

УДК: 517.938

## Математическое моделирование эредитарного осциллятора

Р. И. Паровик

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,  
Россия, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7

E-mail: romanparovik@gmail.com

Получено 30 июля 2015 г.

В работе рассматривается эредитарный осциллятор, который характеризуется осцилляционным уравнением с производными дробных порядков  $\beta$  и  $\gamma$  в смысле Герасимова–Капуто. С помощью преобразования Лапласа были получены аналитические решения и функция Грина, которые определяются через специальные функции типа Миттаг-Леффлера и обобщенной функции Райта. Доказано, что при фиксированных значениях  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$  найденное решение переходит в классическое решение для гармонического осциллятора. Согласно полученным решениям были построены расчетные кривые и фазовые траектории эредитарного колебательного процесса. Установлено, что в случае внешнего периодического воздействия на эредитарный осциллятор могут возникать эффекты, присущие классическим нелинейным осцилляторам.

Ключевые слова: эредитарность, фрактальный осциллятор, обобщенная функция Райта, фазовые траектории, резонанс

### Mathematical modeling of oscillator heredity

R. I. Parovik

*Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 7 Mirnaya, Paratunka, 684034, Russia*

**Abstract.** — The paper considers heredity oscillator which is characterized by oscillation equation with derivatives of fractional order  $\beta$  and  $\gamma$ , which are defined in terms of Gerasimova-Caputo. Using Laplace transform were obtained analytical solutions and the Green's function, which are determined through special functions of Mittag-Leffler and Wright generalized function. It is proved that for fixed values of  $\beta = 2$  and  $\gamma = 1$ , the solution found becomes the classical solution for a harmonic oscillator. According to the obtained solutions were built calculated curves and the phase trajectories heredity oscillatory process. It was found that in the case of an external periodic influence on heredity oscillator may occur effects inherent in classical nonlinear oscillators.

Keywords: heredity, fractal oscillator, generalized function Wright, phase trajectories, resonance

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 5, pp. 1001–1021 (Russian).

## Введение

Исследование процессов в средах с фрактальной структурой имеет важное практическое значение в физике, геофизике, экономике и в других науках. Понятие фрактала является ключевым в теории физики открытых систем [Климонтович, 2002], нелинейной и хаотической динамики [Гринченко и др., 2007; Анищенко, Вадивасова, 2011]. Применение понятия фрактала при описании динамических систем наделяет их свойствами, присущими сложным нелинейным системам, например эффектами эрдитарности. Напомним, что свойством эрдитарности обладают такие системы, в которых учитывается не только настоящее состояние системы или ближайшее предыдущее состояние, то есть начальные значения параметров состояния системы, а также некоторые производные по времени, но также и все предыдущие состояния, в которых находилась данная система [Вольтерра, 1982]. Поэтому изучение таких систем имеет важное, принципиальное значение.

Рассмотрим следующее эрдитарное осцилляционное уравнение для смещения  $x(t)$  с параметрами  $0 < \gamma < 1$ ,  $1 < \beta < 2$ ,  $0 < t < T$ :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{\lambda}{\Gamma(\beta - \gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta - \gamma - 1}} + \frac{\delta}{\Gamma(\beta - 1)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{A(\tau) x(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{2 - \beta}} = F(t). \quad (1)$$

Здесь  $A(\tau)$  — некоторая функция,  $\Gamma(z)$  — гамма-функция,  $F(t)$  — внешнее воздействие, как правило периодическое,  $\lambda > 0$ ,  $\delta > 0$  — известные величины. Интегралы в уравнении (1) содержат степенные ядра, которые характеризуют свойство эрдитарности. Уравнение (1) будем называть уравнением фрактального осциллятора.

С другой стороны, введение понятия фрактала в динамические системы привело к необходимости разработки новых методов их анализа. Одним из таких, на наш взгляд, эффективных методов является метод дробных производных, или дробное исчисление [Нахушев, 2003; Учайкин, 2008]. Преимущество такого подхода обусловлено тем, что за счет изменения порядка дробной производной мы не только подтвердим известные, но получим новые результаты, которые, возможно, помогут в корректной интерпретации нелинейных эффектов в динамических системах.

Можно показать, используя методику работы [Нахушева, 2006], что уравнение (1) записывается в терминах производных дробного порядка в смысле Герасимова–Капуто следующим образом [Герасимов, 1948; Caputo, 1969]:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) + \delta A(t) x(t) = f(t), \quad (2)$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{x^{(n)}(\tau) d\tau}{(x - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad n < \alpha < n + 1.$$

Заметим, что в случае, когда  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  и  $A(t) = \frac{\omega^2}{\delta}$ , уравнение (2) описывает классический колебательный процесс с трением:

$$x''(t) + \lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = f(t). \quad (3)$$

Если трение отсутствует ( $\lambda = 0$ ), формула (3) описывает гармонические колебания. Если в уравнение (2) положить  $A(t) = \frac{\omega^{\beta}}{\delta}$  и  $\lambda = 0$ , то мы приходим к уравнению фрактального осциллятора:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + \omega^{\beta} x(t) = f(t), \quad (4)$$

которое было исследовано в работах [Mainardi, 1996; Мейланов, Янполов, 2002; Нахушев, 2003; Нахушева, 2006]. Для уравнений фрактального осциллятора (2) справедливы следующие начальные условия:

$$x(0) = x_1, x'(0) = x_2, \tag{5}$$

где  $x_1, x_2$  — заданные константы.

Отметим, что порядки дробных производных в модельном уравнении (2) связаны с фрактальной размерностью среды [Méhauté et al., 1998; Шогенов и др., 2004; Учайкин, 2008]. Фрактальная размерность среды также может меняться в зависимости от времени [Sun et al., 2011]. Поэтому порядок дробной производной в общем случае является функцией от времени, что значительно усложняет вид уравнения (2) и получение его решения.

$$\partial_{0t}^{\beta(t)} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma(t)} x(\tau) + \delta A(t) x(t) = f(t), \tag{6}$$

Решения уравнения (6) находятся численными методами, которые можно реализовать в различных компьютерных программных средствах [Паровик, 2014].

### Математическая модель фрактального осциллятора

Рассмотрим простейшее обобщение гармонического осциллятора — фрактальный осциллятор. В работах [Нахушев, 2003; Нахушева, 2006] рассмотрено дробное осцилляционное уравнение вида (4) с начальными условиями (5), которое записано в терминах оператора дробного дифференцирования Герасимова–Капуто. Были найдены аналоги тригонометрических функций синуса и косинуса, являющиеся независимыми решениями гармонического осциллятора. Эти аналоги авторы назвали обобщенным косинусом и обобщенным синусом.

В работе [Мейланов, Янполов, 2002] авторы ввели понятие фрактального осциллятора для следующего уравнения с производной дробного порядка по Риману–Лиувиллю:

$$D_{0t}^{\alpha} x(\tau) + \omega^{\alpha} x(t) = 0, D_{0t}^{\alpha} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{\alpha-1}} \tag{7}$$

с нелокальными начальными условиями вида

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} x(\tau) = y_0, \lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-2} x(\tau) = x_0.$$

Решение такой задачи Коши представляется с помощью функций типа Миттаг-Леффлера [Джр-башян, 1966]:

$$x(t) = x_0 (\omega t)^{\alpha-2} E_{\alpha, \alpha-1}(-(\omega t)^{\alpha}) + y_0 (\omega t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-(\omega t)^{\alpha}), \tag{8}$$

где  $E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$  — функция типа Миттаг-Леффлера. Далее авторы строят фазовые траектории по координатам  $(x(t), D_{0t}^{\alpha-1} x(\tau))$  и приходят к выводу, что решение (8) может являться параметрическим представлением некоторой функции  $F(t)$ .

Далее мы будем считать фрактальным или эредитарным осциллятором не только уравнение (7), но и осцилляционное уравнение (4), рассмотренное в работах [Нахушев, 2003; Нахушева, 2006].

Рассмотрим фрактальный осциллятор в терминах производной дробного порядка Герасимова–Капуто, который характеризуется уравнением (4) и начальными условиями (5). Рассмотрим свободные колебания, когда в уравнении (4) правая часть равна нулю:  $f(t) = 0$ .

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + \omega^{\beta} x(t) = 0, \quad (9)$$

Решение уравнения (9), согласно результатам работы [Нахушева, 2006], дается формулой

$$x(t) = x_0 \cos_{\beta}(\omega t) + y_0/\omega \sin_{\beta}(\omega t), \quad (10)$$

где  $\cos_{\beta}(\omega t) = E_{\beta,1}(-(\omega t)^{\beta})$  и  $\sin_{\beta}(\omega t) = \omega t E_{\beta,2}(-(\omega t)^{\beta})$  — обобщенный косинус и обобщенный синус.

В работе [Mainardi, 1996] с помощью преобразования Лапласа в случае  $y_0 = 0$  было получено решение  $x(t) = x_0 \cos_{\beta}(\omega t)$  уравнения (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно отметить, что в случае  $\beta = 2$  справедливы равенства  $\cos_2(\omega t) = \cos(\omega t)$  и  $\sin_2(\omega t) = \sin(\omega t)$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Необходимо отметить, что свойства обобщенных тригонометрических функций отличаются от классических тригонометрических функций и определяются свойствами функции типа Миттаг-Леффлера. Известно [Нахушев, 2003], что функция типа Миттаг-Леффлера имеет лишь конечное число нулей в отличие от классических тригонометрических функций.

Эти замечания можно проиллюстрировать на рисунке 1. Параметры моделирования брались в решении (10) следующими:  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $\omega = 2$ ,  $t \in [0, 6]$ . Функция Миттаг-Леффлера вычислялась с помощью алгоритма, который был реализован в среде компьютерной математики Maple как программный модуль [Паровик, 2012].

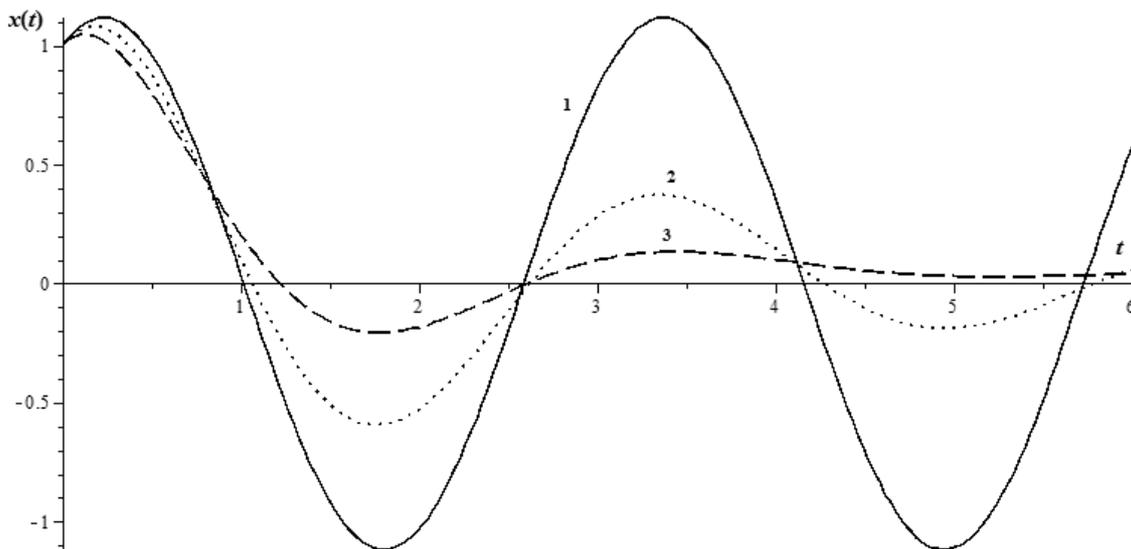


Рис. 1. Расчетные кривые фрактального осциллятора: 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$

На рисунке 1 видно, что параметр  $\beta$  приводит к затуханию колебаний фрактального осциллятора.

В случае вынужденных колебаний фрактальный осциллятор имеет вид (4). Можно показать с помощью формулы Хилле–Тамаркина [Hille, Tamarkin, 1930], что для начальных условий (5) такой осциллятор имеет решение

$$x(t) = x_0 \cos_\beta(\omega t) + y_0/\omega \sin_\beta(\omega t) - \int_0^t \cos'_\beta(-\omega^\beta(t-\tau)^\beta) f(\tau) d\tau, \quad (11)$$

здесь штрих в интеграле (11) означает производную, которую можно определить по формуле

$$\cos'_\beta(-(\omega t)^\beta) = -(\omega t)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-(\omega t)^\beta).$$

В работе [Нахушев, 2003] отмечается, что важное практическое значение имеет случай, когда в правой части уравнения (4) находится функция  $f(t) = \frac{\mu t^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}$ , где  $\mu \neq 0, \gamma > -\beta$  — константы. Тогда решение (11) приобретает более конкретный вид:

$$x(t) = x_0 \cos_\beta(\omega t) + y_0/\omega \sin_\beta(\omega t) + \mu t^{\gamma+\beta-1} E_{\beta,\beta+\gamma+1}(-(\omega t)^\beta). \quad (12)$$

На рисунке 2 приведена визуализация решения (12) в зависимости от дробных параметров  $\beta$  и  $\gamma, \mu = 0.5$ .

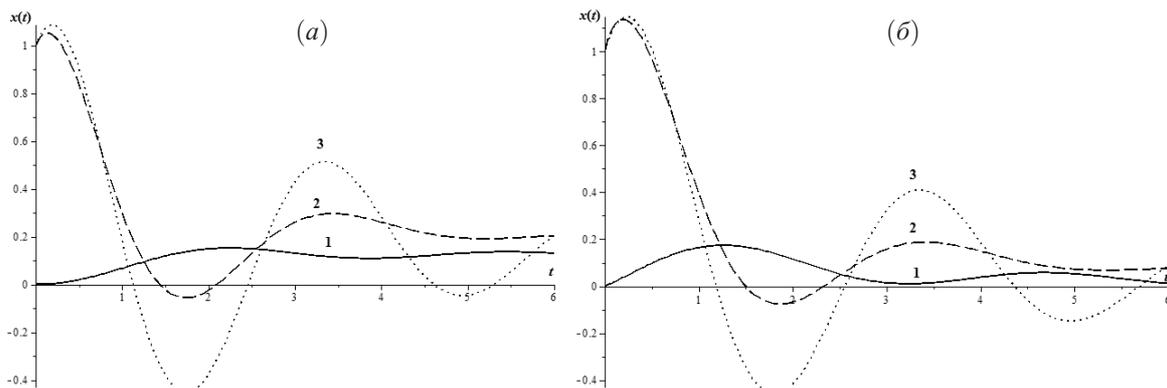


Рис. 2. Расчетные кривые фрактального осциллятора (12): 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; а)  $\gamma = 1$ ; б)  $\gamma = 0.1$

На рисунке 2 видно, что параметр  $\gamma$  влияет на вид расчетных кривых: при  $\gamma \rightarrow 1$  кривые чаще пересекают временную ось.

В случае однородных начальных условий  $x_0 = 0, y_0 = 0$  и если известны данные, например, в  $i$ -й момент времени  $x(t_i) = x_i$ , а параметр  $\mu$  необходимо определить, то возникает обратная задача:

$$x_i = \mu t_i^{\gamma+\beta-1} E_{\beta,\beta+\gamma+1}(-(\omega t_i)^\beta),$$

которая сводится к задаче отыскания нулей функции Миттаг-Леффлера [Нахушев, 2003].

Рассмотрим случай, когда в правой части уравнения находится функция более общего вида:

$$f(t) = A t^{\alpha-1} E_{\beta,\alpha}(-(\lambda t)^\beta), \quad A - \text{const}, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (13)$$

Тогда решение (11) с учетом свойств функции Миттаг-Леффлера можно записать следующим образом [Джрбашян, 1966]:

$$x(t) = x_0 \cos_\beta(\omega t) + y_0/\omega \sin_\beta(\omega t) + \frac{A t^{\alpha+\beta-1}}{\omega_1 - \omega_2} \left( \omega_1 E_{\beta,\beta+\alpha}(\omega_1 t^\beta) - \omega_2 E_{\beta,\beta+\alpha}(\omega_2 t^\beta) \right), \quad (14)$$

где  $\omega_1 = -\lambda^\beta, \omega_2 = -\omega^\beta$ .

На рисунке 3 приведены расчетные кривые в зависимости от дробных параметров  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 2$ , построенные по формуле (14). Можно заметить, что амплитуда расчетных кривых при  $\alpha \rightarrow 1$  уменьшается со временем.

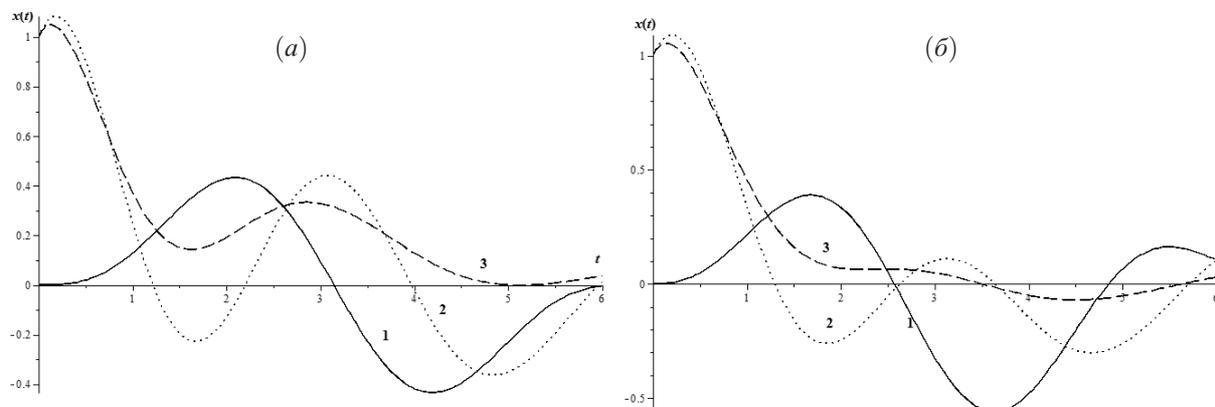


Рис. 3. Расчетные кривые фрактального осциллятора (12): 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; а)  $\alpha = 2$ ; б)  $\alpha = 1.5$

## Модель фрактального осциллятора с трением

Рассмотрим следующее уравнение фрактального осциллятора с трением типа (2) с начальными условиями (4):

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) + \omega^{\beta} x(t) = f(t), \quad 1 < \beta < 2, \quad 0 < \gamma < 1, \quad (15)$$

Чтобы записать решение для этой задачи, сначала рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^{\gamma} x(\tau) + \omega^{\beta} x(t) = \delta(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (16)$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака.

Проведем преобразование Лапласа по переменной  $t$  вспомогательной задачи (16). Получим следующее изображение:

$$\tilde{x}(s) = \frac{1}{s^{\beta} + \lambda s^{\gamma} + \omega^{\beta}} = \frac{s^{-\gamma}}{(s^{\beta-\gamma} - \lambda^*) \left(1 - \frac{-\omega^{\beta} s^{-\gamma}}{s^{\beta-\gamma} - \lambda^*}\right)}, \quad (17)$$

где  $\lambda^* = -\lambda$ ,  $s \in \mathbb{C}$ . Исходя из того, что  $\left| \frac{-\omega^{\beta} s^{-\gamma}}{s^{\beta-\gamma} - \lambda^*} \right| < 1$ , изображение (17) можно представить в виде суммы:

$$\tilde{x}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega^{\beta})^n s^{-\gamma-\gamma n}}{(s^{\beta-\gamma} - \lambda^*)^{n+1}}. \quad (18)$$

Обратное преобразование Лапласа изображения (18) дает следующий оригинал:

$$x(t) = t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta(n+1), \beta-\gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right], \quad (19)$$

где функция  ${}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a, \alpha) \\ (b, \beta) \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a + \alpha k) z^k}{\Gamma(b + \beta k) k!}$  — обобщенная функция Райта [Kilbas et al., 2006].

Решение (19) вспомогательной задачи (16) будем называть функцией Грина, которую обозначим  $x(t) = G_{\beta, \gamma}(t)$ . Сформулируем следующую теорему.

**Теорема 1.** Функция Грина  $G_{\beta,\gamma}(t)$  при значениях параметров  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$  переходит в функцию Грина для уравнения (3) с правой частью  $f(t) = \delta(t)$  и однородными начальными условиями, которая имеет вид

$$G_{2,1}(t) = \frac{2e^{-\lambda t/2} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2})}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}}. \tag{20}$$

*Доказательство.* Подставим значения параметров  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$  в функцию Грина (19), получим следующее соотношение:

$$G_{2,1}(t) = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2(n+1), 1) \end{matrix} \middle| -\lambda t \right]. \tag{21}$$

Учитывая свойство обобщенной функции Райта:

$${}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (a, 1) \\ (b, 1) \end{matrix} \middle| z \right] = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} {}_1F_1(a, b, z),$$

где  ${}_1F_1(a, b, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(b)_k k!}$  — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера,  $(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$  — символ Похгаммера, перепишем (21) в виде

$$G_{2,1}(t) = t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{\Gamma(2(n+1))} {}_1F_1(n+1, 2(n+1), z), z = -\lambda t. \tag{22}$$

Функцию Куммера в формуле (22) можно выразить через модифицированную функцию Бесселя первого рода [Прудников и др., 2003]:

$${}_1F_1(n+1, 2(n+1), z) = 2^{2n+1} \Gamma(n+3/2) e^{z/2} (z)^{-1/2-n} I_{n+1/2}(z/2).$$

Тогда формула (22) принимает вид

$$G_{2,1}(t) = t (z)^{-1/2} e^{z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega^2 t^2 / z)^n 2^{2n+1} \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(2(n+1))} I_{n+1/2}(-z/2). \tag{23}$$

Введем обозначение  $\xi = \frac{-(\omega t)^2}{z}$  и учтем, что  $\frac{2^{2n+1} \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n!}$ , приходим к соотношению

$$G_{2,1}(t) = \sqrt{\pi} t (z)^{-1/2} e^{z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} I_{n+1/2}(\eta), \eta = z/2.$$

Следуя справочнику [Прудников и др., 1983], сумма вычисляется так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n I_{n+1/2}(\eta)}{n!} = \frac{2 \sinh(\sqrt{z^2 + 4z\xi})}{\sqrt{4\xi - z} \sqrt{\pi}} = \frac{2 \sqrt{\lambda t} \sinh(t/2 \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2})}{\sqrt{\pi} \sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}}.$$

В итоге после некоторых преобразований функция Грина имеет вид

$$G_{2,1}(t) = \frac{2e^{-\lambda t/2} \sinh(\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2})}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}}.$$

□

Если во вспомогательной задаче (16) в правой части уравнения находится более общая функция  $f(t)$ , то ее решение дается в виде свертки функции Грина с правой частью

$$x(t) = \int_0^t G_{\beta,\gamma}(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (24)$$

В общем случае уравнение (15) с начальными условиями (4) имеет следующее решение:

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \int_0^t G_{\beta,\gamma}(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (25)$$

где  $C_1 = x_0$ ,  $C_2 = y_0$  и  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  — два линейно независимых решения задачи

$$\partial_{0t}^\beta x(\tau) + \lambda \partial_{0t}^\gamma x(\tau) + \omega^\beta x(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \quad (26)$$

Преобразование Лапласа по переменной  $t$  задачи (26) приводит к изображению

$$\tilde{x}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0 (-\omega^\beta)^n s^{\beta-\gamma-1-\gamma n}}{(s^{\beta-\gamma} - \lambda^*)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_0 (-\omega^\beta)^n s^{\beta-\gamma-\gamma n-2}}{(s^{\beta-\gamma} - \lambda^*)^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0 (-\omega^\beta)^n s^{-1-\gamma n}}{(s^{\beta-\gamma} - \lambda^*)^{n+1}}. \quad (27)$$

В случае обратного преобразования Лапласа соотношение (27) дает

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta n + 1, \beta - \gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right] + \\ & + y_0 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta n + 2, \beta - \gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right] + \\ & + \lambda x_0 t^{\beta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta(n+1) - \gamma + 1, \beta - \gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Из решения (28) следует, что

$$\begin{aligned} x_1(t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta n + 1, \beta - \gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right] + \\ & + \lambda t^{\beta-\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta(n+1) + 1 - \gamma, \beta - \gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right], \\ x_2(t) = & t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta n + 2, \beta - \gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right]. \end{aligned}$$

Сформируем следующую теорему.

**Теорема 2.** *Решение задачи (26) в случае значений параметров  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 1$  совпадает с классическим решением.*

*Доказательство.* В системе компьютерной математики Maple решение для классического осциллятора с трением можно получить так:

```
>H:= {diff(x(t), t$2)+lambda(diff(x(t), t))+omega^2*x(t)=0
, x(0)=x_0, D(x)(0)=y_0};
```

>dsolve(H);

$$x(t) = 1/2 \frac{(\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}x_{-0} + \lambda x_{-0} + 2y_{-0})e^{(-\lambda/2+1/2\sqrt{\lambda^2-4\omega^2})t}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} - \tag{29}$$

$$-1/2 \frac{(-\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}x_{-0} + \lambda x_{-0} + 2y_{-0})e^{(-\lambda/2-1/2\sqrt{\lambda^2-4\omega^2})t}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}}.$$

Подставим в решение (28) значения параметров  $\beta = 2$  и  $\gamma = 1$ , получим

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2n+1, 1) \end{matrix} \middle| -\lambda t \right] +$$

$$+y_0 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2(n+1), 1) \end{matrix} \middle| -\lambda t \right] + \lambda x_0 t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{n!} {}_1\Psi_1 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1) \\ (2(n+1), 1) \end{matrix} \middle| -\lambda t \right]. \tag{30}$$

Перепишем формулу (30) в терминах вырожденной гипергеометрической функции Куммера, получим

$$x(t) = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{\Gamma(2n+1)} {}_1F_1(n+1, 2n+1, -\lambda t) +$$

$$+ (\lambda x_0 + y_0) t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{\Gamma(2n+2)} {}_1F_1(n+1, 2n+2, -\lambda t). \tag{31}$$

Каждую функцию Куммера в соотношении (31) можно выразить через модифицированные функции Бесселя первого рода:

$${}_1F_1(n+1, 2(n+1) - 1, -z) = 2^{2n-1} \Gamma(n+1/2) e^{-z/2} (-z)^{1/2-n} [I_{n-1/2}(-z/2) - I_{n+1/2}(-z/2)],$$

$${}_1F_1(n+1, 2(n+1), -z) = 2^{2n+1} \Gamma(n+3/2) e^{-z/2} (-z)^{-1/2-n} I_{n+1/2}(-z/2), \tag{32}$$

где  $z = \lambda t$ .

Подставим соотношения (32) в решение (31), предварительно сделав замену вида  $\xi = \omega^2 t^2 / z$  и с учетом соотношений

$$\frac{2^{2n-1} \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(n+1)}, \quad \frac{2^{2n+1} \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1)},$$

в результате приходим к формуле

$$x(t) = 1/2 \sqrt{-z\pi} x_0 e^{-z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [I_{n-1/2}(-z/2) - I_{n+1/2}(-z/2)]}{n!} +$$

$$+ (\lambda x_0 + y_0) t (-z)^{-1/2} \sqrt{\pi} e^{-z/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n I_{n+1/2}(-z/2)}{n!}. \tag{33}$$

В соотношение (33) сделаем замену  $\eta = -z/2$ , рассмотрим первую сумму. Из справочника [Прудников и др., 1983] следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n [I_{n-1/2}(\eta) - I_{n+1/2}(\eta)]}{n!} = \sqrt{\frac{2}{\eta\pi}} \cosh\left(\sqrt{\eta^2 + 2\eta\xi}\right) - \frac{\sqrt{2} \sinh\left(\sqrt{\eta^2 + 2\eta\xi}\right)}{\sqrt{2\xi + \eta} \sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-z\pi}} \cosh\left(\sqrt{z^2 + 4z\xi}\right) - \frac{2 \sinh\left(\sqrt{z^2 + 4z\xi}\right)}{\sqrt{4\xi - z} \sqrt{\pi}}.$$

Вторая сумма может быть представлена так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n I_{n+1/2}(\eta)}{n!} = \frac{2 \sinh(\sqrt{z^2 + 4z\xi})}{\sqrt{4\xi - z} \sqrt{\pi}}.$$

Поэтому решение (33) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & x_0 e^{-\lambda t/2} \cosh\left(\frac{t}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}\right) - \frac{\lambda x_0 e^{-\lambda t/2}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} \sinh\left(\frac{t}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}\right) + \\ & + \frac{2(\lambda x_0 + y_0) e^{-\lambda t/2}}{\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} \sinh\left(\frac{t}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}\right) = \frac{x_0 e^{-\lambda t/2}}{2} \left( e^{\frac{t}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} + e^{-\frac{t}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} \right) + \\ & + \frac{2y_0 + \lambda x_0}{2\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} e^{-\lambda t/2} \left( e^{\frac{t}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} - e^{-\frac{t}{2} \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} \right) = \frac{(\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2} x_0 + \lambda x_0 + 2y_0) e^{(-\lambda/2 + 1/2 \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2})t}}{2\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}} - \\ & - \frac{(-\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2} x_0 + \lambda x_0 + 2y_0) e^{(-\lambda/2 - 1/2 \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2})t}}{2\sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}}. \end{aligned}$$

□

Проведем визуализацию решения фрактального осциллятора (25) с трением в зависимости от значений дробных показателей  $\beta$  и  $\gamma$  и коэффициентов  $\omega$  и  $\lambda$ .

На рисунке 4 приведены расчетные кривые решения (25) фрактального осциллятора с трением без внешнего воздействия  $f(t) = 0$  в зависимости от значений дробного параметра  $\beta$  и фиксированного значения  $\gamma = 0.8$ .

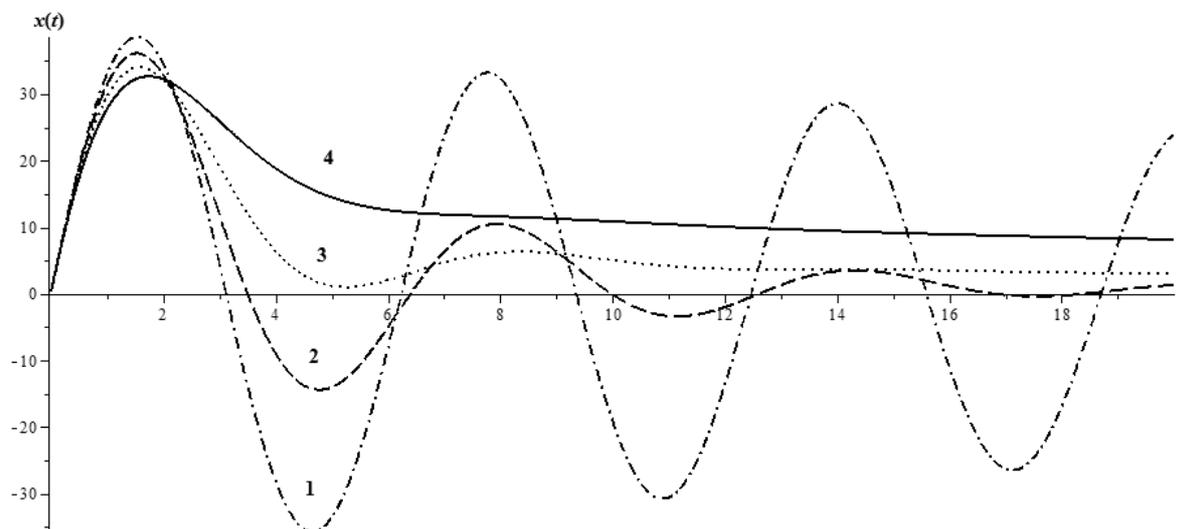


Рис. 4. Расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением (15) и параметрами  $\lambda = 0.05$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\omega = 1$ ,  $f(t) = 0$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $t \in [0, 20]$ : 1 –  $\beta = 2$ ; 2 –  $\beta = 1.8$ ; 3 –  $\beta = 1.6$ ; 4 –  $\beta = 1.4$

На рисунке 4 можно заметить, что в случае, когда  $\beta \rightarrow 1$ , колебательный процесс (кривая 1) стремится к экспоненциальному затухающему закону (кривая 4).

На рисунке 5 приведены расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением без действия внешнего возмущения, построены в зависимости от значений дробного параметра  $\gamma$  и фиксированного значения  $\beta = 2$ .

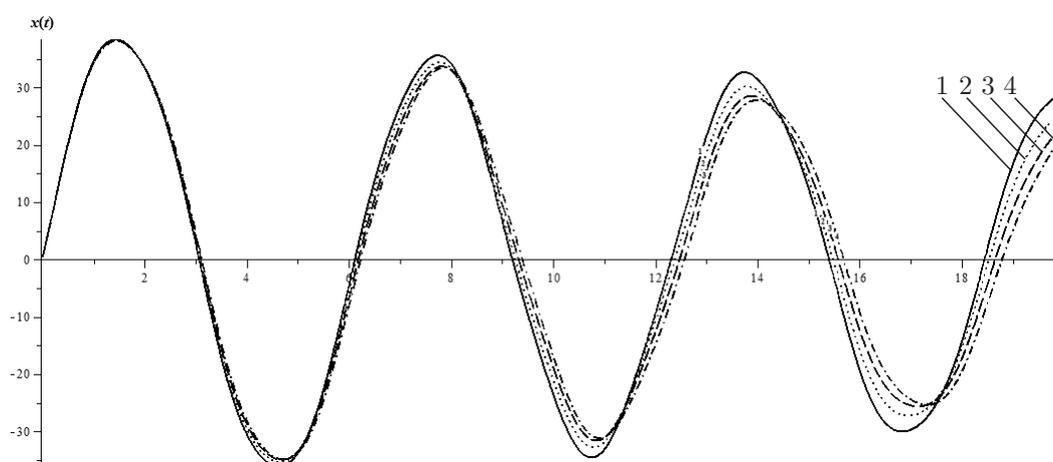


Рис. 5. Расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением (15) и параметрами:  $\lambda = 0.05, \beta = 2, \omega = 1, f(t) = 0, x(0) = 0.2, t \in [0, 20]$ : 1 –  $\gamma = 1$ ; 2 –  $\gamma = 0.8$ ; 3 –  $\gamma = 0.6$ ; 4 –  $\gamma = 0.4$

Можно отметить, что на рисунке 5 представлен затухающий колебательный процесс. Так же из рисунка 5 можно сделать вывод о том, что изменение параметра  $\gamma$  приводит к перестройке расчетных кривых в обратный порядок. Это, по-видимому, обусловлено свойствами обобщенной функции Райта.

На рисунке 6 приведены расчетные кривые фрактального осциллятора с трением без внешнего воздействия с теми же значениями параметров  $\gamma, \omega$  и  $\lambda$ , что на рисунке 5, но с фиксированным значением  $\beta = 1.8$ .

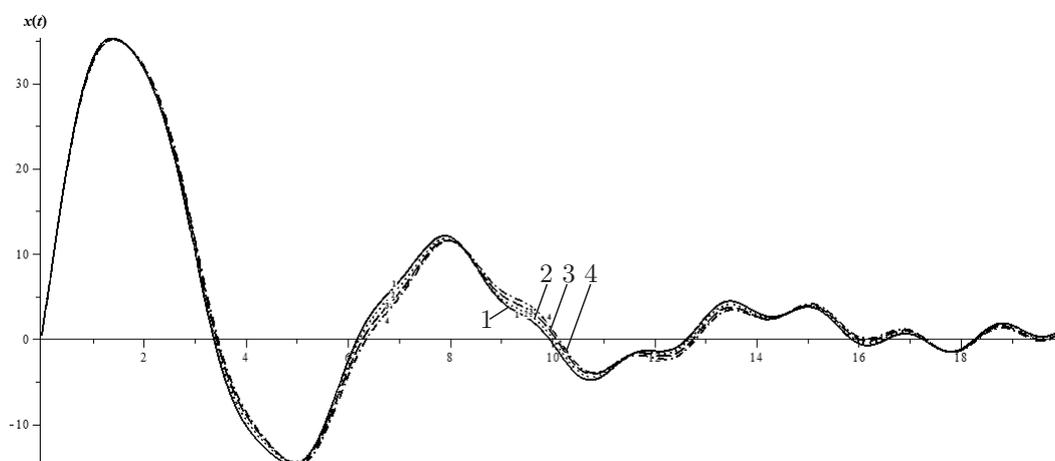


Рис. 6. Расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением (15) и параметрами:  $\lambda = 0.05, \beta = 1.8, \omega = 1, f(t) = 0, x(0) = 0.2, t \in [0, 20]$ : 1 –  $\gamma = 1$ ; 2 –  $\gamma = 0.8$ ; 3 –  $\gamma = 0.6$ ; 4 –  $\gamma = 0.4$

На рисунке 6 форма расчетных кривых имеет принципиально другой вид, чем на рисунке 5 однако видно, что это затухающий колебательный процесс, а также сохраняется перестройка расчетных кривых в обратный порядок.

На рисунке 7 приведены расчетные кривые фрактального осциллятора с трением с учетом внешнего периодического воздействия в виде  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ , где  $\delta$  – амплитуда и  $\phi$  – частота. Кривые построены в зависимости от значений параметра  $\beta \in [1, 2]$  и фиксированного значения

параметра  $\gamma = 0.8$ , коэффициентов  $\lambda = 0.05$ ,  $\omega = 1$ , время моделирования выбиралось из отрезка  $t \in [0, 20]$ .

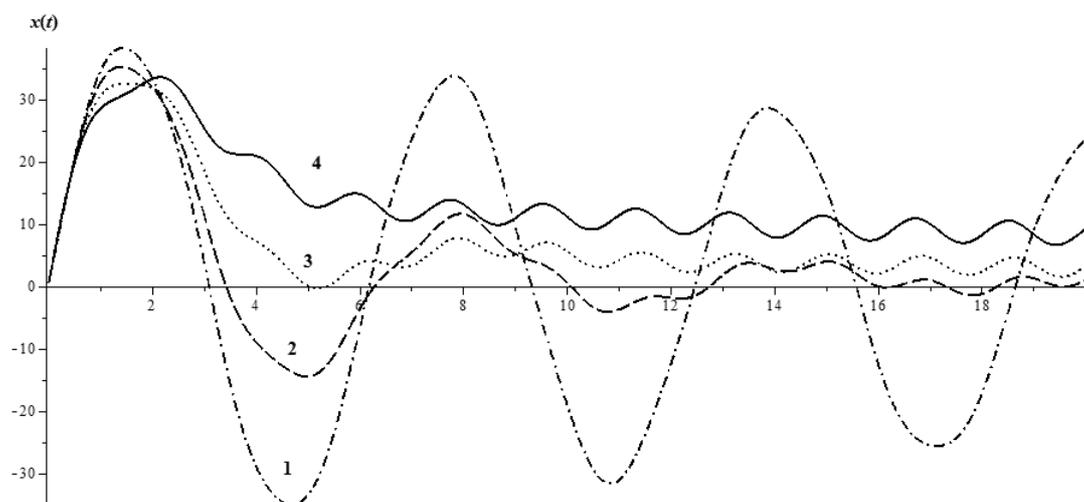


Рис. 7. Расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением (15) и параметрами  $\lambda = 0.05$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\omega = 1$ ,  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\delta = 10$ ,  $\phi = 3.5$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $t \in [0, 20]$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

На рисунке 7 расчетные кривые сохраняют такую же динамику, как и на рисунке 4. Можно отметить, что кривые 3 и 4 при  $t \rightarrow 20$  с похожи на кривые, описывающие гармонические колебания.

Рассмотрим случай резонанса, когда  $\omega = \phi$ . Результат моделирования приведен на рисунке 8 со значениями параметров из предыдущего случая.

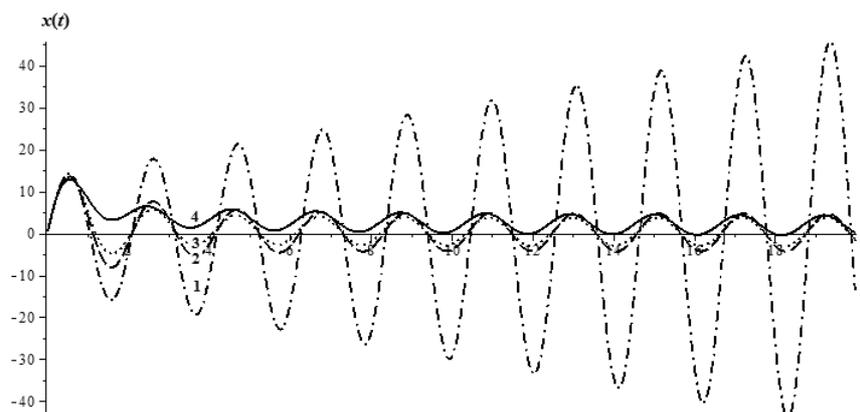


Рис. 8. Расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением (15) и параметрами  $\lambda = 0.05$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\delta = 10$ ,  $\phi = \omega = 1$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $\dot{x}(0) = 0.3$ ,  $t \in [0, 20]$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

На рисунке 8 расчетная кривая 1 является классической кривой резонанса для классического осциллятора с трением. Видно, что при  $t \rightarrow 20$  с амплитуда колебаний возрастает. У остальных расчетных кривых амплитуда колебаний постоянная. Изменение значений параметра  $\beta$ , как мы выяснили выше (рис. 4), влечет к затухающему процессу, но наличие внешнего периодического воздействия в случае резонанса (рис. 4) приводит к установившейся амплитуде.

Теперь, например, если увеличить коэффициент трения  $\lambda = 0.9$  и понизить значение дробного параметра  $\gamma = 0.4$  в случае резонанса  $\omega = \phi$ , то расчетные кривые будут иметь вид представленный на рисунке 9.

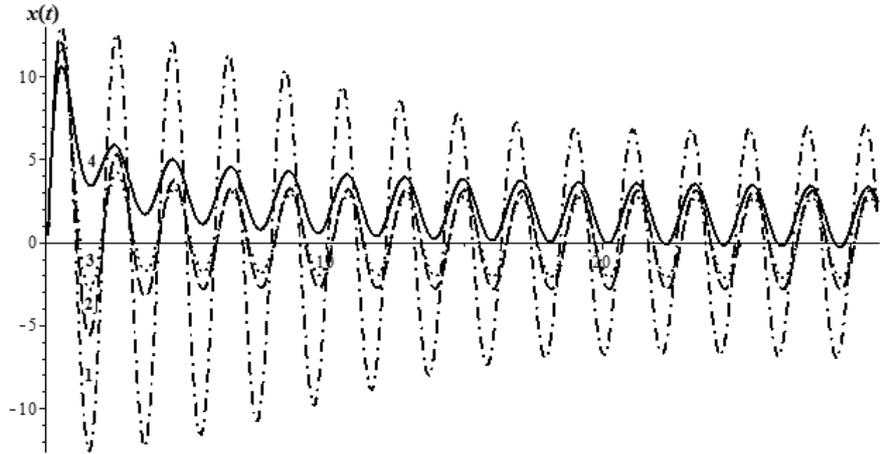


Рис. 9. Расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением (15) и параметрами  $\lambda = 0.9$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $\omega = \phi = 3$ ,  $f(t) = \delta \cos(\phi)$ ,  $\delta = 10$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $t \in [0, 30]$ : 1 –  $\beta = 2$ ; 2 –  $\beta = 1.8$ ; 3 –  $\beta = 1.6$ ; 4 –  $\beta = 1.4$

В этом случае мы не видим роста амплитуды даже в классическом случае (кривая 1), наоборот, амплитуда затухает, но далее, начиная с некоторого момента времени, амплитуда становится постоянной. Таким образом, можно сделать вывод о том, что при совпадении частот могут возникать ситуации, при которых амплитуда колебаний не возрастает.

Рассмотрим случай, когда внешнее воздействие имеет вид степенной функции:  $f(t) = \frac{\delta t^\phi}{\Gamma(1 + \phi)}$ . Расчетные кривые представлены на рисунке 10.

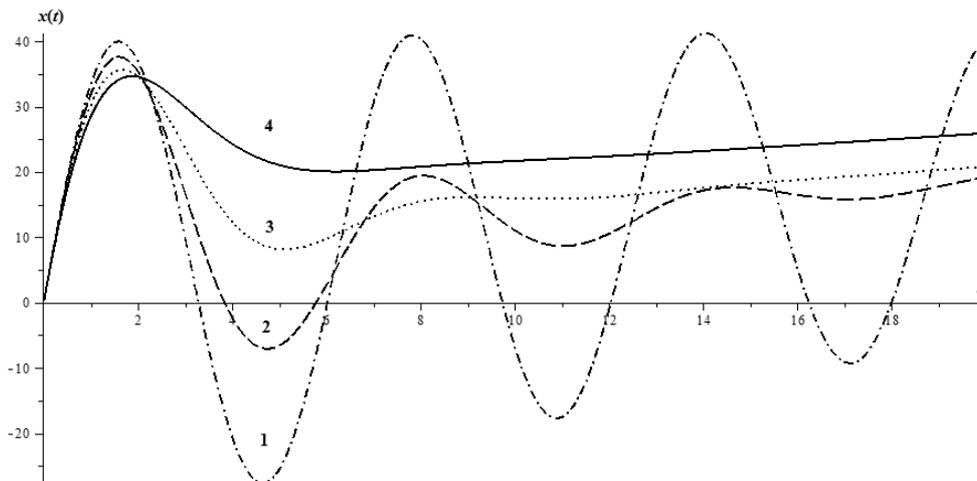


Рис. 10. Расчетные кривые решения фрактального осциллятора с трением (15) и параметрами  $\lambda = 0.05$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $\omega = 1$ ,  $f(t) = \frac{\delta t^\phi}{\Gamma(1 + \phi)}$ ,  $\delta = 2$ ,  $\phi = 0.7$ ,  $x(0) = 0.2$ ,  $t \in [0, 20]$ : 1 –  $\beta = 2$ ; 2 –  $\beta = 1.8$ ; 3 –  $\beta = 1.6$ ; 4 –  $\beta = 1.4$

На рисунке 10 видно, что значения расчетных кривых при  $t \rightarrow 20$  с возрастают, но колебания все же имеют затухающий характер и в итоге вырождаются (кривая 4).

## Фазовый портрет

Чтобы на качественном уровне понять поведение колебательной системы в различные моменты времени, исследуют ее фазовый портрет.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что фазовые траектории обычно строятся по точкам  $(x(t), \dot{x}(t))$ , где  $\dot{x}(t)$  — импульс или скорость изменения состояний в фазовом пространстве. Однако можно обобщить понятие импульса в фазовом пространстве с помощью оператора Герасимова–Капуто и строить фазовые траектории по точкам  $(x(t), D_{0t}^{\beta-1}x(t))$ . В работе [Мейланов, Янполов, 2002] авторы строили фазовые траектории для фрактального осциллятора по точкам  $(x(t), D_{0t}^{\beta-1}x(t))$ , используя оператор Римана–Лиувилля.

Рассмотрим фрактальный осциллятор (9). Его решение дается формулой (10). Найдем производную от этого решения согласно работе [Нахушева, 2006]:

$$\dot{x}(t) = (x_0 \cos_{\beta}(\omega t) + y_0/\omega \sin_{\beta}(\omega t))' = x_0 \sin_{\beta}(\omega t) - y_0 t E_{\beta, \beta}(-(\omega t)^{\beta}). \quad (34)$$

Построим фазовые траектории по точкам  $(x(t), \dot{x}(t) = y(t))$  в зависимости от значений дробного параметра  $\beta \in [1, 2]$  с начальными условиями  $x(0) = 0.2, \dot{x}(0) = 40$  с учетом формулы (34). На рисунке 11 приведен фазовый портрет фрактального осциллятора (9).

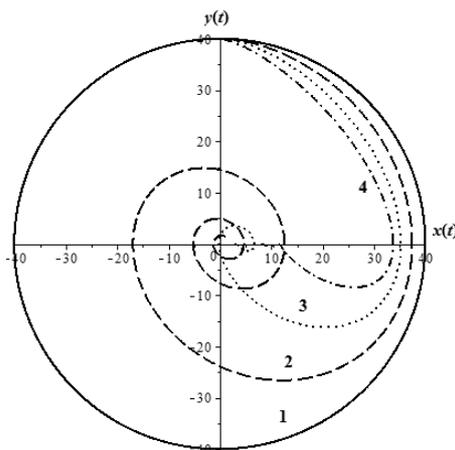


Рис. 11. Фазовые траектории фрактального осциллятора (9): 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

Фазовая траектория 1 на рисунке 11 соответствует траектории гармонического осциллятора, остальные траектории представляют собой скручивающиеся спирали, точка начала координат является точкой равновесия системы и называется устойчивым фокусом. По-видимому, параметр  $\beta$  играет роль такую, как составляющая в уравнении (15), которая отвечает за трение в колебательной системе.

Рассмотрим теперь фрактальный осциллятор (4) с внешним периодическим возмущением  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$  с амплитудой  $\delta$  и частотой  $\phi$ . Найдем производную решения (11):

$$\dot{x}(t) = x_0 \sin_{\beta}(\omega t) - y_0 t E_{\beta, \beta}(-(\omega t)^{\beta}) + \delta \omega^{\beta-1} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-2} E_{\beta, \beta-1}(-(\omega(t-\tau))^{\beta}) \cos(\phi \tau) d\tau. \quad (35)$$

В формуле (35) мы учли одно из свойств свертки — правило дифференцирования свертки. С учетом формулы (35) построим фазовые траектории фрактального осциллятора (4).

В случае резонанса, когда собственная частота  $\omega$  совпадает с частотой внешнего возмущения  $\phi$ , фазовые траектории должны иметь вид раскручивающихся спиралей вследствие возрастания амплитуды колебаний. Однако в этом случае этот эффект справедлив только для гармонического осциллятора ( $\beta = 2$ ), остальные фазовые траектории выходят на предельный цикл (рис. 12).

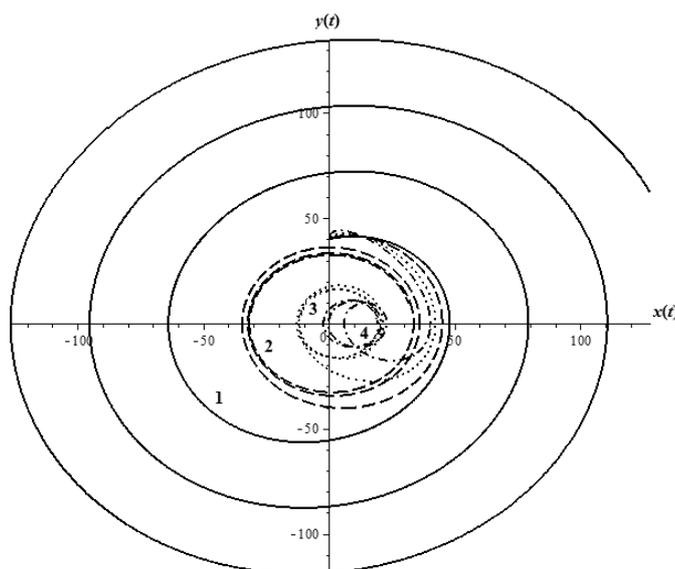


Рис. 12. Фазовые траектории фрактального осциллятора (11) с внешним периодическим воздействием  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\omega = \phi = 1, t \in [0, 20], \delta = 10$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

Рассмотрим случай наличия трения в колебательной системе. Сначала найдем производную от соответствующего решения (25) согласно работе [Kilbas, 2005]:

$$\dot{x}(t) = x_0 x_1^* + y_0 x_2^* + \delta \int_0^t G_{\beta,\gamma}^*(t - \tau) \cos(\phi t) d\tau, \tag{36}$$

$$x_1^*(t) = t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_2\Psi_2 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1), (\beta n+1, \beta-\gamma) \\ (\beta n+1, \beta-\gamma), (\beta n, \beta-\gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right] +$$

$$+ t^{\beta-\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_2\Psi_2 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1), (\beta(n+1)+1-\gamma, \beta-\gamma) \\ (\beta(n+1)+1-\gamma, \beta-\gamma), (\beta(n+1)-\gamma, \beta-\gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right],$$

$$x_2^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{\beta n}}{n!} {}_2\Psi_2 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1), (\beta n+2, \beta-\gamma) \\ (\beta n+2, \beta-\gamma), (\beta n+1, \beta-\gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda t^{\beta-\gamma} \right],$$

$$G_{\beta,\gamma}^*(t - \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{\beta n} (t - \tau)^{\beta n + \beta - 1}}{n!} {}_2\Psi_2 \left[ \begin{matrix} (n+1, 1), (\beta(n+1), \beta-\gamma) \\ (\beta(n+1), \beta-\gamma), (\beta(n+1)-1, \beta-\gamma) \end{matrix} \middle| -\lambda (t - \tau)^{\beta-\gamma} \right].$$

С учетом формулы (36) построим фазовые траектории в зависимости от значений дробного параметра  $\beta$  (рис. 13).

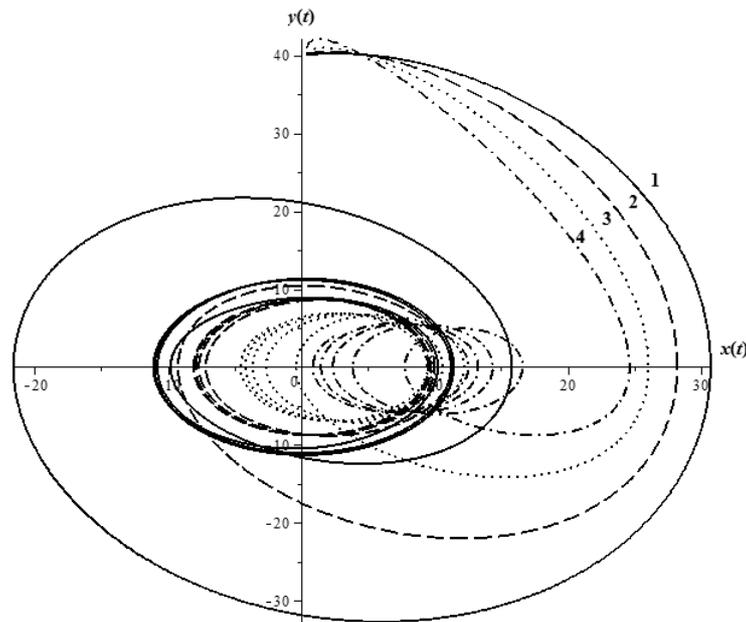


Рис. 13. Фазовые траектории фрактального осциллятора (15) с внешней периодической силой  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\delta = 10$ ,  $\omega = \phi = 1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $t \in [0, 30]$ : 1 –  $\beta = 2$ ; 2 –  $\beta = 1.8$ ; 3 –  $\beta = 1.6$ ; 4 –  $\beta = 1.4$

Рисунок 13 характеризует расчетные кривые, которые были построены выше (см. рис. 9). Фазовые траектории выходят на предельный цикл, которому соответствует постоянство амплитуды колебаний, начиная с некоторого момента времени  $t$  (рис. 13).

Отметим, что фазовые траектории строились по точкам  $(x(t), \dot{x}(t))$ . Рассмотрим другой подход, когда фазовые траектории строятся по точкам  $(x(t), \partial_{0t}^{\beta-1} x(\tau))$ . Рассмотрим фрактальный осциллятор (9) и найдем производную дробного порядка  $\beta - 1$  от его решения (10):

$$\partial_{0t}^{\beta-1} x(\tau) = x_0 \partial_{0t}^{\beta-1} \cos_{\beta}(\omega\tau) + y_0 / \omega \partial_{0t}^{\beta-1} \sin_{\beta}(\omega\tau). \quad (37)$$

Рассмотрим первое слагаемое в соотношении (37) с учетом свойств функции типа Миттаг-Леффлера [Джрбашян, 1966]:

$$\begin{aligned} x_0 \partial_{0t}^{\beta-1} \cos_{\beta}(\omega\tau) &= x_0 \partial_{0t}^{\beta-1} E_{\beta,1}(-(\omega t)^{\beta}) = x_0 \partial_{0t}^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\beta k} t^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 1)} = \\ &= x_0 \partial_{0t}^{\beta-1} [1] + x_0 \partial_{0t}^{\beta-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\beta k} t^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 1)} = x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\beta k} \partial_{0t}^{\beta-1} [t^{\beta k}]}{\Gamma(\beta k + 1)} = \\ &= x_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\beta k} t^{\beta(k-1)+1}}{\Gamma(\beta(k-1) + 2)} = -x_0 \omega^{\beta} t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega^{\beta j} t^{\beta j}}{\Gamma(\beta j + 2)} = -x_0 \omega^{\beta} t E_{\beta,2}(-(\omega t)^{\beta}). \end{aligned} \quad (38)$$

Аналогично второе слагаемое в соотношении (37) имеет вид

$$\begin{aligned} y_0 / \omega \partial_{0t}^{\beta-1} \sin_{\beta}(\omega\tau) &= y_0 \partial_{0t}^{\beta-1} [t E_{\beta,2}(-(\omega t)^{\beta})] = y_0 \partial_{0t}^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\beta k} t^{\beta k+1}}{\Gamma(\beta k + 2)} = y_0 \partial_{0t}^{\beta-1} [t] + \\ &+ y_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\beta k} \partial_{0t}^{\beta-1} [t^{\beta k+1}]}{\Gamma(\beta k + 2)} = \frac{y_0 t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} + y_0 t^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{\beta k} t^{\beta(k-1)}}{\Gamma(\beta(k-1) + 3)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{y_0 t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} - y_0 \omega^\beta t^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega^{\beta j} t^{\beta j}}{\Gamma(\beta j + 3)} = y_0 t^2 \left[ \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} - \omega^\beta E_{\beta,3}(-(\omega t)^\beta) \right] = \\
 &= y_0 t^2 \left[ \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} - \omega^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 3)} \right] = -y_0 t^2 \omega^\beta \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\omega t)^{\beta k}}{\Gamma(\beta k + 3)} = \\
 &= y_0 t^{2-\beta} \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\omega t)^{\beta(k+1)}}{\Gamma(\beta(k+1) + 3 - \beta)} = y_0 t^{2-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (\omega t)^{\beta j}}{\Gamma(\beta j + 3 - \beta)} = y_0 t^{2-\beta} E_{\beta,3-\beta}(-(\omega t)^\beta). \quad (39)
 \end{aligned}$$

В итоге мы получаем производную дробного порядка  $\beta - 1$ :

$$\partial_{0t}^{\beta-1} x(\tau) = -x_0 \omega^\beta t E_{\beta,2}(-(\omega t)^\beta) + y_0 t^{2-\beta} E_{\beta,3-\beta}(-(\omega t)^\beta). \quad (40)$$

Построим фазовые траектории по точкам  $(x(t), \partial_{0t}^{\beta-1} x(\tau))$ .

На рисунке 14 приведен фазовый портрет фрактального осциллятора (9) с начальной точкой  $(x_0, y_0)$  и собственной частотой  $\omega = 1$ . Время моделирования выбиралось из отрезка  $t \in [0, 20]$ .

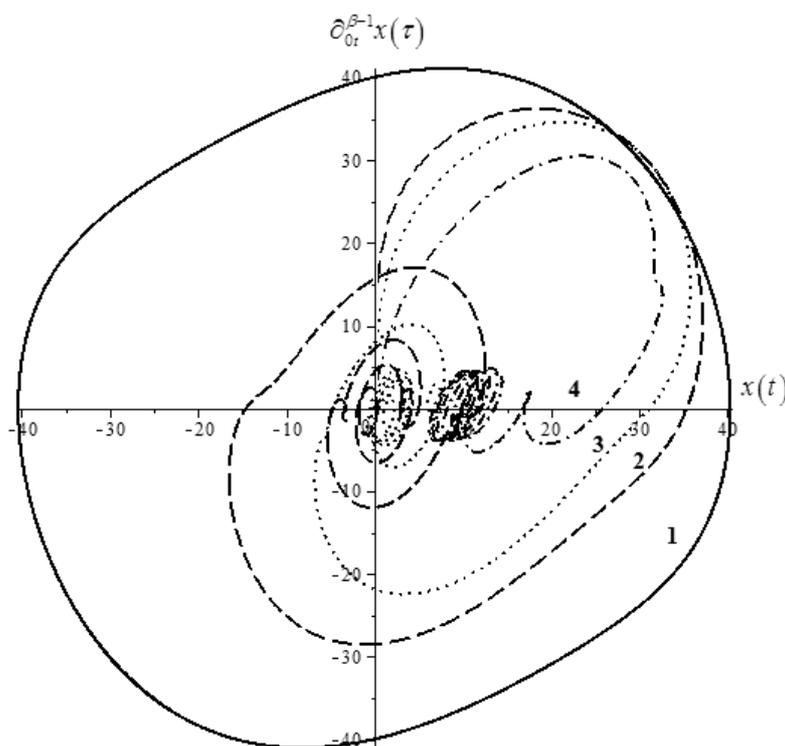


Рис. 14. Фазовые траектории фрактального осциллятора (9)  $\omega = 1, t \in [0, 20]$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

Фазовый портрет на рисунке 14 в общем похож на фазовый портрет рисунка 11. Кривая 1 соответствует гармоническому осциллятору, остальные траектории имеют вид закручивающихся спиралей, точка равновесия системы для этих случаев — устойчивый фокус.

Заметим, что начальное условие  $y_0 = \partial_{0t}^{\beta-1} x(\tau) |_{t=0}$  зависит от значений параметра  $\beta$ . Поэтому на рисунке 14 фазовые траектории начинаются из разных начальных точек. По-видимому, это одна из особенностей построения фазовых траекторий по точкам  $(x(t), \partial_{0t}^{\beta-1} x(\tau))$ .

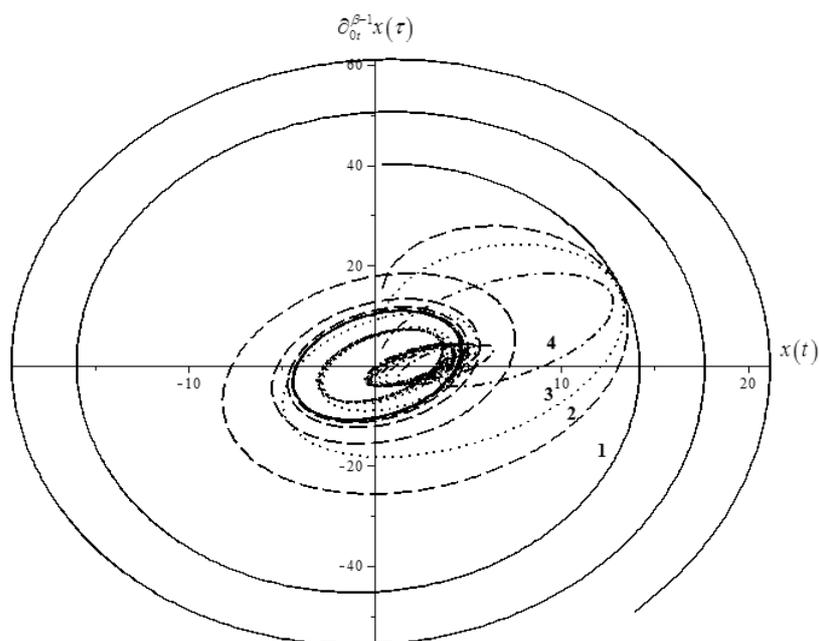


Рис. 15. Фазовые траектории фрактального осциллятора (9) с внешним периодическим воздействием  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\delta = 10$ ,  $\phi = 3$ ,  $\omega = 1$ ,  $t \in [0, 20]$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

Рассмотрим случай, когда фрактальный осциллятор подвержен внешнему периодическому воздействию  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$  с амплитудой  $\delta$  и частотой  $\phi$ .

На рисунке 15 фазовые траектории в основном выходят на предельный цикл, кроме случая  $\beta = 2$ . В этом случае фазовая траектория соответствует периодическим колебаниям, а точка равновесия системы является центром. Можно отметить, что фазовые траектории выходят на предельный цикл по-разному. Например, в фазовой траектории 4 есть наличие петель, что может говорить о многопериодичности решения фрактального осциллятора. Эти свойства присущи нелинейным колебательным системам.

Случай внешнего периодического воздействия представлен на рисунке 16.

На рисунке 16 фазовые траектории в случае резонанса выходят на предельный цикл. Амплитуда колебаний возрастает в случае  $\beta = 2$ , что подтверждает фазовая траектория — раскручивающаяся спираль.

Если в колебательной системе помимо внешнего периодического возмущения имеет место трение, то фазовый портрет такой системы может иметь вид, представленный на рисунке 17.

Введение трения с малым коэффициентом трения  $\lambda = 0.05$  и значением дробного параметра  $\gamma = 0.8$  в колебательную систему приводит к диссипации энергии для случая  $\beta = 2$ , а остальные траектории выходят на предельный цикл и похожи на траектории (рис. 16). Отметим также, что на фазовых траекториях четко прослеживаются петли (фазовые траектории 2 и 3).

В случае резонанса и трения в колебательной системе может возникнуть следующий фазовый портрет, представленный на рисунке 18.

На рисунке 18 все фазовые траектории выходят на предельный цикл. Поэтому в этом случае роста амплитуды колебаний не наблюдается. По сравнению с фазовым портретом (рис. 17) можно заметить отсутствие петель.

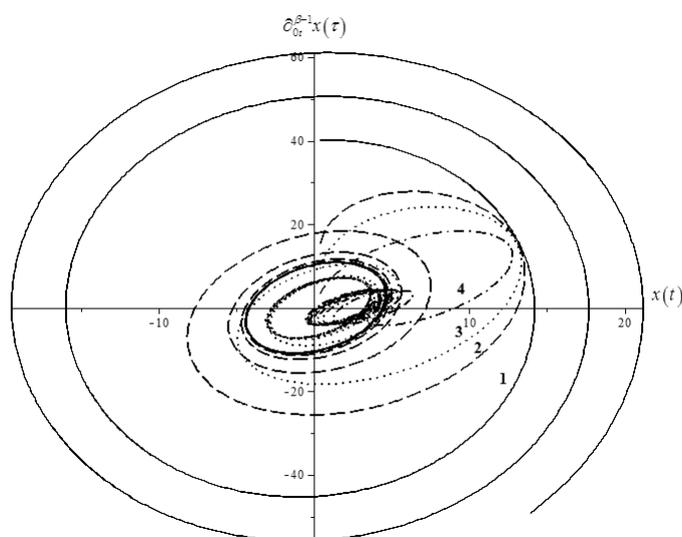


Рис. 16. Фазовые траектории фрактального осциллятора (9) с внешним периодическим воздействием  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\delta = 10$ ,  $\phi = \omega = 3$ ,  $t \in [0, 20]$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

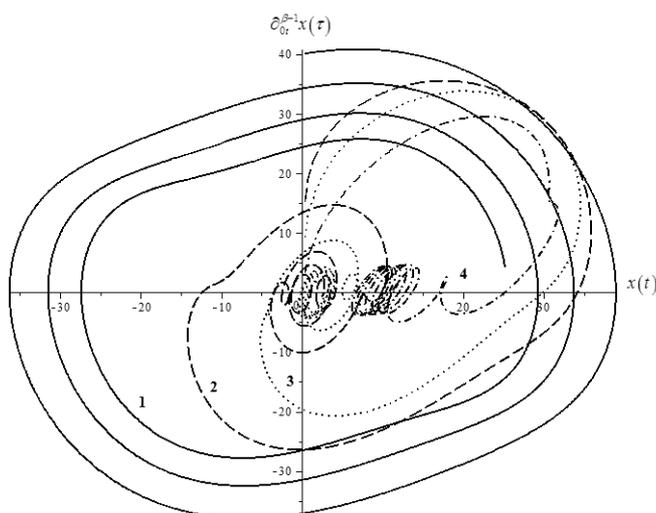


Рис. 17. Фазовые траектории фрактального осциллятора (9) с внешним периодическим воздействием  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\delta = 10$ ,  $\omega = 1$ ,  $\phi = 3$ ,  $\lambda = 0.05$ ,  $\gamma = 0.8$ ,  $t \in [0, 20]$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

## Заключение

Подводя итог нашим исследованиям фрактального осциллятора, можно сделать следующие выводы: дробный параметр  $\beta$  играет роль трения; фазовые траектории — закручивающиеся спирали, параметр  $\gamma$  отвечает не только за процесс трения, но и за перестройку фазовых траекторий (режимов). Возможно по этой причине мы наблюдали на фазовых траекториях петли. Поэтому ввод параметров  $\beta$  и  $\gamma$  в основное осцилляционное уравнение наделяет линейные колебательные системы свойствами нелинейных колебательных систем, а также за счет широкого диапазона их изменения приводит к более гибкому выбору вида колебательной системы в соответствии с конкретными ситуациями, возникающими в различных приложениях.

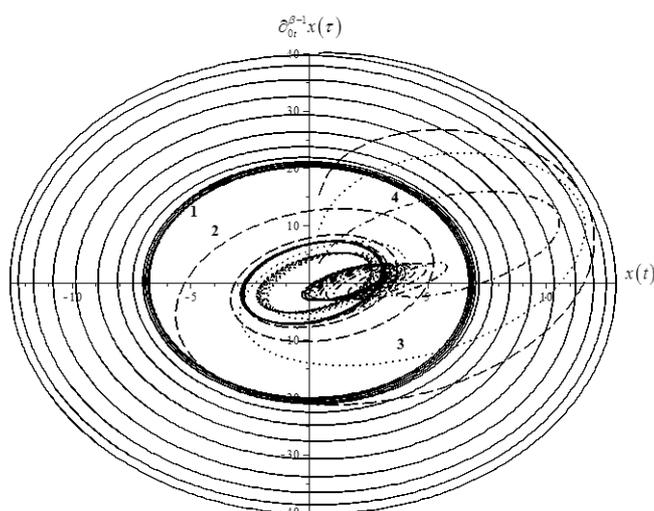


Рис. 18. Фазовые траектории фрактального осциллятора (9) с внешним периодическим воздействием  $f(t) = \delta \cos(\phi t)$ ,  $\delta = 10$ ,  $\omega = \phi = 3$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $\gamma = 0.4$ ,  $t \in [0, 30]$ : 1 —  $\beta = 2$ ; 2 —  $\beta = 1.8$ ; 3 —  $\beta = 1.6$ ; 4 —  $\beta = 1.4$

Если на фрактальный осциллятор действует внешняя периодическая сила, то возможна стабилизация фазовых траекторий, выход на предельный цикл. В случае резонанса, совпадения соответствующих частот, амплитуда колебаний может не возрастать.

Другой очень интересный момент — трактовка фазовых траекторий, а именно построение по точкам  $(x(t), \partial_{0t}^{\beta-1} x(\tau))$ . В этом случае могут получаться фазовые портреты, отличные от классического построения по точкам  $(x(t), \dot{x}(t))$ . Поэтому такая трактовка фазовых траекторий заслуживает дальнейшего изучения, а также физической интерпретации, что несомненно, будет отражено в соответствующих приложениях.

## Список литературы

- Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Лекции по нелинейной динамике. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2011. — 516 с.
- Вольterra В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М. : Наука, 1982. — 304 с.
- Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. — 1948. — Т. 12. — С. 529–539.
- Гринченко В. Т., Мацьгура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: хаос и фракталы. — М. : ЛКИ, 2007. — 264 с.
- Джрбабян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М. : Наука, 1966. — 672 с.
- Климонтович Ю. Л. Введение в физику открытых систем. — М. : Янус-К, 2002. — 284 с.
- Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории фрактального осциллятора // Письма в ЖТФ. — 2002. — Т. 28, № 1. — С. 67–73.
- Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. — М. : Наука, 2006. — 173 с.
- Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М. : Физматлит, 2003. — 272 с.
- Паровик Р. И. Особенности вычисления функции типа Миттаг-Леффлера в системе компьютерной математики Maple // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. — 2012. — Т. 5, № 2. — С. 51–61.

- Паровик Р. И.* Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. — 2014. — Т. 9, № 2. — С. 30–35.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М. : Наука, 1983. — С. 752.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. Дополнительные главы. — М. : Физматлит, 2003. — С. 688.
- Учайкин В. В.* Метод дробных производных. — Ульяновск : Артишок, 2008. — 512 с.
- Шогенов В. Х., Ахкубеков А. А., Ахкубеков Р. А.* Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер. Естественные науки. — 2004. — № 1. — С. 46–50.
- Caputo M.* Elasticità e dissipazione. — Bologna : Zanichelli, 1969. — 150 p.
- Hille E., Tamarkin J.* On the theory of linear integral equations // Annals of Mathematics. — 1930. — P. 479–528.
- Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 523 p.
- Kilbas A.* Fractional calculus of the generalized Wright function // Fractional Calculus and Applied Analysis. — 2005. — Vol. 8, No. 2. — P. 113–126.
- Mainardi F.* Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos, Solitons & Fractals. — 1996. — Vol. 7, No. 9. — P. 1461–1477.
- Méhauté A. L., Nigmatullin R., Laurent N.* Flèches du temps et géométrie fractale. — Paris : Hermes, 1998. — 348 p.
- Sun H. G., Chen W., Wei H., Chen Y. Q.* A comparative study of constant-order and variable-order fractional models in characterizing memory property of systems // The European Physical Journal-Special Topics. — 2011. — Vol. 193, No. 1. — P. 185–192.