КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 5 С. 1033–1046

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.958

Улучшение качества изображений в компьютерной томографии с помощью интегрального преобразования специального вида

В. Г. Назаров

Институт прикладной математики ДВО РАН,
Россия, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, д. 7
Дальневосточный федеральный университет,
Россия, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, д. 8

E-mail: naz@iam.dvo.ru

Получено 15 мая 2015 г.,
после доработки 7 октября 2015 г.

В работе рассматривается вопрос об улучшении качества изображений, получаемых в задаче томографии. Задача заключается в нахождении границ неоднородностей (включений) в сплошной среде по результатам просвечивания этой среды потоком излучения. Предложено нелинейное интегральное преобразование специального вида, которое позволяет улучшить качество изображений по сравнению с тем, которое получали авторы ряда работ ранее. Метод реализован численно с помощью компьютерного моделирования. Проведено несколько расчетов с использованием данных для конкретных материалов. Полученные при этом результаты представлены рисунками и графическими изображениями.

Ключевые слова: обратные задачи, рентгеновская томография, уравнение переноса излучения

Improvement of image quality in a computer tomography by means of integral transformation of a special kind

V. G. Nazarov

Institute of Applied Mathematics FEBRAS, 7 Radio st., Vladivostok, 690041, Russia
Far Eastern Federal University, 8 Suhanova st., Vladivostok, 690950, Russia

Abstract. — The question on improvement of quality of images obtained in a tomography problem is considered. The problem consists in finding of boundaries of inhomogeneities (inclusions) in a continuous medium by results of X-ray radiography of this medium. A nonlinear integral transformation of a special kind is proposed which allows to improve quality of images obtained earlier at a set of papers. The method is realized numerically by the use of computer modelling. Some calculations are carried out with use of data for concrete materials. The results obtained are presented by drawings and graphic images.

Keywords: inverse problems, X-ray tomography, radiation transfer equation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 5, pp. 1033–1046 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00079).

© 2015 Василий Геннадиевич Назаров

Введение

Ранее в работах [Anikonov, Nazarov, Prokhorov, 2011; Аниконов, Назаров, Прохоров, 2011; Аниконов, Назаров, 2012; Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014] рассматривалась задача нахождения границ неоднородностей в сплошной среде по результатам просвечивания этой среды рентгеновским излучением. Плотность потока излучения, прошедшего через среду, считалась известной в точках некоторой площадки, находящейся в среде, для заданного направления. Авторами было предложено несколько способов нахождения проекций границ неоднородностей на эту площадку и на основании ряда численных экспериментов показана возможность успешного решения поставленной задачи с помощью предложенных авторами индикаторов неоднородностей.

Лучшим из предложенных индикаторов является, по всей видимости, индикатор, основанный на линейном интегральном преобразовании типа Соболева [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014]. Вместе с тем при больших значениях ошибки измерения сигнала (плотности потока излучения) качество получающихся изображений сильно ухудшается, а именно: толщина изображения искомых границ становится чрезмерно большой, что может оказаться неприемлемым, особенно в тех случаях, когда требуется знать положение этой границы с нужной точностью.

В данной работе автор предлагает интегральное преобразование специального вида, которое позволяет в заметной степени улучшить ситуацию, а именно: при том же уровне шума сделать изображение границы одновременно более тонким и отчетливым.

Носитель ядра преобразования типа Соболева компактен и имеет форму круга. Носитель ядра нового преобразования также компактен, но может принимать форму тонкого лунного серпа (см. рис. 2b), поэтому его можно назвать «Лунным» преобразованием. Другой особенностью «Лунного» преобразования является то, что в общем случае оно является нелинейным, в частности, ориентация такого лунного серпа различна в разных точках измерительной площадки.

Предварительные замечания и постановка задачи

Предлагаемый в данной работе способ улучшения изображений относится к интегродифференциальному оператору, введенному в [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014], поэтому сначала остановимся вкратце на постановке конкретной задачи и результатах, полученных в работе [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014]. Введем следующие обозначения.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана ограниченная выпуклая область G с гладкой границей класса C^1, т. е. $\partial G \in C^1$.

Пусть плоскость Q разделяет область G на две части (G_1, G_2') и в G_2' содержатся три строго выпуклые подобласти (G_3, G_4, G_5) с границами класса C^2. Считаем, что $\overline{G_i} \bigcap \overline{G_j} = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 3, 4, 5$. Обозначим $G_2 = G_2' \backslash (\overline{G_3} \bigcup \overline{G_4} \bigcup \overline{G_5})$. Через область G_1 проходит плоскость P, параллельная Q. Предполагается, что в реальной ситуации в точках плоскости P могут находиться датчики, измеряющие плотность потока излучения. Далее эти предположения будут конкретизированы.

Предполагается, что перенос зондирующего излучения в среде описывается уравнением переноса:

$$(\omega \cdot \nabla_r) f(r, \omega) + \mu(r) f(r, \omega) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} k(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega' + J(r, \omega), \tag{1}$$

где $f(r, \omega)$ — плотность потока частиц в точке $r = (r_1, r_2, r_3)$, движущихся в направлении $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$; $\mu(r)$ — коэффициент ослабления; $k(r, \omega \cdot \omega')$ — сечение рассеяния; $J(r, \omega)$ — плотность внутренних источников излучения; $\Omega = \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^3, |\, \omega \,| = 1\}$.

Предполагается, что при $(r, \omega, \omega') \in G_i \times \Omega \times \Omega$, $i = 1, \ldots, 5$, функции μ, k, J неотрицательны и равномерно непрерывны по совокупности переменных вместе со всеми своими частными производными первого порядка. На границах областей G_i, $i = 1, \ldots, 5$, коэффициенты уравнения μ, k, J могут иметь разрывы первого рода по переменной r.

Уравнение (1) дополняется граничным условием

$$f(r - d(r, -\omega)\omega, \omega) = h(r - d(r, -\omega)\omega, \omega), \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \tag{2}$$

где $d(r, \omega)$ — расстояние от точки $r \in G$ до ∂G в направлении ω; h — плотность потока излучения, падающего извне в среду G через граничную точку $r - d(r, -\omega)\omega$ в направлении ω. Неотрицательная и ограниченная функция $h_1(r, \omega) = h(r - d(r, -\omega)\omega, \omega)$ предполагается непрерывной вместе со всеми своими первыми частными производными при $(r, \omega) \in G \times \Omega$.

При некоторых ограничениях проблема определения функции $f(r, \omega)$ из (1), (2) при известных h, μ, k, J имеет единственное решение, понимаемое в некотором обобщенном смысле [Аниконов, Прохоров, Ковтанюк, 2000; Владимиров, 1961; Гермогенова, 1976]. Предполагается, что эти ограничения выполнены.

Далее предположим, что для точек $r \in G \bigcap P$ задана функция $f(r, \omega_0)$ для направления ω_0, ортогонального плоскости P. Для простоты изложения будем полагать, что плоскость P задана уравнением $r_3 = 0$, $\omega_0 = (0, 0, 1)$ и области G_3, G_4, G_5 расположены в полупространстве $r_3 < 0$. Обозначим ортогональные проекции G_3, G_4, G_5 на плоскость P через D_3, D_4, D_5, $D = G \bigcap P$. Пусть D' ($\overline{D'} \subset D$) — двумерная область, содержащая двумерные области D_3, D_4, D_5, и множества $\overline{D_i}, i = 3, 4, 5$, не имеют общих точек (рис. 1а).

Ставилась и исследовалась следующая задача: *по заданной функции* $f(x, \omega_0)$ *найти границы областей* D_3, D_4, D_5, *т. е. линии* ∂D_i, $i = 3, 4, 5$.

Таким образом, искомыми считались проекции неизвестных тел G_3, G_4, G_5 (тени) на площадку измерений, а смысл задачи заключался в получении полезной информацией о строении среды.

В основу алгоритма решения этой задачи была положена формула для градиента функции $f(r, \omega)$ по переменным r_1, r_2, r_3, доказанная в [Аниконов, Прохоров, Ковтанюк, 2000]. На основе этой формулы в работах [Anikonov, Nazarov, Prokhorov, 2011; Аниконов, Назаров, Прохоров, 2011; Аниконов, Назаров, 2012; Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014] было построено несколько различных дифференциальных и интегродифференциальных операторов, позволяющих успешно решить поставленную задачу, то есть найти границы областей D_3, D_4, D_5.

Все дальнейшее изложение будет касаться одного из таких операторов, который, на наш взгляд, является наиболее эффективным. Приведем соответствующие этому оператору формулы, используя обозначения работы [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014].

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\psi_\varepsilon(x)$ — функция из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$, определенная формулой

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{c_1}{\varepsilon^2}(1 - \frac{|x|^2}{\varepsilon^2})^2, \ |x| \le \varepsilon; \ \psi_\varepsilon(x) = 0, \ |x| > \varepsilon, \ c_1 = \frac{3}{\pi}. \tag{3}$$

Несложно проверить, что интеграл от функции $\psi_\varepsilon(x)$ по $\mathbb{R}^2$ равен единице. Рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_\varepsilon(x - y) f(y, \omega_0) dy, \tag{4}$$

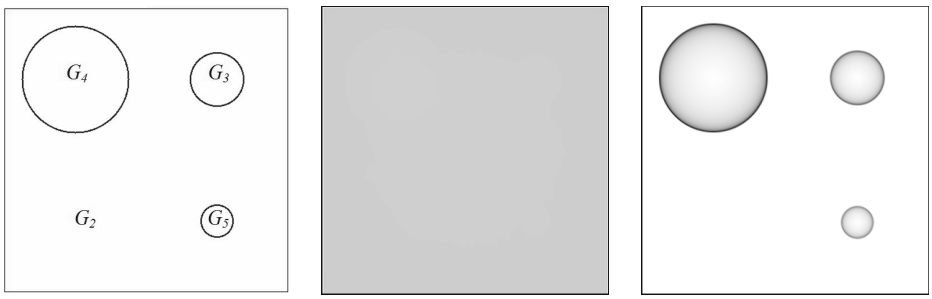
где под $f(y, \omega_0)$ понимается след функции $f(r, \omega_0)$ на множестве D при $y \in D$ и $f(y, \omega_0) = 0$ в противном случае. В данной постановке задачи функция $f(y, \omega_0)$ непрерывна, и аналогично [Соболев, 1988] нетрудно убедиться в том, что $\varphi_\varepsilon(x) \longrightarrow f(x, \omega_0)$ при $\varepsilon \longrightarrow 0$. Далее в [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014] вводилась функция $\mathrm{Ind}(x)$ из D' в $\mathbb{R}$, определенная формулой

$$\mathrm{Ind}(x) = |\nabla_x^* \varphi_\varepsilon(x)|. \tag{5}$$

Здесь через $\nabla_x^* \varphi_\varepsilon(x)$ обозначен градиент следа функции $\varphi_\varepsilon(x)$ на множестве D. Функция $\mathrm{Ind}(x)$ называется индикатором неоднородности и, как показано в [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014], обладает тем важным свойством, что она может неограниченно возрастать только тогда, когда $x \to \partial D_i$, $x \in D_i$, $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, при численной реализации алгоритм решения поставленной задачи сводится к достаточно точному вычислению величины $\mathrm{Ind}(x)$ при $x \in D'$ и последующей ее визуализации. Множество точек $x \in D'$, где величина $\mathrm{Ind}(x)$ аномально большая, принимается за приближенное решение поставленной задачи (см. рис. 1c).

Отметим здесь две особенности, отличающие эту задачу от более общей проблемы улучшения изображений. Во-первых, в отличие от многих других постановок задач (см., например, [Marr, Hildreth, 1980]) исследовался случай когда визуально на изображении, построенном без обработки исходных данных, невозможно определить даже сам факт наличия какой-либо информации о строении среды (рис. 1b). Во-вторых, при решении задачи обработке подвергаются не уже готовые изображения (фотографии), а данные, которые несут в себе определенные свойства решения уравнения переноса излучения в среде.



(a) (b) (c)

Рис. 1. a) Проекции областей G_3, G_4 и G_5 на плоскость измерений P; b) изображение функции $f^*(y, \omega_0)$ при амплитуде шума $A = 0$ (на рисунке практически ничего не видно по той причине, что в пределах измерительной площадки $f^*(y, \omega_0)$ изменяется крайне незначительно); c) изображение для $\mathrm{Ind}(x)$ при $\varepsilon = 2dr$ и $A = 0$ (такое же по качеству изображение дает $\mathrm{Ind}_2(x)$ при $A = 0$, $r_s = d_s = 2dr$, $R_s = 75dr$)

При реализации алгоритма нахождения границ областей D_i, $i = 1, 2, 3$, на практике с использованием формул (3), (4) исследователь сталкивается с тем нежелательным обстоятельством, что функция $f(y, \omega_0)$ ему всегда известна с точностью до некоторой измерительной ошибки $s(x)$, которую далее будем называть шумом. Пусть

$$f^*(y, \omega_0) = f(y, \omega_0) + s(y),$$

$$\varphi_\varepsilon^*(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \psi_\varepsilon(x - y) f^*(y, \omega_0) dy, \tag{6}$$

$$\mathrm{Ind}^*(x) = |\nabla_x^* \varphi_\varepsilon^*(x)|. \tag{7}$$

В работе [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014], в частности, изучалось влияние шума $s(x)$ на качество изображений в том случае, когда шум задавался формулой

$$s(x) = A \cdot f(x, \omega_0) \cdot [1 - 2\nu(x)], \tag{8}$$

где A — неотрицательная константа (относительная амплитуда белого шума, накладываемого на функцию $f(x, \omega_0)$), а $\nu(x)$ — случайная функция, принимающая значения, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$.

Ясно, что интегрирование в формуле (6) позволяет уменьшить влияние погрешности измерений $s(x)$, причем чем больше параметр ε, тем лучше подавляется шум. Однако с ростом ε толщина границ областей D_i, $i = 1, 2, 3$, увеличивается и в конечном итоге качество изображений может стать неприемлемым.

В данной работе автор предлагает новую формулу для ядра (3) интегрального преобразования (4), позволяющую заметно улучшить качество томограмм при прежних значениях амплитуды шума.

Формула для ядра интегрального преобразования

Далее все построения будут происходить в плоскости P, поэтому третья координата точек $r_3 = 0$, как правило, опущена. Введем следующие обозначения. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — положительные числа $P_1 = \{(r_1, r_2) |\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}, |r_1| \le \varepsilon_1, |r_2| \le \varepsilon_2\}$, то есть P_1 — прямоугольник с центром в точке $O = (0, 0)$, стороны которого параллельны осям координат. Зададим положительные числа R_s, r_s, α_s такие, что $0 < \alpha_s < \pi/2$, $0 < r_s \le \varepsilon_2 < R_s$. Определим функцию $K_1(r_1, r_2) : P_1 \to \mathbb{R}$ формулой

$$K_1(r_1, r_2) = \max\left\{0;\ c\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{z}{r_s}\right)^2\right]\right\},\ c = \text{const} > 0. \tag{9}$$

Здесь

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_1}{R_s + r_2}\right), \tag{10}$$

$$z = \sqrt{r_1^2 + (R_s + r_2)^2} - R_s = \sqrt{\left(\frac{R_s r_1}{R_s}\right)^2 + R_s^2\left(1 + \frac{r_2}{R_s}\right)^2} = \tag{11}$$
$$= R_s\left[\sqrt{\left(\frac{r_1}{R_s}\right)^2 + \left(1 + \frac{r_2}{R_s}\right)^2} - 1\right].$$

Поясним эти формулы, используя рисунок 2а. Поскольку $r = (r_1, r_2) \in P$, то $R_s + r_2 > 0$ и α есть угол между осью r_2 и прямой, проходящей через точки $A = (0, -R_s)$ и (r_1, r_2), отсчитываемый по часовой стрелке, так что $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $r_1 > 0$.

Величина $\sqrt{r_1^2 + (R_s + r_2)^2}$ есть расстояние от точки A до точки (r_1, r_2), поэтому z есть расстояние от точки (r_1, r_2) до окружности радиуса R_s с центром в точке A со знаком плюс, если (r_1, r_2) находится снаружи этой окружности, и со знаком минус, если (r_1, r_2) находится внутри окружности. Из рисунка видно, что координатная запись точек B и C имеет вид

$$B = ((R_s - r_s)\sin\alpha_s, (R_s - r_s)\cos\alpha_s - R_s),$$
$$C = ((R_s + r_s)\sin\alpha_s, (R_s + r_s)\cos\alpha_s - R_s).$$

Потребуем выполнения следующих условий (от ε_1 и ε_2):

$$0 < \alpha_s < \pi/2, \quad 0 < r_s \le \varepsilon_2 < R_s, \tag{12}$$

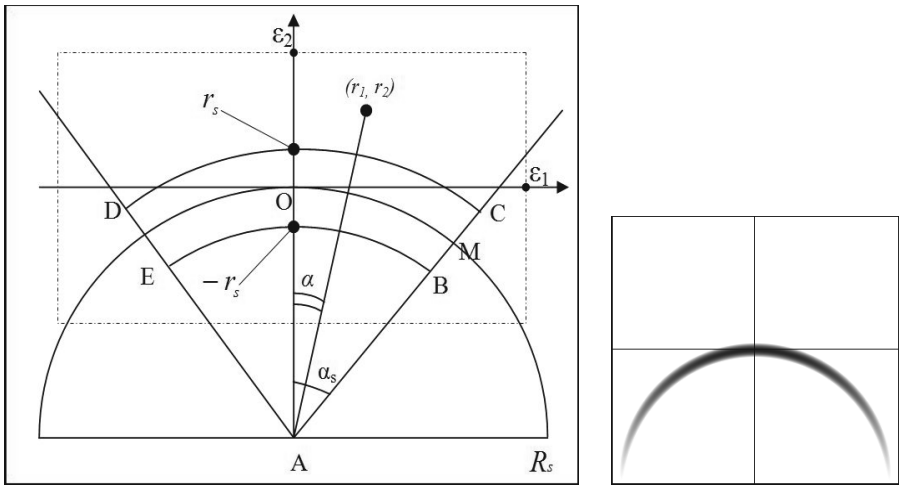
$$(R_s + r_s)\sin\alpha_s \le \varepsilon_1, \tag{13}$$

$$R_s - (R_s - r_s)\cos\alpha_s \le \varepsilon_2 < R_s. \tag{14}$$

Несложно видеть, что условия (12), (13), (14) непротиворечивы и могут быть удовлетворены подборам параметров. В таком случае носитель функции K_1 будет лежать в криволинейном прямоугольнике $BCDE$, который, в свою очередь, лежит в прямоугольнике P_1. Пусть d_s — длина дуги OM, тогда

$$\alpha_s = 2\pi \cdot \frac{d_s}{2\pi R_s} = \frac{d_s}{R_s}. \tag{15}$$

Отсюда для площади S прямоугольника $BCDE$, получим $S = 2r_s \cdot 2R_s$.



(a) (b)

Рис. 2. a) иллюстрация к описанию функции K_1 (пунктиром обозначены границы прямоугольника P_1); b) форма носителя функции K_1 и его положение в прямоугольнике P_1 при $\varphi = 0$, $r_s = 4dr$, $d_s = 115dr$, $R_s = 75dr$ (значение параметра α_s близко к максимально возможной величине $\pi/2$, при этом $\varepsilon_1 = 115dr$, $\varepsilon_2 = 160dr$)

Найдем площадь S_1 носителя S_1^* функции $K_1(r_1, r_2)$. Из уравнения

$$1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{z}{r_s}\right)^2 = 0$$

получаем

$$z^2 = \frac{r_s^2(\alpha_s^2 - \alpha^2)}{\alpha_s^2},$$

откуда

$$z_{1,2} = \pm\frac{r_s}{\alpha_s}\sqrt{\alpha_s^2 - \alpha^2} = \pm r_s\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_s^2}} = \pm g(\alpha). \tag{16}$$

Пусть теперь

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + (R_s + r_2)^2} = R_s + z \tag{17}$$

— расстояние от точки $A = (0, -R_s)$ до точки (r_1, r_2), тогда $d\rho = dz$ и

$$S_1 = \int\limits_{-\alpha_s}^{\alpha_s} d\alpha \int\limits_{R_s - g(\alpha)}^{R_s + g(\alpha)} \rho d\rho = \int\limits_{-\alpha_s}^{\alpha_s} d\alpha \int\limits_{-g(\alpha)}^{g(\alpha)} (R_s + z) dz = \tag{18}$$

$$= 2R_s r_s \int\limits_{-\alpha_s}^{\alpha_s} \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\alpha_s^2}} d\alpha = 2R_s r_s \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \pi R_s r_s \alpha_s.$$

Таким образом, с учетом (15) получаем

$$S_1 = \pi R_s r_s \alpha_s = \pi r_s d_s. \tag{19}$$

Заметим, что формула (19) совпадает с формулой площади эллипса, у которого r_s и d_s есть главные полуоси.

Вычислим теперь интеграл от $K_1(r_1, r_2)$ по его носителю S_1^*. Используя формулы (16), (17), получим

$$\begin{gathered}
\int\int_{S_1^*} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{z}{r_s}\right)^2\right] dr_1 dr_2 = \\
= \int\limits_{-\alpha_s}^{\alpha_s} d\alpha \int\limits_{-g(\alpha)}^{g(\alpha)} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{z}{r_s}\right)^2\right] (R_s + z) dz = \\
= \int\limits_{-\alpha_s}^{\alpha_s} d\alpha \int\limits_{-g(\alpha)}^{g(\alpha)} (R_s + z) dz - \int\limits_{-\alpha_s}^{\alpha_s} \frac{\alpha^2}{\alpha_s^2} d\alpha \int\limits_{-g(\alpha)}^{g(\alpha)} (R_s + z) dz - \\
- \int\limits_{-\alpha_s}^{\alpha_s} d\alpha \int\limits_{-g(\alpha)}^{g(\alpha)} \frac{z^2}{z_s^2} (R_s + z) dz = I_1 - I_2 - I_3,
\end{gathered} \tag{20}$$

где I_1, I_2, I_3 — соответствующие интегралы. После несколько громоздких вычислений получим

$$I_1 = \pi R_s r_s \alpha_s, \quad I_2 = \frac{\pi R_s r_s \alpha_s}{4}, \quad I_3 = \frac{\pi R_s r_s \alpha_s}{4},$$

откуда

$$\int\int_{S_1^*} K_1(r_1, r_2) dr_1 dr_2 = \int\int_{S_1^*} c \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{z}{r_s}\right)^2\right] dr_1 dr_2 = \tag{21}$$

$$= c \cdot (I_1 - I_2 - I_3) = c \cdot \frac{\pi R_s r_s \alpha_s}{2}.$$

Пологая теперь

$$c = \frac{2}{\pi R_s r_s \alpha_s} = \frac{2}{\pi r_s d_s}, \tag{22}$$

получим

$$\int\int_{S_1^*} K_1(r_1, r_2) dr_1 dr_2 = 1 \tag{23}$$

при любом выборе параметров $R_s,\ r_s,\ \alpha_s$, удовлетворяющих условиям (12), (13), (14).

Рассмотрим асимптотику формулы (9) в случае, когда $R_s \to +\infty$, а величина $d_s = \alpha_s R_s$ остается постоянной. Можно показать, что в этом случае $\alpha/\alpha_s \to r_1/d_s$, а $z/z_s \to r_2/r_s$. В этом случае функция $K_1(r_1, r_2)$ стремится к функции $K_0(r_1, r_2)$, определяемой формулой

$$K_0(r_1, r_2) = \max\left\{0;\ c\left[1 - \left(\frac{r_1}{d_s}\right)^2 - \left(\frac{r_2}{r_s}\right)^2\right]\right\},\ c = \text{const} > 0. \tag{24}$$

Найдем площадь S_0 носителя S_0^* функции $K_0(r_1, r_2)$. Из уравнения

$$\frac{r_1^2}{d_s^2} + \frac{r_2^2}{r_s^2} = 1 \tag{25}$$

получаем

$$r_2 = \pm r_s\sqrt{1 - r_1^2/d_s} = \pm g(r_1), \tag{26}$$

откуда

$$S_0 = \int\limits_{-d_s}^{d_s} dr_1 \int\limits_{-g(r_1)}^{g(r_1)} dr_2 = \pi d_s r_s. \tag{27}$$

Далее,

$$\begin{gathered}\int\int_{S_0^*}\left[1 - \frac{r_1^2}{d_s^2} - \frac{r_2^2}{r_s^2}\right]dr_1 dr_2 = \int\limits_{-d_s}^{d_s} dr_1 \int\limits_{-g(r_1)}^{g(r_1)}\left[1 - \frac{r_1^2}{d_s^2} - \frac{r_2^2}{r_s^2}\right]dr_2 = \\ = \int\limits_{-d_s}^{d_s}\left[1 - \frac{r_1^2}{d_s^2}\right]2g(r_1)dr_1 - \frac{1}{3r_s^2}\int\limits_{-d_s}^{d_s} 2g^3(r_1)dr_1 = \frac{\pi r_s d_s}{2}.\end{gathered} \tag{28}$$

Отсюда ясно, что при

$$c = \frac{2}{\pi r_s d_s}, \tag{29}$$

$$\int\int_{S_0^*} K_0(r_1, r_2)dr_1 dr_2 = 1 \tag{30}$$

для любых $r_s, d_s > 0$.

В графическом виде функция $K_1(r_1, r_2)$, определенная формулами (9), (10), (11), (22), представлена на рисунке 2b и др. при некоторых значениях параметров R_s, r_s, d_s; при этом прямые линии, проходящие через центр прямоугольника P_1, есть координатные оси r_1 и r_2. Далее для практического использования нам потребуется ее несколько изменить.

Пусть в точке $x = (x_1, x_2) \in D = G \bigcap P$ функция $\varphi_\varepsilon(x)$, определенная равенством (4), имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial x_2}(x),\quad \text{причем}\quad \mathrm{Ind}(x) = |\nabla_x^*\varphi_\varepsilon(x)| \neq 0$$

(см. формулы (3), (4)); пусть

$$\Gamma(\varepsilon, x) = \frac{\nabla_x^*\varphi_\varepsilon(x)}{|\nabla_x^*\varphi_\varepsilon(x)|} \tag{31}$$

и $\gamma(\varepsilon, x)$ — угол между направлением оси r_2 и вектором $\Gamma(\varepsilon, x)$. Далее в случае, когда $\mathrm{Ind}(x) = |\nabla_x^* \varphi_\varepsilon(x)|$ не определен или обращается в нуль, для удобства изложения будем полагать, что $\gamma(\varepsilon, x) = 0$. Таким образом, функция $\gamma(\varepsilon, x)$ при некоторых $x \in D$ является разрывной.

Пусть теперь e_1, e_2 — единичные орты исходной системы координат на плоскости P. Повернем векторы e_1, e_2 в плоскости P вокруг точки $O = (0, 0)$ на угол $\gamma = \gamma(\varepsilon, x)$ так, чтобы вектор e_2 совпал с $\Gamma(\varepsilon, x)$. Полученную при этом новую пару ортонормированных векторов обозначим через e_1', e_2' и примем их за направления новых координатных осей (r_1', r_2'), тогда

$$\begin{cases} r_1' = r_1 \cos\gamma + r_2 \sin\gamma, \\ r_2' = -r_1 \sin\gamma + r_2 \cos\gamma. \end{cases} \tag{32}$$

Определим, наконец, нужную нам функцию $K_2(\gamma(\varepsilon, x), r_1, r_2)$, используя новые координаты (r_1', r_2') формулой

$$K_2(\gamma(\varepsilon, x), r_1, r_2) = \max\left\{0;\ c\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_s}\right)^2 - \left(\frac{z}{r_s}\right)^2\right]\right\},\ c = \frac{2}{\pi r_s d_s}. \tag{33}$$

Здесь

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_1'}{R_s + r_2'}\right), \tag{34}$$

$$z = \sqrt{r_1'^2 + (R_s + r_2')^2} - R_s = R_s\left[\sqrt{\left(\frac{r_1'}{R_s}\right)^2 + \left(1 + \frac{r_2'}{R_s}\right)^2} - 1\right], \tag{35}$$

r_1', r_2' определены уравнениями (32), а параметры α_s, r_s, R_s, d_s удовлетворяют условиям (12), (13), (14), (15). Переменные $(r_1, r_2) \in P_2$, где P_2 — прямоугольник, получающийся поворотом P_1 на угол $\gamma = \gamma(\varepsilon, x)$ вокруг точки $O = (0, 0)$. Ясно, что в координатах (r_1', r_2') прямоугольник P_2 определяется следующими условиями: $P_2 = \{(r_1', r_2')|\ r_1', r_2' \in \mathbb{R}, |r_1'| \le \varepsilon_1, |r_2'| \le \varepsilon_2\}$, а функция K_2 в этих координатах совпадает с K_1.

По аналогии с формулами (6) и (7) введем функции

$$\Phi_\varepsilon^*(x) = \int_{\mathbb{R}^2} K_2(\gamma(\varepsilon, x), x - y) f^*(y, \omega_0) dy, \tag{36}$$

$$\mathrm{Ind}_2(x) = |\nabla_x^* \Phi_\varepsilon^*(x)| \tag{37}$$

и сделаем ряд пояснений.

Первый аргумент у функции K_2 указывает на то, что она зависит от угла $\gamma(\varepsilon, x)$, который определялся ранее через соотношение (31) и последующие замечания. При этом величина ε указана в формуле (3) и выполняет роль параметра. Второй аргумент $x - y$ совпадает по смыслу с аргументом функции $\psi_\varepsilon(x - y)$ в формулах (4) или (6). Ясно, что площадь S_2 носителя S_2^* функции K_2 совпадает с S_1 (см. (19)) и аналогичным образом

$$\int\int_{S_1^*} K_1(r_1, r_2) dr_1 dr_2 = \int\int_{S_2^*} K_2(\gamma(\varepsilon, x), r_1, r_2) dr_1 dr_2 = 1 \tag{38}$$

для любых ε и x, при которых второй интеграл определен. Из ранее приведенных формул (24) и (29) несложно видеть, что при $R_s \to +\infty$ и $r_s, d_s \to \varepsilon$ имеем $K_2(\gamma(\varepsilon, x), r) \to \hat{\psi}_\varepsilon(r)$, где $\hat{\psi}_\varepsilon(r)$ — функция, определяемая формулой

$$\hat{\psi}_\varepsilon(r) = \frac{2}{\pi\varepsilon^2}\left(1 - \frac{|r|^2}{\varepsilon^2}\right),\ |r| \le \varepsilon;\ \hat{\psi}_\varepsilon(r) = 0,\ |r| > \varepsilon. \tag{39}$$

Эта функция очень похожа на функцию $\psi_\varepsilon(r)$, ранее определенную формулой (3). Интеграл от $\hat{\psi}_\varepsilon(r)$ по $\mathbb{R}^2$ равен единице, и ей соответствуют функция

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{\psi}_\varepsilon(x-y) f(y, \omega_0) dy, \tag{40}$$

и индикатор

$$\hat{\mathrm{Ind}}(x) = |\nabla_x^* \hat{\varphi}_\varepsilon(x)|, \tag{41}$$

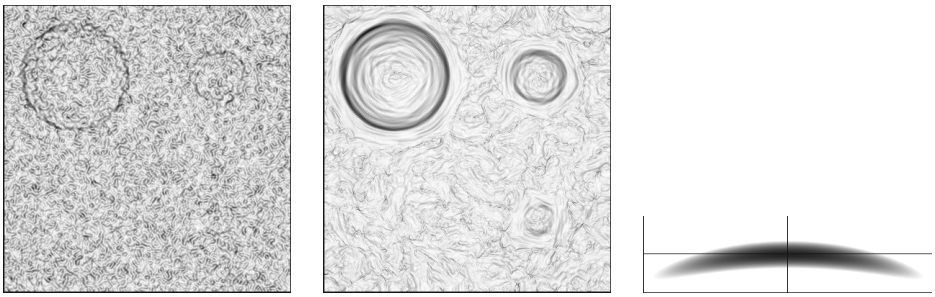
аналогичные ранее определенным функции $\varphi_\varepsilon(x)$ и индикатору $\mathrm{Ind}(x)$ и обладающие сходными свойствами. Численные эксперименты показали, что качество изображений, получаемых с помощью индикаторов $\mathrm{Ind}(x)$ и $\hat{\mathrm{Ind}}(x)$, практически одинаково. В этом смысле можно говорить, что при предельном переходе $R_s \to +\infty$ и $r_s, d_s \to \varepsilon$ индикатор $\mathrm{Ind}_2(x)$ переходит в индикатор $\mathrm{Ind}(x)$, введенный в работе [Аниконов, Назаров, Прохоров, 2014]. Однако, как будет видно из дальнейшего, при $r_s \ll d_s$ качество работы индикатора $\mathrm{Ind}_2(x)$ может быть заметно лучше, чем у $\mathrm{Ind}(x)$.

Перед тем как перейти к описанию численных экспериментов, остановимся подробнее на вопросе сравнения качества работы индикаторов. Будем считать, что лучше тот индикатор, который прорисовывает более тонкую и отчетливую границу проекции включения при прочих равных условиях. Обратимся сначала к формулам (3), (4), (5). Носитель функции ψ_ε есть круг радиуса ε, поэтому из этих формул видно, что значение $\varphi_\varepsilon(x)$, а значит и $\mathrm{Ind}(x)$, зависит от значений $f(y, \omega_0)$ во всех тех и только тех точках y, для которых $|x-y| < \varepsilon$. Исходя из этого и с учетом ранее сказанного о неограниченном возрастании $\mathrm{Ind}(x)$ при $x \to \partial D_i$ можно предположить, что толщина границы ∂D_i, которую прорисовывает индикатор $\mathrm{Ind}(x)$, приблизительно будет равна 2ε, то есть диаметру носителя функции ψ_ε. Аналогичное рассуждение можно привести в отношении толщины границ для индикатора $\mathrm{Ind}_2(x)$, с той, однако, разницей, что мы получим оценку толщины $2r_s$ в точке границы x в случае, когда «большая ось» серповидного носителя S_2^* будет приблизительно совпадать с касательной к D_i в точке x, и оценку толщины $2d_s$ в случае, когда «большая ось» будет приблизительно ортогональна к этой касательной. При этом лучшего по качеству изображения можно ожидать в тех точках границы, в которых кривизна границы близка к значению параметра R_s. Разумеется, приведенные сейчас рассуждения носят нестрогий, интуитивный характер, однако выполненные экспериментальные расчеты подтверждают эти соображения.

Забегая немного вперед обратимся сначала к рисунку 4b. На нем показана реконструкция изображения с помощью индикатора типа $\mathrm{Ind}_2(x)$, с той, однако, разницей, что угол наклона $\gamma(\varepsilon, x)$ «лунного серпа» в каждой точке x был постоянным и равнялся нулю. При этом восстанавливалось зашумленное изображение с амплитудой шума $A = 0,016$, $r_s = 4dr$, $d_s = 32dr$, где dr — сеточный шаг. Хорошо видно, что боковые части границ включений выглядят сильно размытыми (поскольку $d_s \gg r_s$). В то же время небольшие участки границ включений, почти параллельные горизонтальной оси рамки (прямоугольника) P_1, прорисованы заметно лучше. Зависимость толщины границ включений для индикатора $\mathrm{Ind}^*(x)$ от ε можно проследить по рисункам 3a, 4c, 5a, 6a.

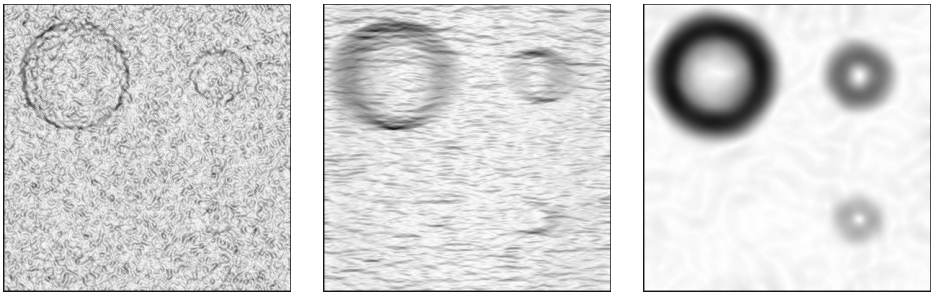
Далее отметим, что рассматриваемая задача имеет большое число независимых параметров, причем если в формуле (5) для $\mathrm{Ind}(x)$ (или в формуле (41) для $\hat{Ind}(x)$) только один параметр ε, то в формуле (37) для $\mathrm{Ind}_2(x)$ это R_s, r_s, d_s и параметр ε, который, вообще говоря, не зависит от параметра ε для $\mathrm{Ind}(x)$. При отсутствии шума или его малой амплитуде оба индикатора $\mathrm{Ind}(x)$ и $\mathrm{Ind}_2(x)$ дают одинаково хорошие изображения (см. рис. 1c).

С увеличением шума качество восстановления границ ухудшается. Такому ухудшению можно воспрепятствовать, увеличивая площадь носителя ядра интегрального преобразования.



(a) (b) (c)

Рис. 3. a) Изображение для $\mathrm{Ind}^*(x)$ при $\varepsilon = 4dr$; b) изображение для $\mathrm{Ind}_2(x)$ при $r_s = 4dr$, $d_s = 32dr$, $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 8$; c) форма носителя функции K_2 и его положение в прямоугольнике P_1 при нулевом угле наклона рамки



(a) (b) (c)

Рис. 4. a) Изображение для $\mathrm{Ind}_2(x)$ при $r_s = 4dr$, $d_s = 4dr$, $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 1$; b) изображение для $\mathrm{Ind}_2(x)$ в случае фиксированного угла наклона рамки $\varphi = 0$. $r_s = 4dr$, $d_s = 32dr$ (рис. 4b заметно хуже, чем рис. 3b, хотя параметры r_s и d_s у них совпадают; хорошо видно, что боковые части границ включений выглядят сильно размытыми (поскольку $d_s \gg r_s$); в то же время небольшие участки границ включений, почти параллельные горизонтальной оси, прорисованы заметно лучше); c) изображение для $\mathrm{Ind}^*(x)$ при $\varepsilon = 32dr$ (на основе данных для этого рисунка строилась функция $\gamma(\varepsilon, x)$, с помощью которой производилось позиционирование (ориентация) рамки P_1; изображение дает отчетливое представление о положении включений и их размерах, однако толщина границ включений чрезмерно велика)

Для индикатора $\mathrm{Ind}^*(x)$ это можно сделать, только увеличивая ε, и в результате толщина границ может стать слишком большой (рис. 4c или рис. 6a). Это может оказаться неприемлемым в тех случаях, когда требуется определить положение этой границы с достаточно хорошей точностью.

Для индикатора $\mathrm{Ind}_2(x)$ ситуация несколько иная. Поскольку, согласно (19), площадь носителя $S_2 = S_1 = \pi r_s d_s$, то «нагрузку» можно «перераспределить» между параметрами r_s и d_s, увеличивая, в первую очередь, d_s, поскольку толщину границ для $\mathrm{Ind}_2(x)$ определяет именно r_s. Разумеется, подобная возможность не безгранична, но отношение d_s/r_s можно сделать весьма большим и добиться тем самым неплохого результата (см. рис. 3b или рис. 6d). Это обстоятельство, собственно, и определяет преимущество индикатора $\mathrm{Ind}_2(x)$ перед $\mathrm{Ind}^*(x)$.

Численные эксперименты

Работа алгоритма иллюстрируется рядом численных экспериментов, в ходе которых на первом этапе численно решалось уравнение (1) при условии (2).

В качестве области G брался шар радиуса $R = 10$ см, с центром в начале координат. Плоскости Q и P задавались уравнениями $r_3 = -0.1R$ и $r_3 = 0$ соответственно. Подобласть G_1

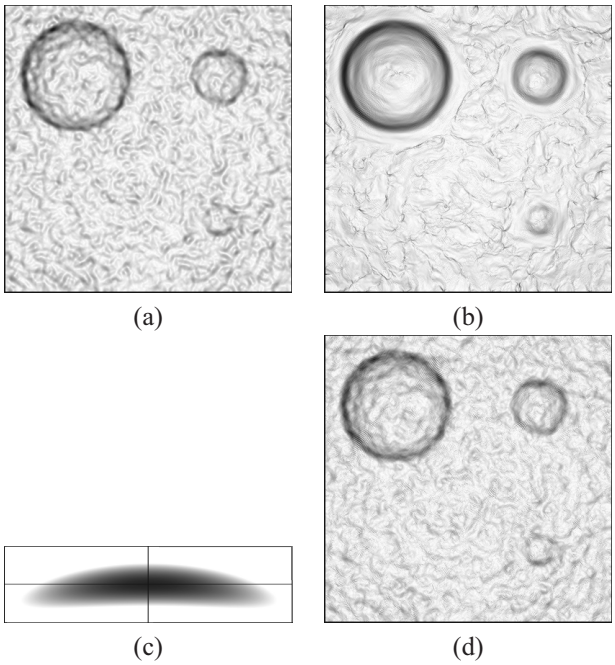


Рис. 5. a) Изображение для $\mathrm{Ind}^*(x)$ при $\varepsilon = 8dr$; b) изображение для $\mathrm{Ind}_2(x)$ при $r_s = 8dr$, $d_s = 32dr$, $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 4$; c) форма носителя функции K_2 и его положение в прямоугольнике P_1 при нулевом угле наклона рамки (сравнивая рис. 3a и рис. 5a мы видим, что увеличение ε вдвое заметно улучшило изображение для $\mathrm{Ind}^*(x)$, однако, оно все же несколько уступает качеству рис. 3b); d) изображение для $\mathrm{Ind}_2(x)$ при $r_s = 8dr$, $d_s = 8dr$, $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 1$ (рис. 5a и рис. 5d почти не отличаются по качеству)

задавалась неравенством $G_1 = \{r \in G : r_3 > -0.1R\}$. Включения G_3, G_4 и G_5 были шарами с центрами в точках $(0.1R, 0.1R, -0.5R)$, $(-0.1R, 0.1R, -0.5R)$, $(0.1R, -0.1R, -0.5R)$, радиусами $0.0375R$, $0.075R$ и $0.0225R$ соответственно, $G_2 = \{r \in G : r_3 < -0.1R\}\backslash(\overline{G_3} \bigcup \overline{G_4} \bigcup \overline{G_5})$. Коэффициенты $\mu(r)$, $k(r, \omega \cdot \omega')$ уравнения (1) соответствовали в G_1 — воде, в G_2 — илу, в G_3, G_4, G_5 — тефлону.

При численном решении уравнения (1) считалось, что рассеяние изотропно, то есть $k(r, \omega \cdot \omega') = k(r)$. Значения коэффициентов ослабления $\mu_i(r)$ и рассеяния $k_i(r)$ для материалов в подобластях G_1–G_5 находились на основе данных, приведенных в [Hubbell, Seltzer, 1995]. Все эти величины соответствовали энергии рентгеновского излучения $E = 100$ кЭв и соответственно равнялись: $\mu_1(r) = 0.1707$ см$^{-1}$, $k_1(r) = 0.1452$ см$^{-1}$, $\mu_2(r) = 0.2082$ см$^{-1}$, $k_2(r) = 0.1772$ см$^{-1}$; $\mu_i(r) = 0.3375$ см$^{-1}$, $k_i(r) = 0.2850$ см$^{-1}$; при $i = 3, 4, 5$. Таким образом, рассеяние в каждой из подобластей $G_i, i = 1, \ldots, 5$, составляло бóльшую часть коэффициента ослабления. На границе области G задавалось входящее в нее излучение $h_1(r, \omega) = 1$. Считалось, что $J(r, \omega) = 0$ везде в области G.

Для удобства расчетов в качестве D' брался квадрат со стороной $0.4R$, центр которого находился в точке $(0, 0, 0)$, $\omega_0 = (0, 0, 1)$. Он покрывался равномерной квадратной сеткой, содержащей $N \times N$ узлов, в которых численно находилось решение задачи (1), (2) для $\omega = \omega_0$.

Для нахождения решения задачи (1), (2) на множестве $D' \times \omega_0$ использовалась одна из версий метода Монте-Карло. Число учитываемых актов рассеяния — 10, а число траекторий — 100000. Величина N в расчетах равнялась 401. После нахождения функции $f(y, \omega_0)$ в узлах сетки вычислялась функция $f^*(y, \omega_0)$, а затем путем численного интегрирования и дифференцирования вычислялись функции $\varphi^*_\varepsilon(x)$ и $\mathrm{Ind}^*(x)$, являющиеся конечно-разностными аналогами выражений (6) и (7). Аналогично проводились вычисления для функций $\Phi^*_\varepsilon(x)$ и $\mathrm{Ind}_2(x)$, определяемых формулами (36) и (37).

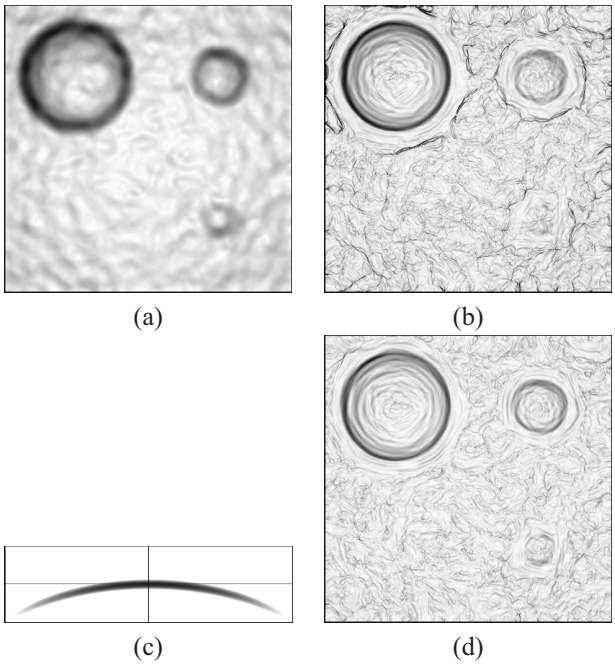


Рис. 6. a) Изображение для $\mathrm{Ind}^*(x)$ при $\varepsilon = 16dr$; b) изображение для $\mathrm{Ind}_2(x)$ при $r_s = 4dr$, $d_s = 64dr$, $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 1$; c) форма носителя функции K_2 и его положение в прямоугольнике P_1 при нулевом угле наклона рамки; d) изображение для $\mathrm{Ind}_2(x)$ при $r_s = 4dr$, $d_s = 32dr$, $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 0.5$ (на рис. 6a параметр ε был увеличен вдвое по сравнению с рис. 5a; все границы стали лучше видимыми, но и более размытыми; из-за чрезмерно большого значения параметра d_s на рис. 6b стали заметны переходные зоны вокруг включений; ширина этих зон приблизительно равна радиусу носителя функции $\psi_\varepsilon(x)$, при котором вычислялась функция $\gamma(\varepsilon, x)$)

Учитывая большое число независимых параметров в задаче, при сравнении качества работы индикаторов $\mathrm{Ind}^*(x)$ и $\mathrm{Ind}_2(x)$ во всех приводимых примерах амплитуда шума A и R_s не менялась: $A = 0.016$, $R_s = 75dr$, сеточный шаг $dr = 0.001R$ см.

Векторное поле $\Gamma(\varepsilon, x)$ и соответствующая ему функция $\gamma(\varepsilon, x)$ всегда брались при $\varepsilon = 32dr$. Столь большое значение для ε было выбрано для того, чтобы в максимальной степени подавить влияние шума. Соответствующее этому ε изображение для $\mathrm{Ind}^*(x)$ представлено на рисунке 4c. Таким образом, изменялись только параметры ε для $\mathrm{Ind}^*(x)$ и r_s, d_s для $\mathrm{Ind}_2(x)$.

Далее через $S_\varepsilon = \pi\varepsilon^2$ и $S_2 = \pi r_s d_s$ обозначены площади носителей функций $\psi_\varepsilon(x)$ и $K_2(\gamma(\varepsilon, x), y)$ соответственно.

Обратимся теперь к рисунку 3a и рисунку 3b, здесь $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 8$. Несмотря на то, что ε для $\mathrm{Ind}^*(x)$ равно r_s для $\mathrm{Ind}_2(x)$, второе изображение намного контрастней за счет большого значения $d_s = 32dr$ и, как следствие, большей площади носителя преобразования.

Если сравнить рисунок 3a для $\mathrm{Ind}^*(x)$ и рисунок 4a для $\mathrm{Ind}_2(x)$, то видно, что они почти не отличаются по качеству, поскольку для такой пары $S_2/S_\varepsilon = r_s d_s/\varepsilon^2 = 1$.

Далее, сравнивая рисунок 3b для $\mathrm{Ind}_2(x)$ и рисунок 4b для $\mathrm{Ind}_2(x)$, видим, что параметры r_s и d_s у них одинаковые, однако рисунок 4b намного хуже, поскольку подстройка ориентации рамки P_2 под поле градиента для рисунка 4b не производилась.

Приведенное здесь сравнение четырех изображений достаточно полно показывает определенные преимущества индикатора $\mathrm{Ind}_2(x)$.

Далее, на рисунках 5 и 6 увеличивается значение ε сначала до $\varepsilon = 8dr$, а затем до $\varepsilon = 16dr$, и можно проследить, как при этом меняется качество изображений для $\mathrm{Ind}^*(x)$ и $\mathrm{Ind}_2(x)$ при разных значениях параметров r_s и d_s.

Заключение

Подводя итог, можно сказать, что предложенный в работе индикатор $\mathrm{Ind}_2(x)$ дает лучшие по качеству изображения, чем $\mathrm{Ind}^*(x)$, в случае наличия измерительных ошибок. По-видимому, предложенная формула для индикатора $\mathrm{Ind}_2(x)$ может быть усовершенствована, а именно: параметр R_s, определяющий кривизну срединной линии носителя функции $K_2(\gamma(\varepsilon, x), y)$, можно сделать переменной величиной, которая подстраивает кривизну срединной линии под поле функции $\Gamma(\varepsilon, x)$ (см. (31)). Это позволило бы лучше прорисовывать границы включений в том случае, когда их кривизна переменна и различна у разных включений.

Список литературы

Аниконов Д. С., Назаров В. Г., Прохоров И. В. Задача одноракурсного зондирования неизвестной среды // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2011. — Т. 14, № 2 (46). — С. 21–27.

Аниконов Д. С., Назаров В. Г. Задача двуракурсной томографии // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 3. — С. 372–378.

Аниконов Д. С., Назаров В. Г., Прохоров И. В. Интегродифференциальный индикатор для задачи одноракурсной томографии // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2014. — Т. 17, № 2 (58). — С. 3–10.

Аниконов Д. С., Прохоров И. В., Ковтанюк А. Е. Использование уравнения переноса в томографии. — М. : Логос, 2000. — 224 с.

Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИАН, — 1961. — Вып. 61. — С. 3–158.

Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. — М. : Наука, 1976. — 272 с.

Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М. : Наука, 1988. — 336 с.

Anikonov D. S., Nazarov V. G., Prokhorov I. V. Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium // J. Inverse and Ill-posed Problems. — 2011. — Vol. 18, Issue 8. — P. 885–893.

Hubbell J.H., Seltzer S.M. Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy Absorption Coefficients 1 Kev to 20 Mev for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest, NISTIR 5632. — 1995.

Marr D., Hildreth E. Theory of Edge Detection // Proceedings of the Royal Society of London. — Series B, Biological Sciences. —1980. — Vol. 207, №. 1167. — P. 187–217.