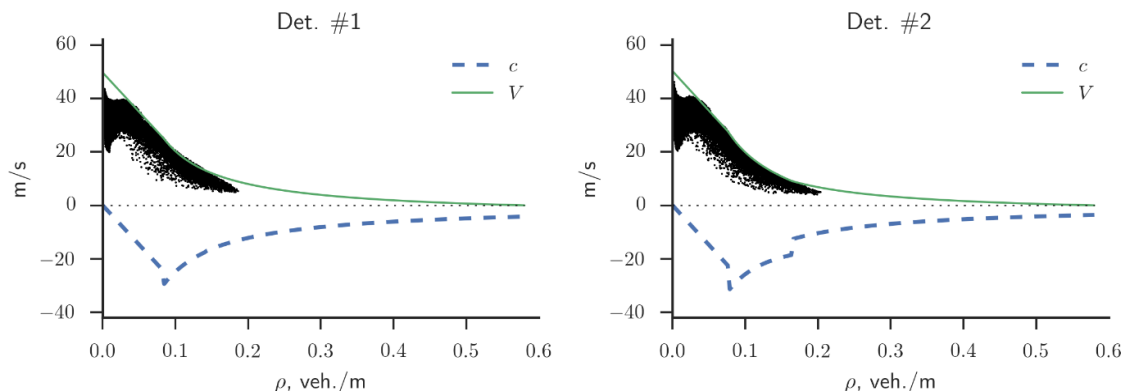


Рис. 2.2. Зависимости желаемой (равновесной) скорости (сплошная линия) и скорости распространения возмущений (пунктирная линия) от плотности для двух различных участков транспортной сети автострады I-580 в Калифорнии, полученные с использованием данных системы PeMS: слева — для данных с детектора № 1, справа — с детектора № 2

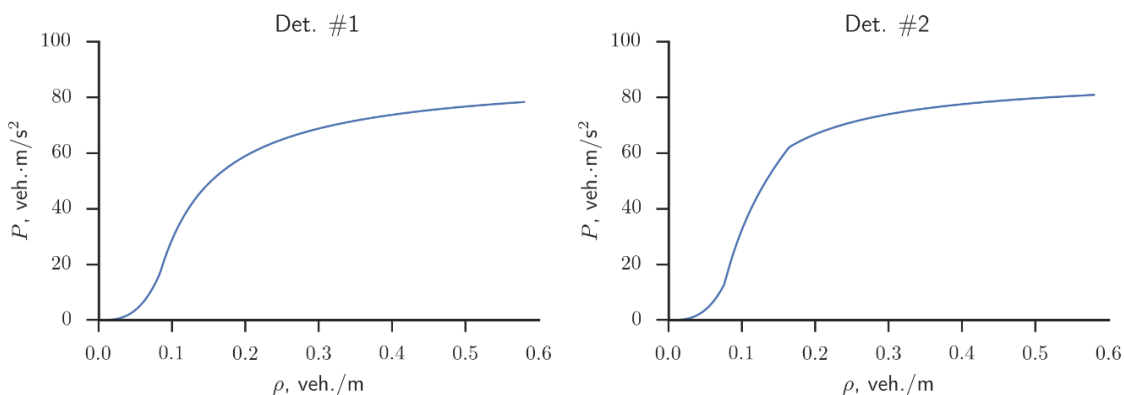


Рис. 2.3. Эмпирические уравнения состояния для двух различных участков транспортной сети автострады I-580 в Калифорнии, полученные с использованием данных детекторов системы PeMS за период с января по декабрь 2012 года: слева — для данных с детектора № 1, справа — с детектора № 2

2.3. Алгоритм численного решения

В первой части статьи мы подробно изложили алгоритм численного решения системы уравнений в форме (2.1), которая имеет диагональную матрицу Якоби $\Lambda = \text{diag}\{\partial Q(\rho)/\partial \rho\}$, что заметно упрощает этот алгоритм. В случае представления системы уравнений в векторной форме (2.13) или (2.15), в которой матрица Якоби не имеет диагональную форму, построение алгоритма численного решения усложняется, но не сильно. Для систем уравнений (2.13), (2.15) все возможное семейство разностных схем можно представить в следующем общем виде:

$$\begin{cases} V_m^{n+1} = V_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (W_{m+1/2}^{n+1/2} - W_{m-1/2}^{n+1/2}), \\ U_m^{n+1} = U_m^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2}). \end{cases} \tag{2.16}$$

В (2.17) Δt и Δx — шаги численного интегрирования по времени и пространству. Выбор интерполяционных выражений для $F_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ и $W_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в (2.17) является определяющим для получения заданных свойств этих схем. При выборе численного метода нам стоит принять во внимание тот факт, что решение модельных систем уравнений на каждом из ребер графа транспортной сети определяется изменением значений рассчитываемых параметров в его граничных точках. В этом случае можно ограничиться в выборе монотонным сеточно-характеристическим методом первого порядка аппроксимации [Магомедов, Холодов, 1969], в котором

$$\begin{cases} W_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (A_0)_{m\pm 1/2}^n (V_m^n + V_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} (\Omega_0^{-1} |\Lambda| \Omega_0)_{m\pm 1/2}^n (V_m^n - V_{m\pm 1}^n), \\ F_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (F_m^n + F_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2} (\Omega^{-1} |\Lambda| \Omega)_{m\pm 1/2}^n (U_m^n - U_{m\pm 1}^n), \end{cases} \tag{2.17}$$

или это могут быть более сложные выражения, позволяющие построить схему более высокого порядка аппроксимации на заданном сеточном шаблоне. В (2.18) Λ — диагональная матрица собственных значений матриц Якоби A_0 или $A = \partial F / \partial U = U_V A_0 U_V^{-1}$ систем уравнений (2.13), (2.15) и соответственно $\Omega_0, \Omega = \Omega_0 U_V^{-1}$ — матрицы их левых собственных векторов. Значения переменных в промежуточных узлах $m \pm 1/2$ в (2.18) можно вычислять с использованием простейшей линейной интерполяции без потери итоговой точности разностных схем.

Эквивалентная системам (2.13), (2.15) характеристическая форма уравнений совместности вдоль характеристик $dx = \lambda_i dt, i = 1, 2$, будет иметь вид

$$\begin{cases} \omega_{0,i} \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial V}{\partial x} \right) = 0, \\ \omega_i \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \end{cases} \quad i = 1, 2. \tag{2.18}$$

Каждое из уравнений (2.19) является, по сути, обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль характеристики $dx = \lambda_i dt$. Условия совместности (2.19) бывает необходимо численно интегрировать в граничных точках вдоль идущих внутрь области интегрирования характеристик. Например, на въезде дороги в граничной точке (t^{n+1}, x_1) при отрицательном собственном значении $(\lambda_i)_{3/2}^n < 0$ получаем

$$\begin{cases} (\omega_{0,i})_{3/2}^n \cdot \left(\frac{V_1^{n+1} - V_1^n}{\Delta t} + (\lambda_i)_{3/2}^n \frac{V_2^n - V_1^n}{\Delta x} \right) = 0, \\ (\omega_i)_{3/2}^n \cdot \left(\frac{U_1^{n+1} - U_1^n}{\Delta t} + (\lambda_i)_{3/2}^n \frac{U_2^n - U_1^n}{\Delta x} \right) = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

В случае если $(\lambda_i)_{3/2}^n > 0$, используем граничные условия $\{\rho, v\}_1^{n+1} = \{\rho(t^{n+1}, x_1), v(t^{n+1}, x_1)\}$.

На выезде дороги мы выполняем те же действия, но для противоположного знака, $(\lambda_i)_{M-1/2}^n > 0$:

$$\begin{cases} (\omega_{0,i})_{M-1/2}^n \cdot \left(\frac{V_M^{n+1} - V_M^n}{\Delta t} + (\lambda_i)_{M-1/2}^n \frac{V_M^n - V_{M-1}^n}{\Delta x} \right) = 0, \\ (\omega_i)_{M-1/2}^n \cdot \left(\frac{U_M^{n+1} - U_M^n}{\Delta t} + (\lambda_i)_{M-1/2}^n \frac{U_M^n - U_{M-1}^n}{\Delta x} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

При отрицательном значении $(\lambda_i)_{M-1/2}^n < 0$ величины $(\rho, v)_M^{n+1}$ необходимо определять из известных временных зависимостей $\{\rho, v\}_M^{n+1} = \{\rho(t^{n+1}, x_M), v(t^{n+1}, x_M)\}$, а если они неизвестны, то можно задать прозрачные граничные условия $(\partial\rho/\partial x) = 0, (\partial v/\partial x) = 0$ в виде $\{\rho, v\}_M^{n+1} = \{\rho, v\}_{M-1}^{n+1}$.

3. Результаты расчетов

Для проверки работоспособности предложенного подхода, в котором исследуемые гидродинамические модели второго порядка обещаются путем использования единого вида эмпирического уравнения состояния, были выполнены вычисленные эксперименты на типичных данных, предоставляемых системой PeMS (<http://pems.dot.ca.gov/>), такие как моделирование движения трафика на заданном участке транспортной сети автострады I-580 в районе залива Сан-Франциско (см. рис. 3.1). Для этого использовались выбранные нами два детектора транспорта № 1 и № 2, между которыми расстояние составляет около километра и отсутствуют выезды и выезды с автодороги. Данные с детектора № 1 (скорость и интенсивность транспортного потока) задавались в качестве граничных условий при моделировании поведения транспортного потока, а данные следующего по направлению движения детектора № 2 использовались как тестовые для сравнения с ними полученных численных результатов. При этом на втором детекторе задавались неотражающие граничные условия в виде нулевых производных $(\partial Q/\partial x) = 0, (\partial v/\partial x) = 0$. Расчет проводился за суточный интервал одного рабочего дня суммарно для всех четырех полос автострады I-580. Результаты представлены на рис. 3.2 для интенсивности транспортных потоков и на рис. 3.3 для скорости. Слева сверху показаны результаты, полученные с использованием разработанной анизотропной модели второго порядка (2.1), справа сверху — для обобщенной модели Payne–Whitham в дивергентной форме с нулевой правой частью (2.4).

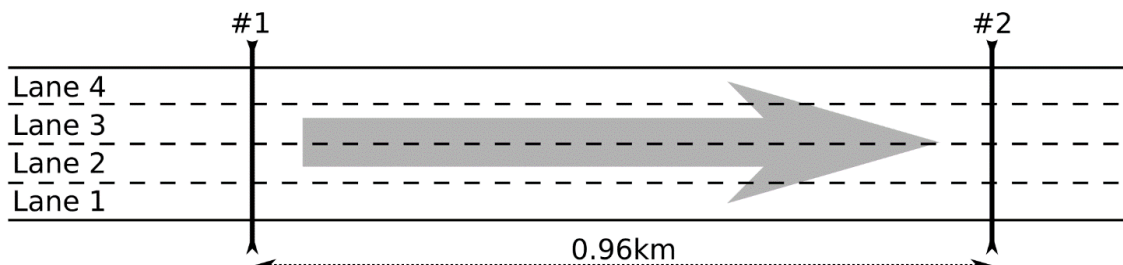


Рис. 3.1. Тестовые детекторы транспорта № 1 и № 2, выбранные на участке транспортной сети автострады I-580 в Калифорнии. Данные с детектора № 1 (скорость и интенсивность транспортного потока) задавались в качестве граничных условий при моделировании поведения транспортного потока, а данные следующего по направлению движения детектора № 2 использовались для сравнения с ними полученных численных результатов

Слева внизу показаны результаты, полученные с использованием системы модельных уравнений (2.9), предложенной в работе [Zhang, 2002], справа внизу — для системы уравнений в дивергентной форме, предложенной в работе [Aw, Rascle, 2000]. Все исследуемые гидродинамические модели при проведении расчетов использовали одни и те же эмпирические уравнения состояния, полученные в разделе 2.2 для двух детекторов, установленных на автостраде I-580.

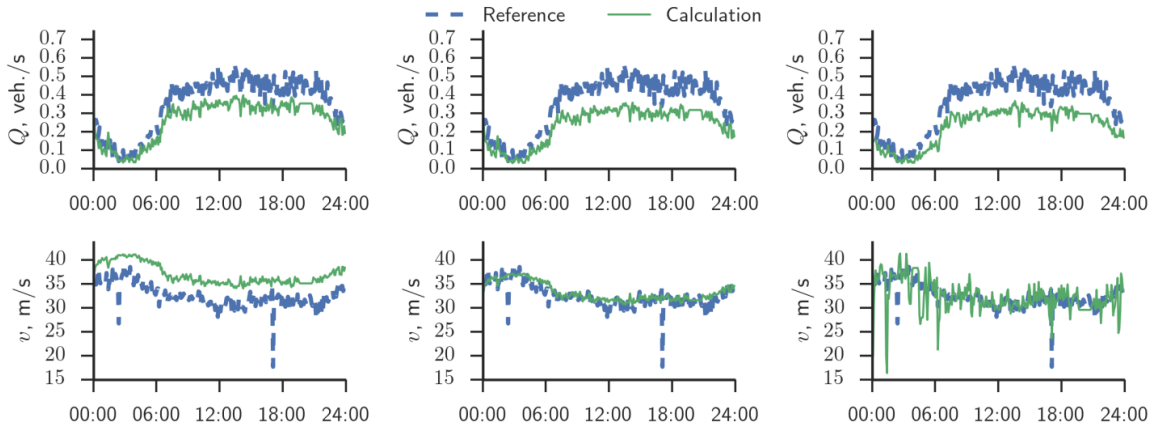


Рис. 3.2. Сравнение расчетных значений интенсивностей транспортных потоков (зеленый цвет) по всем трем полосам автострады I-580 за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева сверху — для разработанной анизотропной модели второго порядка (2.1), справа сверху — для обобщенной модели Payne–Whitham (2.4). Слева внизу — для системы модельных уравнений (2.9), предложенной в работе [Zhang, 2002]; справа внизу — для дивергентной системы уравнений, предложенной в работе [Aw, Rascle, 2000]

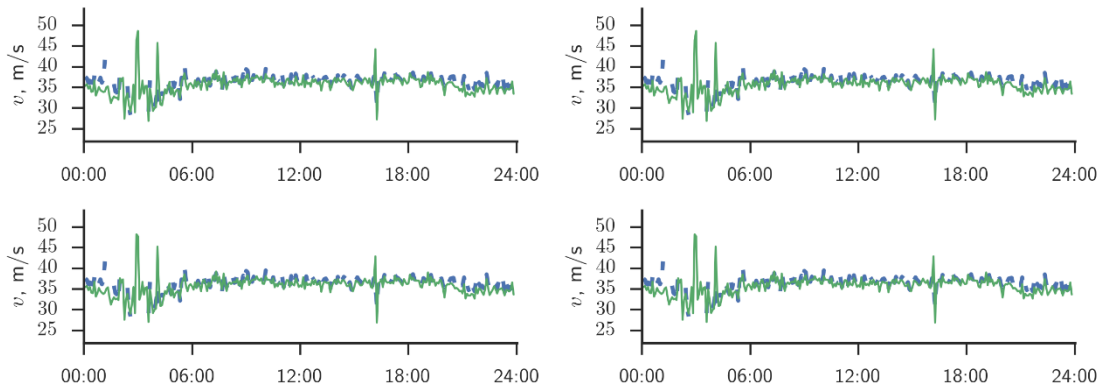


Рис. 3.3. Сравнение расчетных значений скоростей транспортных потоков (зеленый цвет) по всем трем полосам автострады I-580 за суточный период времени с данными экспериментальных наблюдений (синий цвет), полученными с датчика транспорта № 2 с пятиминутным временным интервалом. Слева сверху — для разработанной анизотропной модели второго порядка (2.1), справа сверху — для обобщенной модели Payne–Whitham (2.4). Слева внизу — для системы модельных уравнений (2.9), предложенной в работе [Zhang, 2002]; справа внизу — для дивергентной системы уравнений, предложенной в работе [Aw, Rascle, 2000]

Проведенные расчеты показали полное совпадение результатов, полученных при использовании различных макроскопических моделей второго порядка, использующих одни и те же эмпирические уравнения состояния. Это еще раз подтверждает, что практически все гидродинамические модели второго порядка могут быть обобщены путем использования единого вида для уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока $P(\rho)$, замыкающего систему используемых уравнений.

4. Заключение

В данной работе исследовалась проблема обобщения макроскопических гидродинамических моделей движения транспортного потока второго порядка в различных постановках [Payne, 1971; Daganzo, 1995; Papageorgiou, 1998; Aw, Rascle, 2000; Zhang, 2002; Zhang, 2003; Siebel, Mauser, 2006; Siebel, Mauser, 2006] с помощью алгоритма построения адекватного реальным измерениям уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока, получаемого эмпирическим путем.

В современных макроскопических моделях транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений второго порядка (для плотности и скорости потока), в которых по-разному учитывается зависимость интенсивности или скорости потока от его плотности. Тем не менее нами было показано, что практически все гидродинамические модели второго порядка могут быть обобщены путем использования единого вида для уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока $P(\rho)$, замыкающего систему используемых уравнений.

Также мы показали, что вид уравнения состояния для каждого отдельного участка транспортной сети может быть получен эмпирическим образом с использованием данных транспортных детекторов. Для этого вначале выводим уравнение зависимости интенсивности или скорости транспортного потока от его плотности $Q(\rho)$, используя полученные с детекторов данные. Затем, зная аналитическое соотношение между $P(\rho)$ и $Q(\rho)$, мы получаем уравнение состояния в виде функции зависимости давления от плотности транспортного потока. Стоит также отметить, что методика автоматической калибровки, предложенная в первой части статьи, для получения уравнения зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности также отлично работает при построении зависимости давления от плотности транспортного потока.

Для проверки работоспособности предложенного подхода нами были выполнены вычисленные эксперименты на типичных данных, предоставляемых системой PeMS (<http://pems.dot.ca.gov/>), такие как моделирование движения трафика на заданном участке транспортной сети автомагистрали I-580 в районе Калифорнии. Проведенные расчеты показали полное совпадение результатов, полученных при использовании различных макроскопических моделей второго порядка, использующих одни и те же эмпирические уравнения состояния. Это доказывает, что именно вид уравнения состояния, замыкающего систему модельных уравнений — зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности, полностью определяет все свойства любой феноменологической модели.

Список использованной литературы

- Годунов С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — М.: Наука, 1998. — 280 с.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
- Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order” models of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 60. — P. 916–938.
- Bradski, G. The OpenCV Library. Dr. Dobb's Journal of Software Tools. — 2000.
- Canny, J. A Computational Approach to Edge Detection, IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1986. — Vol. 8(6). — P. 679–698.
- Daganzo C. F. Requiem for second-order approximations of traffic flow // Transport. Res. B. — 1995. — Vol. 29B (4). — P. 277–286.
- Eddy, W. F. Convex Hull Peeling, in: COMPSTAT 1982 5th Symposium Held at Toulouse. — 1982. — Physica-Verlag HD, Heidelberg. — P. 42–47. doi:10.1007/978-3-642-51461-6_4

- Edelsbrunner H., Kirkpatrick D. G., Seidel R.* On the shape of a set of points in the plane // IEEE Transactions on Information Theory. — 1983. — Vol. 29 (4). — P. 551–559.
- Gazis D. C.* Traffic science.— NY: Wiley, 1974.
- Kerner B. S.* Introduction to modern traffic flow theory and control. The long road to three — phase traffic theory. — Springer, 2009.
- Lighthill M. J., Whitham G. B.* On kinematic waves: II. Theory of traffic flow on long crowded roads // Proc. R. Soc. London, Ser. A. — 1955. — Vol. 229. — P. 281–345.
- Magomedov K. M., Kholodov A. S.* The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1969. — Vol. 9(2). — P. 158–176.
- Matas J., Galambos C., Kittler J. V.* Robust Detection of Lines Using the Progressive Probabilistic Hough Transform // CVIU. — 2000. — Vol. 78 1. — P. 119–137.
- Papageorgiou M.* Some remarks on macroscopic flow modeling // Transport. Res. A. 1998. — Vol. 32 (5). — P. 323–329.
- Payne H.J.* Models of freeway traffic and control // Simulation Council Proc. 28, Mathematical Models of Public Systems. Edited by G.A. Bekey. — 1971. — Vol. 1. — P. 51–61.
- Richards P. I.* Shock Waves on the Highway // Oper. Res. — 1956. — Vol. 4. — P. 42–51.
- Siebel F., Mauser W.* On the fundamental diagram of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2006. — Vol. 66(4). — P. 1150–1162.
- Siebel F., Mauser W.* Synchronized flow and wide moving jams from balanced vehicular traffic // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73. — P. 066108.
- Wang H., Li J., Chen Q.-Y., N. D.* Logistic modeling of the equilibrium speed–density relationship // Transp. Res. Part A Policy Pract. — 2011. — Vol. 45(6). — P. 554–566. doi:10.1016/j.tra.2011.03.010.
- Whitham. G. B.* Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.
- Zhang H. M.* A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior // Transp. Res. B. — 2002. Vol. 36. — P. 275–290.
- Zhang H. M.* Anisotropic property revisited — does it hold in multi-lane traffic? // Transportation Research Part B: Methodological, Issue 6. — 2003. — Vol. 37. — P. 561–577.