**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 5 С. 989–999**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.8

Поляризация вакуума скалярного поля на группах Ли с биинвариантной метрикой

А. И. Бреев[1,2,a], А. В. Шаповалов[1,2,b]

[1]Томский государственный университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
[2]Томский политехнический университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30

E-mail: [a] breev@mail.tsu.ru, [b] shpv@phys.tsu.ru

*Получено 18 апреля 2015 г.,
после доработки 21 августа 2015 г.*

В работе рассматривается эффект поляризации вакуума скалярного поля на группах Ли с биинвариантной метрикой Робертсона–Уокера. При помощи метода орбит найдены выражения для вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярного поля, которые определяются характером представления группы. Показана совместность уравнений Эйнштейна с данным тензором энергии-импульса. В качестве примера рассмотрена модель перемешанного мира.

Ключевые слова: поляризация вакуума, метод орбит

Vacuum polarization of scalar field on Lie groups with Bi-invariant metric

A. I. Breev[1], A. V. Shapovalov[2]

[1]Tomsk State University, 36 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia
[2]Tomsk Polytechnical University, 30 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia

Abstract. — We consider vacuum polarization of a scalar field on the Lie groups with a bi-invariant metric of Robertson-Walker type. Using the method of orbits we found expression for the vacuum expectation values of the energy-momentum tensor of the scalar field which are determined by the representation character of the group. It is shown that Einstein's equations with the energy-momentum tensor are consistent. As an example, we consider isotropic Bianchi type IX model.

Keywords: vacuum polarization, orbit method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 5, pp. 989–999 (Russian).

Исследование выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета. Работа выполнена в рамках Государственного задания вузам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/ K.

Введение

Квантовые эффекты поляризации вакуума и рождения частиц учитываются в космологических моделях ОТО, в теории сверхсильных гравитационных полей, возникающих в окрестности черных дыр и нейтронных звезд [Биррелл, Девис, 1984].

Целью настоящей работы является расчет вакуумных средних тензора энергии-импульса скалярного поля, описывающих эффект поляризации вакуума и содержащих вклад рожденных частиц. Учет квантовых эффектов производится в рамках однопетлевого подхода, в котором гравитационное поле считается классическим, а скалярное поле трактуются квантовым образом.

В настоящей работе рассматривается эффект поляризации вакуума скалярного поля и уравнения Эйнштейна с вакуумным тензором энергии-импульса (ТЭИ). В качестве пространства-времени выберем групповое многообразие $M = \mathbb{R}^1 \times G$, где G — $(n-1)$-мерная группа Ли, снабженная биинвариантной метрикой. Введение на M конформной метрики типа Робертсона–Уокера позволяет естественным образом ввести в метрику зависимость от времени.

Случай, соответствующий выбору стационарной правоинвариантной метрики на группе, подробно рассматривался в работе [Бреев, 2010]. Так как вакуумные средние ТЭИ расходятся, то к ним применяется процедура перенормировки [Биррелл, Девис, 1984; Гриб, Мамаев, 1988]. В данной работе исследуются дополнительные свойства вакуумных средних, присущих именно случаю биинвариантной метрики на группе. В частности, показано, что вакуумные средние инвариантны относительно присоединенного представления группы и определяются характером неприводимого представления, построенного по невырожденной орбите коприсоединенного представления.

Общие выражения для вакуумных средних проиллюстрированы на примере изотропной космологической модели перемешанного мира [Ellis, MacCallum, 1968], которой соответствует группа вращений $SO(3)$, снабженная биинвариантной метрикой.

Группы Ли с биинвариантной метрикой типа Робертсона–Уокера

Пусть G — вещественная компактная полупростая $(n-1)$-мерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Форма Киллинга $\gamma(X, Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \cdot \mathrm{ad}_Y)$, где $X, Y \in \mathfrak{g}$, задает биинвариантную риманову метрику на G:

$$\langle u, w\rangle_g = \gamma\left((L_{g^{-1}})_* u, (L_{g^{-1}})_* w\right) = \gamma\left((R_{g^{-1}})_* u, (R_{g^{-1}})_* w\right), \quad u, w \in T_g G, \quad g \in G,$$

где $(L_g)_*, (R_g)_*$ — дифференциалы левых и правых сдвигов на группе Ли G соответственно.

Рассмотрим конформное пространство Робертсона–Уокера $\tilde{M}$, у которого каждое пространственное сечение является групповым многообразием G:

$$d\tilde{s}^2 = a^2(\tau) ds^2, \quad ds^2 = d\tau^2 - dl_G^2,$$

где ds^2 — метрика на групповом многообразии $M = \mathbb{R} \times G$, заданная 2-формой $\mathbf{G} = 1 \oplus (-\gamma)$, $\tau \in [0; \infty)$ — конформное время сопутствующих наблюдателей, масштабный фактор $a(\tau)$ является гладкой вещественной функцией.

Тензор Риччи $\tilde{\mathbf{R}}(X, Y)$ и скалярная кривизна $\tilde{R}$ пространства-времени $\tilde{M}$ связаны с тензором Риччи $\mathbf{R}(X, Y)$ и скалярной кривизной R на M следующим образом [Биррелл, Девис, 1984]:

$$\tilde{\mathbf{R}}(X, Y) = \mathbf{R}(X, Y) - (n-2)(c(\tau)^2 - \dot{c}(\tau)) e_0(X) e_0(Y) + \mathbf{G}(X, Y)((n-2)c^2(\tau) + \dot{c}(\tau)), \quad X, Y \in \mathbb{R}^1 \otimes \mathfrak{g}, \tag{1}$$

$$\tilde{R} = a^{-2}(\tau)\left(R + (n-1)(n-2)c^2(\tau) + 2(n-1)\dot{c}(\tau)\right), \quad c(\tau) \equiv \frac{\dot{a}(\tau)}{a(\tau)}, \tag{2}$$

где $e_0(X)$ — проекция из $\mathbb{R}^1 \otimes \mathfrak{g}$ в $\mathbb{R}^1$. Значение тензора Риччи на векторных полях $u, v \in T_{(\tau,g)}\tilde{M}$ находится при помощи правых сдвигов на группе M:

$$\tilde{R}(u, v) = \tilde{\mathbf{R}}\Big((R_{g^{-1}})_* u, (R_{g^{-1}})_* v\Big).$$

Так как группа Ли G, снабженная биинвариантной метрикой, является пространством постоянной кривизны, то выполняется соотношение [Барут, Рончка, 1980]

$$\mathbf{R}(X, Y) = -\frac{R}{n-1}\gamma(X, Y), \quad R = -\frac{n-1}{4}, \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{3}$$

Таким образом, структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и масштабный фактор $a(\tau)$ определяют все геометрические характеристики пространства–времени $\tilde{M}$.

λ-представление группы Ли G

Группа Ли G действует на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ коприсоединенным представлением $Ad^*\colon G\times\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$, которое расслаивает $\mathfrak{g}^*$ на К-орбиты. К-орбиты максимальной размерности $\dim\mathfrak{g} - \operatorname{ind}\mathfrak{g}$ называются *невырожденными*. Индекс алгебры $\operatorname{ind}\mathfrak{g}$ определяется как количество независимых функций Казимира $K_\mu(f)$, $f \in \mathfrak{g}^*$ на сопряженном пространстве $\mathfrak{g}^*$ относительно скобки Пуассона–Ли $\{\cdot, \cdot\}$.

Пусть O_λ — невырожденная К-орбита, проходящая через ковектор общего положения $\lambda \in \mathfrak{g}^*$. Локально всегда можно ввести на O_λ координаты Дарбу $(p, q) \in P \times Q$, в которых форма Кириллова ω_λ, задающая на К-орбите симплектическую структуру, имеет канонический вид $\omega_\lambda = dp^a \wedge dq_a$, $a = 1, \ldots, 1/2 \dim O_\lambda$.

Обозначим через $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ комплексное расширение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Каноническое вложение $f : O_\lambda \to \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ однозначно определяется функциями $f_X(p, q, \lambda)$, $X \in \mathfrak{g}$, удовлетворяющими системе уравнений

$$\{f_X, f_Y\} = f_{[X,Y]}, \quad f_X(0, 0, \lambda) = \lambda(X), \quad X, Y \in \mathfrak{g}, \quad K_\mu(f(p, q, \lambda)) = K_\mu(\lambda),$$

где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Будем рассматривать функции $f_X(p, q, \lambda)$ линейные по переменным p_a:

$$f_X(p, q, \lambda) = \alpha^a_X(q)p_a + \chi_X(q, \lambda), \quad q \in Q. \tag{4}$$

Векторные поля $\alpha_X(q) = \alpha^a_X(q)\partial_q$ являются генераторами группы преобразований $G_{\mathbb{C}} = \exp(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ однородного пространства Q, а функции $\chi_X(q, \lambda)$ реализуют *нетривиальное продолжение* векторных полей $\alpha_X(q)$ [Барановский, 2003]. Отметим, что для невырожденных К-орбит всегда существуют функции канонического вложения вида (4).

Введем меру $d\mu(q)$ и скалярное произведение

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_Q \overline{\psi_1(q)}\psi_2(q)d\mu(q), \quad d\mu(q) = \rho(q)dq \tag{5}$$

в пространстве функций $L_2(Q, d\mu(q))$ на частично голоморфном многообразии Q. Операторы первого порядка

$$\ell_X(q, \lambda) = i f_X(-i\partial_q, q, \lambda) = \alpha^a_X(q)\partial_{q^a} + i\chi_X(q, \lambda), \quad K_\mu(-i\ell(q, \lambda)) = K_\mu(\lambda) \tag{6}$$

реализуют неприводимое λ-представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $L_2(Q, d\mu(q))$ и являются результатом qp-квантования на К-орбите O_λ. Без ограничения общности будем считать, что операторы $-i\ell_X(q, \lambda)$ эрмитовы относительно скалярного произведения (5).

Введем поднятие λ-представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ до локального унитарного представления T^{λ} ее группы Ли G:

$$(T^{\lambda}_g\varphi)(q) = \int_Q D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)\varphi(q')d\mu(q'), \quad \frac{d}{dt}|_{t=0}(T^{\lambda}_{\exp(tX)}\varphi)(q) = \ell_X(q,\lambda)\varphi(q).$$

Обобщенные ядра $D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)$ по определению удовлетворяют соотношениям

$$D^{\lambda}_{q\overline{q}'}(g_1\cdot g_2) = \int_Q D^{\lambda}_{q\overline{q}''}(g_1)D^{\lambda}_{q''\overline{q}'}(g_2)d\mu(q''), \quad D^{\lambda}_{q\overline{q}'}(g) = \overline{D^{\lambda}_{q'\overline{q}}(g^{-1})}, \quad D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(e) = \delta(q,\overline{q'}), \tag{7}$$

где $g_1, g_2 \in G$ и находятся как решение системы уравнений

$$(\eta_X(g) + \ell_X(q,\lambda))\, D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g) = 0, \quad \left(\xi_X(g) + \overline{\ell_X(q',\lambda)}\right) D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g) = 0, \tag{8}$$

где $\xi_X(g) = (L_g)_*X$, $\eta_X(g) = -(R_g)_*X$ — лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Ли G соответственно. Так как группа Ли G компактна, то матричные элементы λ-представления обладают свойствами полноты и ортогональности [Барут, Рончка, 1980]:

$$\int_G \overline{D^{\tilde{\lambda}}_{\tilde{q}\overline{\tilde{q}'}}}(g)D^{\lambda}_{q\overline{q}'}(g)d\mu(g) = \delta(q,\overline{\tilde{q}})\delta(\tilde{q}',\overline{q}')\delta(\tilde{\lambda},\lambda), \tag{9}$$

$$\int_{Q\times Q\times J} \overline{D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(\tilde{g})}D^{\lambda}_{q\overline{q}'}(g)d\mu(q)d\mu(q')d\mu(\lambda) = \delta(\tilde{g},g). \tag{10}$$

Отметим, что функции $D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)$ определены глобально на группе Ли G тогда и только тогда, когда выполняется условие Кириллова целочисленности орбиты O_λ [Кириллов, 1978]:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma\in H_1(O_\lambda)} \omega_\lambda = n_\gamma \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где $H_1(O_\lambda)$ — группа одномерных гомологий группы стационарности $G^{\lambda} = \{g\in G \mid Ad^*_g\lambda = \lambda\}$. Функции $D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g)$ являются собственными для операторов Казимира $\hat{K}_\mu(g) = K_\mu(-i\xi(g)) = K_\mu(-i\eta(g))$ группы Ли G:

$$\hat{K}_\mu(g)D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g) = \omega_\mu(\lambda)D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g). \tag{12}$$

Действительно, из (8) следует $\hat{K}_\mu(g)D^{\lambda}_{q\overline{q'}}(g) = K_\mu(i\ell(q,\lambda))$. Далее, учитывая (6) и принимая во внимание однородность функций Казимира, получим (12).

Некоммутативное интегрирование уравнения Клейна–Гордона

Рассмотрим уравнение Клейна–Гордона для комплексного скалярного поля $\tilde{\varphi}(g)$ в пространстве $\tilde{M}$:

$$\left(\tilde{\Box} + \zeta\tilde{R} + m^2\right)\tilde{\varphi}(\tau,g) = 0, \quad \zeta = \frac{n-2}{4(n-1)}, \tag{13}$$

где m — масса поля $\tilde{\varphi}(g)$, $\tilde{\Box}$ — даламбертиан в $\tilde{M}$, имеющий вид

$$\tilde{\Box} = a^{-2}(\tau)\left(\partial^2_\tau + (n-2)c(\tau)\partial_\tau - \Delta_G\right).$$

Здесь Δ_G — оператор Лапласа на группе Ли G. Базис решений уравнения (13) ищем в виде

$$\tilde{\varphi}_\sigma(\tau, g) = a^{\frac{2-n}{2}}(\tau)\varphi_\sigma(\tau, g), \quad \varphi_\sigma(\tau, g) = f_\Lambda(\tau)\Phi_\sigma(g), \quad \Lambda \in \sigma, \tag{14}$$

где набор σ параметризует базис решений, $\varphi_\sigma(\tau, g)$ — описывает скалярное поле в пространстве M. Функция $\Phi_\sigma(g)$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_G \Phi_\sigma(g) = \Lambda^2 \Phi_\sigma(g), \tag{15}$$

а зависимость от конформного времени определяется уравнением осциллятора с переменной частотой:

$$\ddot{f}_\Lambda + \omega^2(\tau) f_\Lambda = 0, \quad \omega^2(\tau) = \Lambda^2 + a^2(\tau)m^2 + \zeta R, \quad -i\left(\dot{\overline{f_\Lambda}} f_\Lambda - \overline{f_\Lambda}\dot{f}_\Lambda\right) = 1.$$

На решения уравнения (15) накладывается условие нормировки

$$\sqrt{-\gamma}\int_G \overline{\Phi_\sigma(g)}\Phi_{\sigma'}(g)d\mu(g) = \delta(\sigma, \sigma'),$$

где $\gamma = \det(\gamma_{ab})$, $d\mu(g)$ — инвариантная мера Хаара на группе Ли G.

Так как метрика на группе Ли G биинвариантна, то оператор Лапласа $-\Delta_G$ является оператором Казимира $H(-i\eta(g))$ на группе Ли G, где $H(f) = \gamma^{ab} f_a f_b$. Поэтому набор

$$\Phi_\sigma(g) = (-\gamma)^{1/4} D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1}), \quad \sigma = (q, q', \lambda)$$

образует базис решений уравнения (15) с собственными значениями $\Lambda^2(\lambda) = H(-i\ell(0, \lambda))$. Функцию $f_\Lambda(\tau)$ будем обозначать как $f_\lambda(\tau)$.

Вакуумные средние ТЭИ скалярного поля

ТЭИ скалярного поля $\varphi(\tau, g)$ в статическом пространстве-времени M имеет вид [Гриб, Мамаев, 1988]

$$T(\eta_X, \eta_Y; m)\{\varphi, \varphi\} = (1 - 2\zeta)\,\overline{\eta_{(X}\varphi}\eta_{Y)}\varphi + (2\zeta - 1/2)\,\mathbf{G}(X, Y)G^{AB}\overline{\eta_A\varphi}\eta_B\varphi - \tag{16}$$
$$- \left[\zeta\mathbf{R}(X, Y) + (2\zeta - 1/2)\,\mathbf{G}(X, Y)(m^2 + \zeta R)\right]\overline{\varphi}\varphi - \zeta[(\nabla_{\eta_X}\nabla_{\eta_Y}\overline{\varphi})\varphi + \overline{\varphi}(\nabla_{\eta_X}\nabla_{\eta_Y})\varphi], \quad X, Y \in \mathbb{R}\times\mathfrak{g},$$

где ∇_{η_X} — ковариантная производная вдоль векторного поля η_X. В работе [Бреев, 2007] показано, что ТЭИ скалярного поля в пространстве-времени $\tilde{M}$ связан с исходным ТЭИ на M следующим образом:

$$\tilde{T}(\eta_X, \eta_Y; m)\{\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}\} = a^{2-n}(\tau)T(\eta_X, \eta_Y; a(\tau)m)\{\varphi, \varphi\}. \tag{17}$$

Вакуумные средние ТЭИ скалярного поля на $\tilde{M}$ будем рассматривать относительно вакуума скалярного поля φ, который определяет вакуумное состояние скалярного поля $\tilde{\varphi}$ в некоторый начальный момент времени $\tau = \tau_0$. Тогда, учитывая (17), для вакуумных средних ТЭИ на $\tilde{M}$ получим

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_X, \eta_Y; m)\rangle_0 = a^{2-n}(\tau)\langle T(\eta_X, \eta_Y; a(\tau)m)\rangle_0,$$

где вакуумные средние ТЭИ в M определяются как интеграл по всем квантовым числам от ТЭИ, взятого по полному набору решений уравнения Клейна–Гордона (по дискретным квантовым числам понимается суммирование):

$$\langle T(\eta_X, \eta_Y; a(\tau)m)\rangle_0 = \int T(\eta_X, \eta_Y; a(\tau)m)\{\varphi_\sigma(\tau, g), \varphi_\sigma(\tau, g)\}d\mu(\sigma). \tag{18}$$

Имеет место

Теорема 1. *Вакуумные средние* $\langle \eta_X \hat{\varphi} \eta_Y \hat{\varphi} \rangle_0$ *на группе Ли M с биинвариантной метрикой обладают свойством* Ad_g*-инвариантности:*

$$\langle \eta_{Ad_g X} \hat{\varphi} \eta_{Ad_g Y} \hat{\varphi} \rangle_0 = \langle \eta_X \hat{\varphi} \eta_Y \hat{\varphi} \rangle_0, \quad g \in G, \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{19}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение для вакуумных средних $\langle \eta_X \hat{\varphi} \eta_Y \hat{\varphi} \rangle_0$ с учетом (14):

$$\langle \eta_X \hat{\varphi} \eta_Y \hat{\varphi} \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \int_{Q\times Q\times J} |f_\lambda(\tau)|^2 \overline{\left(\eta_X D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1})\right)} \left(\eta_Y D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1})\right) d\mu(q) d\mu(q') d\mu(\lambda) = \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \int_{Q\times Q\times J} |f_\lambda(\tau)|^2 \left(\ell_X(q',\lambda) \overline{D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1})}\right) \left(\overline{\ell_Y(q',\lambda)} D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1})\right) d\mu(q) d\mu(q') d\mu(\lambda).$$

Представляя функции $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1})$ в виде

$$D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1}) = \int_Q D^\lambda_{q\overline{q''}}(g^{-1}) D^\lambda_{q''\overline{q'}}(e) d\mu(q'')$$

и учитывая соотношения (7), получим

$$\langle \eta_X \hat{\varphi} \eta_Y \hat{\varphi} \rangle_0 = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \int_{Q\times J} |f_\lambda(\tau)|^2 \left[\overline{\ell_X(q',\lambda) \ell_Y(q',\lambda)} D^\lambda_{q\overline{q'}}(e)\right]_{q=q'} d\mu(q') d\mu(\lambda). \tag{21}$$

Действуя аналогично, будем иметь

$$\langle \eta_{Ad_g X} \hat{\varphi} \eta_{Ad_g Y} \hat{\varphi} \rangle_0 = \langle \xi_X \hat{\varphi} \xi_Y \hat{\varphi} \rangle_0 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \int_{Q\times Q\times J} |f_\lambda(\tau)|^2 \overline{\left(\ell_X(q,\lambda) D^\lambda_{q\overline{q'}}(e)\right)} \left(\ell_Y(q,\lambda) D^\lambda_{q\overline{q'}}(e)\right) d\mu(q) d\mu(q') d\mu(\lambda). \tag{22}$$

Складывая уравнения (8) и полагая $g = e$, получим соотношение

$$\left(\ell_X(q,\lambda) + \overline{\ell_X(q',\lambda)}\right) D^\lambda_{q\overline{q'}}(e) = 0. \tag{23}$$

Применяя (23) к (22), получим выражение (21). □

Из выражения (20) и унитарности λ-представления следует

Следствие 1. *Операторы* η_X *косоэрмитовы относительно вакуумных средних* $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$*:*

$$\langle \eta_X \hat{\varphi} \eta_Y \hat{\varphi} \rangle_0 = -\langle (\eta_Y \eta_X \hat{\varphi}) \hat{\varphi} \rangle_0. \tag{24}$$

Отметим важное свойство вакуумных средних.

Следствие 2. *Вакуумные средние* $\langle \hat{\varphi} \eta_X \varphi \rangle_0$ *на группе Ли M с биинвариантной метрикой равны нулю.*

Доказательство. Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, получим

$$\langle \hat{\varphi} \eta_X \hat{\varphi} \rangle_0 = -\langle \hat{\varphi} \xi_X \hat{\varphi} \rangle_0 = \langle \hat{\varphi} \eta_{Ad_g X} \hat{\varphi} \rangle. \tag{25}$$

Будем рассматривать вакуумные средние $\langle \hat{\varphi} \eta_a \hat{\varphi} \rangle_0$ как ковектор f_a. Равенство (25) тогда можно записать в виде

$$(Ad^*_g f) = f. \tag{26}$$

Требование (26) для неабелевой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ может быть выполнено для всех $g \in G$, только если $f = 0$. □

Подставим выражение (16) для ТЭИ в (18):

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0 = \frac{1}{2}a^{2-n}(\tau)\left[\langle\hat{\dot{\varphi}}\hat{\dot{\varphi}}\rangle_0 + \omega^2(\tau)\langle\hat{\varphi}\hat{\varphi}\rangle_0\right],$$

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_X)\rangle_0 = \frac{1}{2}a^{2-n}(\tau)\left[\langle\hat{\dot{\varphi}}\eta_X\hat{\varphi}\rangle_0 - \langle\hat{\varphi}\eta_X\hat{\dot{\varphi}}\rangle_0\right],$$

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_X,\eta_Y)\rangle_0 = a^{2-n}(\tau)\left(-\frac{1}{2}\langle\hat{\varphi}\{\eta_X,\eta_Y\}\hat{\varphi}\rangle_0 - \left(2\zeta-\frac{1}{2}\right)\gamma(X,Y)\left[\langle\hat{\dot{\varphi}}\hat{\dot{\varphi}}\rangle_0 - \omega^2(\tau)\langle\hat{\varphi}\hat{\varphi}\rangle_0\right]\right),$$

где мы учитываем свойство вакуумных средних (24). Используя выражение (21) для вакуумных средних, для ТЭИ получим

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0 = \frac{1}{2\sqrt{-\gamma}}a^{2-n}(\tau)\int_J\left(|f_\lambda(\tau)|^2\omega^2(\tau) + |\dot{f}_\lambda(\tau)|^2\right)\chi(\lambda)d\mu(\lambda), \quad \langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_X)\rangle_0 = 0, \tag{27}$$

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_X,\eta_Y)\rangle_0 = -\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}a^{2-n}(\tau)\int_J\Big(\left[F_{XY}(\lambda) + \zeta\mathbf{R}(X,Y)\chi(\lambda)\right]|f_\lambda(\tau)|^2 + \tag{28}$$

$$+\left(2\zeta-\frac{1}{2}\right)\gamma(X,Y)\left(|\dot{f}_\lambda(\tau)|^2 - |f_\lambda(\tau)|^2\omega^2(\tau)\right)\chi(\lambda)\Big),$$

где $\chi(\lambda) = \int_Q D^\lambda_{q\overline{q}}(e)d\mu(q)$ — характер λ-представления в единице группы Ли G,

$$F_{XY}(\lambda) = \frac{1}{2}\int_Q\left[\{\ell_X(q'),\ell_Y(q')\}_+ D^\lambda_{q\overline{q'}}(e)\right]_{q'=q}d\mu(q).$$

Следствие 3. *Симметричная 2-форма $F_{XY}(\lambda)$ на $\mathfrak{g}$ определяется характером λ-представления:*

$$F_{XY}(\lambda) = -\frac{\Lambda^2_\lambda}{\dim G}\chi(\lambda)\gamma(X,Y). \tag{29}$$

Доказательство. Из свойства Ad_g-инвариантности вакуумных средних (19) следует Ad_g-инвариантность симметрической 2-формы $F_{XY}(\lambda)$:

$$F_{(Ad_gX)(Ad_gY)}(\lambda) = F_{XY}(\lambda), \quad g\in G, \quad X,Y\in\mathfrak{g}. \tag{30}$$

Известно, что симметрическая 2-форма, удовлетворяющая (30), определяет биинвариантную метрику на группе Ли G. Из единственности биинвариантной метрики на группе Ли G следует, что $F_{XY}(\lambda) = f(\lambda)\gamma(X,Y)$, где $f(\lambda)$ — некоторая функция от параметра λ. Для нахождения $f(\lambda)$ найдем свертку $F_{XY}(\lambda)$ с метрическим тензором $\gamma(X,Y)$:

$$\gamma^{ab}F_{ab}(\lambda) = -\int_Q H(-i\ell(q'))D^\lambda_{q\overline{q'}}(e)\,|_{q'=q}\,d\mu(q) = -\Lambda^2_\lambda\chi(\lambda).$$

С другой стороны, $\gamma^{ab}F_{ab}(\lambda) = \dim G\cdot f(\lambda)$. Откуда получаем (29). □

Подставляя (29) в (28) и учитывая (3), получим

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_X,\eta_Y)\rangle_0 = \frac{\gamma(X,Y)}{n-1}\left(\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0 - \frac{a^{4-n}(\tau)}{\sqrt{-\gamma}}m^2\int_J|f_\lambda(\tau)|^2\chi(\lambda)d\mu(\lambda)\right). \tag{31}$$

Из (27) и (31) следует, что вакуумные средние ТЭИ скалярного поля на группе Ли $\tilde{M}$ с биинвариантной метрикой определяются характером λ-представления в единице группы. Отметим, что для безмассового скалярного поля выражения для вакуумных средних ТЭИ значительно упрощаются:

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_X,\eta_Y)\rangle_0|_{m=0} = \frac{\gamma(X,Y)}{n-1}\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0|_{m=0}, \quad \langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0|_{m=0} = \frac{a^{2-n}(\tau)}{2\sqrt{-\gamma}}\int_J\omega^2\chi(\lambda)d\mu(\lambda). \tag{32}$$

Совместность уравнений Эйнштейна

Масштабный фактор $a(\tau)$ в самосогласованной космологической модели определяется уравнениями Эйнштейна

$$\tilde{R}(X,Y) + \left(\Lambda - \frac{1}{2}\tilde{R}\right)\tilde{G}(X,Y) = -\kappa\langle\tilde{T}(X,Y)\rangle_{ren}, \tag{33}$$

где $\kappa = 8\pi G$, G — гравитационная постоянная; Λ — космологическая постоянная; $\langle\tilde{T}(X,Y)\rangle_{ren}$ — перенормированный ТЭИ квантового поля на $\tilde{M}$. С учетом формул (1) и (2) уравнения (33) примут вид

$$-\frac{R}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2}c^2(\tau) + \Lambda a^2(\tau) = \kappa\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0, \tag{34}$$

$$\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_X,\eta_0)\rangle_0 = 0, \tag{35}$$

$$\mathbf{R}(X,Y) + \gamma(X,Y)\left(\frac{R}{2} - \Lambda a^2(\tau) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}c^2(\tau) + (n-2)\dot{c}(\tau)\right) = \kappa\langle\hat{\tilde{T}}(X,Y)\rangle_0, \tag{36}$$

где $R(X,Y)$ — тензор Риччи на группе Ли G, $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Найдем условия совместности уравнений (34) и (36). Для этого выразим $c^2(\tau)$ из уравнения (34):

$$c^2(\tau) = \frac{2\Lambda a^2(\tau) - R - 2\kappa\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)}{(n-1)(n-2)}. \tag{37}$$

Продифференцируем уравнение (34) по конформному времени τ, учитывая, что

$$\frac{d}{d\tau}\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0 = (2-n)c(\tau)\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0 + \frac{m^2a^{4-n}}{\sqrt{-\gamma}}c(\tau)\int_J |f_\Lambda(\tau)|^2\chi(\lambda)d\mu(\lambda)$$

и выразим $\dot{c}(\tau)$:

$$\dot{c}(\tau) = \frac{2\Lambda a^2(\tau) + (n-2)\kappa\langle\hat{\tilde{T}}(\eta_0,\eta_0)\rangle_0}{(n-1)(n-2)} - \frac{\kappa m^2 a^{4-n}(\tau)}{(n-1)(n-2)\sqrt{-\gamma}}\int_J |f_\Lambda(\tau)|^2\chi(\lambda)d\mu(\lambda). \tag{38}$$

Подставляя (37) и (38) в уравнение (36) и учитывая формулу (31), получим условие совместности, имеющее вид (3), а следовательно, всегда имеющее место, если метрика на группе Ли G биинвариантна.

Таким образом, самосогласованная космологическая модель на группе Ли с биинвариантной метрикой задается уравнением (34) и, по сути, определяется плотностью энергии вакуума скалярного поля.

Вакуумные средние ТЭИ скалярного поля на $\mathbb{R} \times SO(3)$

Рассмотрим в качестве группы Ли G трехмерную группу вращений $SO(3)$. Зафиксируем некоторый базис $\{e_a\}$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$. Биинвариантная метрика на $SO(3)$ задается 2-формой $\gamma_{ab} = \mathrm{diag}(1,1,1)$. Приведем вид метрики пространства-времени $\tilde{M}$ в локальных координатах:

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - dl^2\right), \quad dl^2 = d\phi^2 + d\theta^2 + 2cos(\theta)d\phi d\psi + d\psi^2,$$

где $(\phi,\theta,\psi) \in G$ — канонические координаты второго рода:

$$g(\phi,\theta,\psi) = e^{\psi e_3}e^{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)e_2}e^{\phi e_3}, \quad \phi \in (0;2\pi], \quad \theta \in (0;\pi], \quad \psi \in (0;2\pi]. \tag{39}$$

Биинвариантная метрика dl^2 на группе Ли $SO(3)$ есть метрика трехмерной сферы радиуса $r = 2$ и, таким образом, совпадает с метрикой замкнутой космологической модели Фридмана. В отличие от космологической модели Фридмана, пространство в данном случае обладает топологией проективного пространства PR_3. Выражения для тензора Риччи и скалярной кривизны многообразия $M = \mathbb{R} \times SO(3)$ имеют вид

$$R_{ab} = \operatorname{diag}(0, -1/2, -1/2, -1/2), \quad R = 3/2.$$

Левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля на группе $SO(3)$ в канонических координатах (39) имеют вид

$$\xi_1 = \partial_\phi, \quad \xi_2 = -\cot\theta\sin\phi\partial_\phi + \cos\phi\partial_\theta + \frac{\sin\phi}{\sin\theta}\partial_\psi, \quad \xi_3 = -\cot\theta\cos\phi\partial_\phi - \sin\phi\partial_\theta + \frac{\cos\phi}{\sin\theta}\partial_\psi,$$
$$\eta_1 = -\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\partial_\phi + \sin\psi\partial_\theta + \cos\psi\cot\theta\partial_\psi, \quad \eta_2 = -\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\partial_\phi - \cos\psi\partial_\theta + \sin\psi\cot\theta\partial_\psi, \quad \eta_3 = -\partial_\psi.$$

Каждая невырожденная целочисленная К-орбита группы $SO(3)$ проходит через ковектор $\lambda(j) = (j, 0, 0)$, где $j = 1, 2, 3, \ldots$, и представляет собой двумерную сферу радиуса j^2 с центром в точке $(0, 0, 0)$. Комплексной поляризации $\mathfrak{p} = \{e_1, e_2 + ie_3\}$ ковектора $\lambda(j)$ соответствуют операторы λ-представления

$$\ell_1(q, j) = -i(\sin(q)\partial_q - j\cos(q)), \quad \ell_2(q, j) = -i(\cos(q)\partial_q + j\sin(q)), \quad \ell_3(q, j) = \partial_q. \tag{40}$$

Операторы $-i\ell_X(q, j)$ эрмитовы относительно скалярного произведения

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_Q \overline{\psi_1(q)}\psi_2(q)d\mu(q), \quad d\mu(q) = \frac{(2j+1)!}{2^j(j!)^2}\frac{dq \wedge d\overline{q}}{(1 + \cos(q - \overline{q}))^{j+1}}.$$

Функции $D^\lambda_{q\overline{q'}}(g^{-1})$ имеют вид

$$D^j_{q\overline{q}'}(\phi, \theta, \psi) = \frac{2^j(j!)^2}{(2j)!}\Big(\sin\theta\cos\phi + \cos(\psi + \overline{q}')(\cos q\cos\phi - i\sin\phi) - i\sin\theta\cos q\sin\phi - \tag{41}$$
$$- i\cos\theta\sin q + \sin(\psi + \overline{q}')(-i\cos\theta\cos\phi - \cos\theta\cos q\sin\phi + \sin\theta\sin q)\Big)^j.$$

Функции (41) удовлетворяют условиям полноты и ортогональности относительно меры $d\mu(\lambda)$ и дельта-функции $\delta(q, \overline{q'})$ вида

$$\int_J (\cdot)d\mu(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)(\cdot), \quad \delta(q, \overline{q'}) = \frac{2^j(j!)^2}{(2j)!}\Big(1 + \cos(q - \overline{q'})\Big).$$

Используя выражение (41), для характера λ-представления получим $\chi(\lambda) = 2j + 1$. Вакуумные средние ТЭИ скалярного поля имеют вид

$$\langle\hat{\hat{T}}(\eta_0, \eta_0)\rangle_{ren} = a^{-2}(\tau)\epsilon[a(\tau)], \quad \epsilon[a(\tau)] = 2\operatorname{ren}\sum_{j=0}^{\infty}(j + 1/2)^2\Big(|f_j(\tau)|^2\omega^2(\tau) + |\dot{f}_j(\tau)|^2\Big), \tag{42}$$
$$\langle\hat{\hat{T}}(\eta_a, \eta_b)\rangle_{ren} = a^{-2}(\tau)p[a(\tau)]\delta_{ab},$$
$$p[a(\tau)] = \frac{1}{3}\left(\epsilon[a(\tau)] - 4m^2a^2(\tau)\operatorname{ren}\sum_{j=0}^{\infty}\left(j + \frac{1}{2}\right)^2|f_j(\tau)|^2\right),$$

где $\omega^2(\tau) = (j+\frac{1}{2})^2 + a^2(\tau)m^2$. Выражения (42) позволяют рассчитать эффект поляризации вакуума скалярного поля для данной нестационарной метрики в пространстве $\tilde{M}$. Динамика самосогласованной космологической модели определяется уравнением (34):

$$-\frac{3}{4} - 3\dot{a}^2(\tau) + \Lambda a^2(\tau) = \frac{\kappa}{2} a^{-2}(\tau)\epsilon[a(\tau)]. \qquad (43)$$

Наиболее просто уравнение (43) решается для безмассового скалярного поля. Для него плотность энергии $\epsilon[a(\tau)]$ не зависит от масштабного фактора $a(\tau)$ и равна

$$\epsilon[a(\tau)]|_{m=0} = 2\,\mathrm{ren}\sum_{j=0}^{\infty}\left(j+\frac{1}{2}\right)^3 = -i\int_0^{\infty}\frac{(it)^3-(-it)^3}{\exp(2\pi t)+1}dt = -\frac{7}{480},$$

где для перенормировки расходящегося выражения мы применили формулу Абеля–Плана [Гриб, Мамаев, 1988]. Уравнение (43) допускает решение с нулевой космологической постоянной Λ:

$$a^2(\tau)|_{m=0} = \frac{7\kappa}{720}(1+\cos(\tau)), \quad \Lambda = 0. \qquad (44)$$

Решение вида (44) описывает самосогласованную космологическую модель, сжатие и расширение которой возникают в результате эффекта поляризации вакуума безмассового скалярного поля, обусловленного, в свою очередь, нетривиальной топологией и кривизной пространства. Причем в силу конформной эквивалентности безмассового скалярного поля на эффект поляризации вакуума не влияет зависимость метрики от времени.

Заключение

В данной работе показано, что вакуумные средние ТЭИ скалярного поля определяются характером λ-представления группы Ли и решением уравнения осциллятора с переменной частотой, которая определяется зависимостью метрики от времени. Для безмассового скалярного поля вакуумные средние ТЭИ (32) пропоциональны метрическому тензору биинвариантной метрики и след перенормированного ТЭИ равен нулю, что говорит об отсутствии конформной аномалии [Гриб, Мамаев, 1988]. Важной особенностью полученных выражений для вакуумных средних ТЭИ является то, что уравнения Эйнштейна удовлетворяют условиям совместности. Откуда следует, что если возможно проинтегрировать уравнение (34), то его решение будет описывать самосогласованную космологическую модель, динамика которой определяется плотностью энергии вакуума квантового скалярного поля. Для группы вращений $SO(3)$ динамика самосогласованной модели, обусловленной поляризацией вакуума безмассового скалярного поля, имеет вид (44).

Список литературы

Барановский С. П., Широков И. В. Продолжения векторных полей на группах Ли и однородных пространствах // Теоретическая и математическая физика. — 2003. — № 1. — С. 70–81.

Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. Т. 1. — М. : Мир, 1980. — 456 с.

Биррелл Н., Девис В. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. — М. : Мир, 1984. — 356 с.

Бреев А. И., Широков И. В., Разумов Н. Поляризация вакуума скалярного поля на многообразии, конформно эквивалентном RxG // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2007. — № 10. — С. 50–56.

Бреев А. И. Поляризация вакуума скалярного поля на неунимодулярных группах Ли // Известия высших учебных заведений. Физика. — 2010. — № 4. — С. 34–40.

Гриб А. А., Мамаев С. Г., Мостепаненко В. М. Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. — М. : Атомиздат, 1988. — 288 с.

Кириллов А. А. Элементы теории представлений. — М. : Наука, 1978. — 344 с.

Ellis G., MacCallum M. A Class of Homogeneous Cosmological Models // Commun. math. Phys. — 1969. — 12. — P. 108–141.