

УДК: 519.633

## Об аналитико-численном методе моделирования процессов теплопередачи в $p$ -мерных областях сложной геометрии

Е. А. Канунникова

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

E-mail: eakanunnikova@gmail.com

Получено 5 августа 2014 г.,  
после доработки 14 февраля 2015 г.

На основе аналитико-численного метода проводится численное моделирование  $p$ -мерных процессов теплопередачи в областях сложной геометрии, для которых применение традиционных методов затруднено. С помощью предлагаемого метода модель преобразуется к виду, удобному для численного исследования с применением традиционных методов численного анализа. Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие эффективность предлагаемого метода. Проводится сравнительный анализ полученных результатов, вычислительных результатов других авторов и аналитических зависимостей ряда методов, позволяющих найти точное решение для некоторых классов задач.

Ключевые слова: аналитико-численный метод, численное моделирование, теплопередача, неограниченная область

## On an analytic-numerical method to simulate heat transfer process on $p$ -dimensional complex geometry domains

E. A. Kanunnikova

Belgorod State National Research University, 85 Pobeda street, Belgorod, 308015, Russia

**Abstract.** — The article presents an analytical-numerical method to simulate  $p$ -dimensional heat transfer processes on complex geometry domains when conventional methods are not applicable. The model is converted by the proposed method so that conventional numerical analysis methods is applied to the numerical research. The results of numerical experiments are given to demonstrate the effectiveness of the proposed method. The obtained results, other authors' numerical results and exact analytical solutions, known for a class of problems, is compared.

Keywords: analytical-numerical method, simulation, heat transfer, unbounded domain

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 865–873 (Russian).

## Введение

При изучении процессов теплопередачи возникают задачи (например, об охлаждении тела, помещенного в среду), которые описываются дифференциальными уравнениями, и (поскольку температура при удалении от тела стремится к температуре среды) граничные условия ставятся непосредственно в бесконечности.

Решаются подобные задачи аналитически и численно. При использовании строгих аналитических методов зачастую возникают существенные трудности: полученные решения часто имеют сложный и громоздкий вид; кроме того, в отдельных случаях строгие решения задач получить вообще невозможно. Следует отметить, что только численными методами моделирования решаются многомерные задачи и задачи в областях сложной геометрии.

При численном моделировании упомянутые ограничения не возникают, между тем появляется сложность другого рода: исходная область является бесконечно большой, поэтому требуется перейти к некоторой конечной расчетной области. Для решения этой проблемы существует два класса подходов: усекают исходную область или решают задачу непосредственно в неограниченной области. Примерами первого класса подходов являются искусственные граничные условия [Han, Huang, 2002; Wua, Sun, 2004; Рябенский, 2002; Tsynkov, 1998], точно согласующиеся слои [Ying, 2006; Bermudez et al., 2010] и др. Построение высокоточных граничных условий или слоев производится для каждого круга задач отдельно, причем обеспечение высокой точности приводит к значительным вычислительным затратам при практической реализации. Следует подчеркнуть, что высокая точность при ограничении объема вычислений и памяти — это одно из основных требований, предъявляемых к численным моделям.

Альтернативный подход представляют методы, решающие задачу непосредственно в неограниченной области и не использующие дополнительные слои или граничные условия для учета условия на бесконечности, например, метод вычислений на квазиравномерных сетках [Калиткин и др., 2005; Альшина и др., 2002]. Сетки  $\omega_K = x_m = x(m/K)$ ,  $0 \leq m \leq K$  на  $[l_1, l_2]$  называют квазиравномерными [Альшина и др., 2002], если задано строго монотонное достаточно гладкое преобразование  $x(\xi)$ ,  $\xi \in [0, 1]$ ,  $x \in [l_1, l_2]$ . В неограниченной области строятся квазиравномерные сетки таким образом, что сетка охватывает бесконечную область при конечном числе интервалов. Метод единообразно применим к различным классам задач.

Класс методов, решающих задачу непосредственно в неограниченной области, в настоящее время интенсивно расширяется и развивается. Метод, предлагаемый в данной работе, позволяет учитывать точные граничные условия на бесконечности, не усекая исходную неограниченную область. Метод базируется на построении из неограниченной области ограниченной двусоставной области, часть которой является образом при конформном отображении. При этом ему присущи элементы как численных, так и аналитических подходов. В данной работе результаты предлагаемого метода сопоставляются с результатами аналитических методов и результатами численных методов, решающих задачу непосредственно в неограниченной области.

## Постановка задачи

При рассмотрении группы физических задач, характеризующих процессы переноса тепла в среде, начально-краевая задача в неограниченной области  $\mathbb{R}^p$ ,  $p = 1, 2, 3$ , ставится следующим образом:

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F, \quad (M, t) \in \overline{\Omega}_p = \overline{\mathbb{R}^p} \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(M, 0) = u_0(M), \quad M \in \overline{\mathbb{R}^p}, \quad (2)$$

$$\alpha(M) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(M)u = \mu(M, t), \quad M \in \Sigma, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

где  $M = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_p)$  — точка  $p$ -мерного евклидова пространства  $\mathbb{R}^p = \overline{G} \cup \Sigma \cup \overline{\mathbb{R}^p}$ ,  $\overline{G}$  — область произвольной формы, ограниченная замкнутой криволинейной поверхностью  $\Sigma$ ,  $\alpha^2(M) + \beta^2(M) > 0$ ,  $F(M, t)$ ,  $c(M)$ ,  $\rho(M)$ ,  $k(M)$ ,  $u_0(M)$ ,  $\mu(M, t)$ ,  $\alpha(M)$ ,  $\beta(M)$  — заданные функции.

Следует также задавать граничные значения  $u(M, t)$  на бесконечности. Пусть для определенности

$$\text{при } p = 1 \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} u(M, t) = N, \quad \text{при } p > 1 \quad \lim_{\sum_{\eta=1}^p \dot{x}_\eta^2 \rightarrow \infty} u(M, t) = N. \quad (4)$$

## Описание метода

Идеи, эффективно применявшиеся для решения задач о стационарном распределении тепла [Канунникова, 2014], в данной работе соответствующим образом модифицируются и развиваются. Пусть  $D_S$  — область, ограниченная замкнутой поверхностью  $S$  (при этом поверхность  $\Sigma$  лежит внутри  $S$  и  $D_S = \overline{G} \cup \Sigma \cup G_S$ ),  $D_\infty$  — неограниченная область, границей которой является поверхность  $S$ , так что  $\mathbb{R}^p = D_S \cup S \cup D_\infty$ . Область, ограниченную простым контуром, можно отобразить конформно на другую область, также ограниченную простым контуром, используя многомерные аналоги конформных отображений областей [Сычев, 1983; Genger, 1930; Лаврентьев, 1946]. Итак, используя конформное отображение второго рода, например, многомерный аналог общего дробно-линейного отображения, неограниченная область  $\mathbb{R}^p = D_S \cup S \cup D_\infty$  преобразуется в ограниченную двусоставную область  $D_p = D_S \cup S \cup D^*$  [Канунникова, 2014], где область  $D^*$  представляет собой образ неограниченной области  $D_\infty$  при конформном отображении. При этом отображение переводит бесконечно удаленную точку в точку  $\overline{P} \in D^*$ ,  $D^* = G^* \cup \overline{P}$ . В областях специальной формы удобнее пользоваться не декартовыми координатами, а соответствующими криволинейными. Это позволяет получить наилучшую аппроксимацию вблизи границы и повышает фактическую точность расчета. Среди криволинейных систем координат выбираются наиболее широко используемые в вычислительной практике криволинейные ортогональные системы координат. Так, если границу  $S$  принять соответственно круглой или шарообразной формы, перейти к полярным координатам (в трехмерном случае — к сферическим) и ввести сетку, например, прямоугольную, то пересечения линий сетки лягут на границу  $S$ . Таким образом, для  $p$ -мерной области сложной геометрии  $\mathbb{R}^p$  граничные условия на бесконечности на сетке удовлетворяются точно.

Итак, начально-краевая задача (1)–(4) принимает следующий вид

$$c\rho u_t = \text{div}(k \text{grad } u) + F, \quad (M, t) \in \overline{Q}_p = \overline{D}_p \times (0, T], \quad \overline{D}_p = G_S \cup S \cup G^*, \quad (5)$$

$$u(M, 0) = u_0(M), \quad M \in \overline{D}_p, \quad (6)$$

$$\alpha(M) \sum_{\eta=1}^p \cos(n, \dot{x}_\eta) \frac{\partial u}{\partial \dot{x}_\eta} + \beta(M)u = \mu(M, t), \quad M \in \Sigma, t \in [0, T]. \quad (7)$$

$$u(\overline{P}, t) = N, \quad \overline{P} \in D^*, t \in [0, T], \quad (8)$$

где  $\cos(n, \dot{x}_\eta)$ ,  $\eta = 1, 2, \dots, p$  — направляющие косинусы внешней нормали.

В дальнейшем в качестве базовых рассматриваются задачи нестационарной теплопроводности в неоднородной среде (предлагаемый метод может применяться к задачам как в изотропных, так и в анизотропных средах), при этом  $k$  является скаляром, коэффициенты и правая часть уравнения (5) зависят от точки пространства, уравнение теплопроводности является линейным параболическим уравнением второго порядка и записывается следующим образом:

$$u_t = Lu + f \quad \text{в } \overline{Q}_p, \quad (9)$$

где

$$Lu = \sum_{\eta=1}^p L_{\eta}u, \quad L_{\eta}u = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x_{\eta}} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\eta}} \right), \quad f = \frac{F}{c\rho}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \overline{D}_p,$$

причем при  $p = 1$

$$L_1u = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right),$$

при  $p = 2$

$$L_1u = \frac{1}{c\rho x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( x_1 k(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \quad L_2u = \frac{1}{c\rho x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right),$$

при  $p = 3$

$$L_1u = \frac{1}{c\rho x_1^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( k(x) x_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \quad L_2u = \frac{1}{c\rho x_1^2 \sin^2 x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad L_3u = \frac{1}{c\rho x_1^2 \sin x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( k(x) \sin x_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \right).$$

В  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  начальное условие (6) записывается в следующем виде

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{D}_p. \quad (10)$$

Для начально-краевой задачи (7)–(10) строится разностная задача с использованием традиционных приемов и методов численного анализа [Самарский, 1977]. Для применения классического разностного метода в области  $D_p = \overline{G} \cup \Sigma \cup \overline{D}_p \cup \overline{P}$  строится сетка  $\overline{\omega}_h$ . Являясь отчасти аналитическим, предлагаемый метод не накладывает ограничений ни на временную сетку, ни на пространственную сетку, которая может быть эйлеровой, лагранжевой и др. Тем не менее, структура пространственной сетки может быть выбрана так, чтобы упростить численную аппроксимацию задачи, например, на границе  $S$  и  $\overline{P}$ , как показано выше, краевое условие аппроксимируется точно.

При численном решении краевых задач в расчетной области сложной формы используются различные разностные схемы. В работах [Мажукин и др., 2001; Самарский и др., 1999; Самарский и др., 1996] рассмотрены схемы повышенного порядка аппроксимации на неравномерных сетках с использованием стандартных шаблонов для стационарных и нестационарных задач с переменными коэффициентами, доказана сходимость со вторым порядком по пространству в более сильных, чем известные в теории разностных схем [Самарский, 1977], нормах. Предложенные А. А. Самарским разностные схемы вырождаются в случае равномерной сетки узлов в известную консервативную разностную схему [Самарский, 1977; Самарский, 2003].

Для упрощения изложения, без ограничения общности, из семейства эйлеровых сеток выбирается ортогональная сетка с шагами  $h_{\eta}, \eta = 1, 2, \dots, p$ , которая состоит из узлов регулярной сетки (внутренние узлы) и дополнительных нерегулярных граничных узлов  $x \in \Sigma$ , лежащих на криволинейной границе области  $D_p$ . Множество  $\omega_h$  внутренних узлов сетки состоит из точек  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \overline{D}_p$  пересечения гиперплоскостей (плоскостей при  $p = 3$ , прямых при  $p = 2$ )  $x_{\eta} = i_{\eta} h_{\eta}, i_{\eta} = 0, 1, 2, \dots, \eta = 1, 2, \dots, p$ , а множество  $\gamma_h = \gamma_{\Sigma, h} + \gamma_{\overline{P}, h}$  граничных узлов — из точек пересечения  $C_{\eta}, \eta = 1, 2, \dots, p$ , проходящих через все внутренние узлы  $x \in \omega_h$ , с границами  $\Sigma$  и  $\overline{P}$ . При этом пересечение  $C_{\eta}$  и области  $\overline{D}_p$  состоит из одного интервала  $\Delta_{\eta}$ . Вводятся обозначения:  $\gamma_{h, \eta}$  — множество граничных по направлению  $x_{\eta}$  узлов,  $\gamma_h$  — множество всех граничных узлов  $x \in \Sigma \cup \overline{P}$ ,  $\omega_{h, \eta}^*$  — множество приграничных по направлению  $x_{\eta}$  узлов, причем расстояние

от узла до границы  $\gamma_{h,\eta}$  есть  $h_{\eta}^* < h_{\eta}$  (множество нерегулярных узлов),  $\omega_h^*$  — множество всех приграничных узлов,  $\omega_h^{\circ}$  — множество всех строго внутренних узлов (множество регулярных узлов),  $\omega_h = \omega_h^* + \omega_h^{\circ}$ . Множество внутренних и граничных узлов образуют связную сетку  $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$  в области  $D_p$ .

Для разностной аппроксимации оператора  $L_{\eta}$  в узле  $x$  выбирается трехточечный шаблон [Самарский, 1977], состоящий из точек  $x^{(-1_{\eta})}, x^{(0_{\eta})}, x^{(+1_{\eta})}$ . Разностный оператор  $\Lambda_{\eta} \sim L_{\eta}$  имеет вид:

а) в регулярных узлах

$$\Lambda_{\eta} v = b^{(0_{\eta})} \frac{a^{(+0,5_{\eta})} v_{x_{\eta}} - a^{(-0,5_{\eta})} v_{\bar{x}_{\eta}}}{h_{\eta}} = \frac{b^{(0_{\eta})}}{h_{\eta}} \left( a^{(+0,5_{\eta})} \frac{v^{(+1_{\eta})} - v^{(0_{\eta})}}{h_{\eta}} - a^{(-0,5_{\eta})} \frac{v^{(0_{\eta})} - v^{(-1_{\eta})}}{h_{\eta}} \right), \quad (11)$$

$$v_{\bar{x}_{\eta}} = \frac{v^{(0_{\eta})} - v^{(-1_{\eta})}}{h_{\eta}}, \quad v_{x_{\eta}} = \frac{v^{(+1_{\eta})} - v^{(0_{\eta})}}{h_{\eta}},$$

где  $a^{(\pm 0,5_{\eta})} = \check{k}_{m\eta}(x^{(\pm 0,5_{\eta})}) k_{\eta}(x^{(\pm 0,5_{\eta})})$ ,  $x^{(-0,5_{\eta})} = (x_1, \dots, x_{\eta-1}, x_{\eta} - 0,5h_{\eta}, x_{\eta+1}, \dots, x_p)$ ,  $b^{(0_{\eta})} = q_{m\eta}(x^{(0_{\eta})})$ ,

$$q_{1,1} = \frac{1}{c\rho}, \quad q_{2,\eta} = \begin{cases} 1/(c\rho x_1) & \text{при } \eta = 1, \\ 1/(c\rho x_1^2) & \text{при } \eta = 2, \end{cases} \quad q_{3,\eta} = \begin{cases} 1/(c\rho x_1^2) & \text{при } \eta = 1, \\ 1/(c\rho x_1^2 \sin^2 x_3) & \text{при } \eta = 2, \\ 1/(c\rho x_1^2 \sin x_3) & \text{при } \eta = 3, \end{cases}$$

$$\check{k}_{1,1} = 1, \quad \check{k}_{2,\eta} = \begin{cases} x_1 & \text{при } \eta = 1, \\ 1 & \text{при } \eta = 2, \end{cases} \quad \check{k}_{3,\eta} = \begin{cases} x_1^2 & \text{при } \eta = 1, \\ 1 & \text{при } \eta = 2, \\ \sin x_3 & \text{при } \eta = 3, \end{cases}$$

б) в нерегулярных узлах

$$\Lambda_{\eta} v = \frac{b^*}{\bar{h}_{\eta}} \left( a^{(+0,5_{\eta})} \frac{v^{(+1_{\eta})} - v^{(0_{\eta})}}{h_{\eta+}^*} - a^{(-0,5_{\eta})} \frac{v^{(0_{\eta})} - v^{(-1_{\eta})}}{h_{\eta-}^*} \right), \quad (12)$$

$$v_{\bar{x}_{\eta}} = \frac{v^{(0_{\eta})} - v^{(-1_{\eta})}}{h_{\eta-}^*}, \quad v_{\hat{x}_{\eta}} = \frac{v^{(+1_{\eta})} - v^{(0_{\eta})}}{h_{\eta+}^*}, \quad v_{\hat{\bar{x}}_{\eta}} = \frac{v^{(+1_{\eta})} - v^{(0_{\eta})}}{\bar{h}_{\eta}},$$

где  $\bar{h}_{\eta} = 0,5(h_{\eta-}^* + h_{\eta+}^*)$ ,  $h_{\eta\pm}^*$  — расстояние между  $x^{(0_{\eta})}$  и  $x^{(\pm 1_{\eta})}$  ( $h_{\eta\pm}^* \leq h_{\eta}$ ), если  $x^{(\pm 1_{\eta})} \in \omega_h^{\circ}$ , то  $h_{\eta\pm}^* = h_{\eta}$ . Простейшими выражениями для  $b^*$  являются следующие:  $b^* = q_{m\eta}(x^{(0_{\eta})})$  или  $b^* = (h_{\eta+}^* q_{m\eta}(x^{(+1_{\eta})}) + h_{\eta-}^* q_{m\eta}(x^{(-1_{\eta})})) / (2\bar{h}_{\eta})$ .

Каждый из операторов  $\Lambda_{\eta}, \eta = 1, 2, \dots, p$  в аддитивном представлении  $\Lambda = \sum_{\eta=1}^p \Lambda_{\eta}$  является одномерным. Пользуясь методом суммарной аппроксимации, нетрудно построить экономичные аддитивные схемы для параболических уравнений в произвольной области, например, локально-одномерную схему [Самарский, 1977] в  $p$ -мерной области сложной формы.

На отрезке  $0 \leq t \leq T$  вводится сетка  $\bar{\omega}_{\tau} = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$  с шагом  $\tau = T/j_0$ . Пусть  $f_{\eta}$  — произвольные функции такие, что  $\sum_{\eta=1}^p f_{\eta} = f$ .

Аппроксимируя  $\eta$ -е уравнение теплопроводности на полуинтервале  $t_{j+(\eta-1)/p} < t \leq t_{j+\eta/p}$  двухслойной схемой с весами, получаем цепочку  $n$  одномерных схем:

$$\frac{v^{j+\eta/p} - v^{j+(\eta-1)/p}}{\tau} = \Lambda_{\eta} \left( \sigma_{\eta} v^{j+\eta/p} + (1 - \sigma_{\eta}) v^{j+(\eta-1)/p} \right) + \phi_{\eta}^{j+\eta/p}, \quad \eta = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \omega_h, \quad (13)$$

где  $t_{j+\eta/p} = (j + \eta/p)\tau$ ,  $\phi_\eta^{j+\eta/p} = f_\eta(x, t_{j+\eta/p})$ ,  $\sigma_\eta$  — произвольное число. Разностная производная по времени аппроксимирует  $u_t$  с первым порядком точности по  $\tau$  при  $\sigma_\eta \equiv 0$ ,  $\sigma_\eta \equiv 1$  и со вторым порядком по  $\tau$  при  $\sigma_\eta \equiv 0,5$ . Поскольку схема (13) двуслойная, то она без изменения переносится на неравномерную сетку по  $t$  [Калиткин, 2011]. При  $\sigma_\eta \equiv 1$  неявная локально-одномерная схема имеет вид

$$\frac{v^{j+\eta/p} - v^{j+(\eta-1)/p}}{\tau} = \Lambda_\eta v^{j+\eta/p} + \phi_\eta^{j+\eta/p}, \quad \eta = 1, 2, \dots, p, \quad x \in \omega_h. \quad (14)$$

К уравнению (14) при  $\mu^{j+\eta/p} = \mu(x^{(0)_\eta}, t_{j+\eta/p})$  следует присоединить краевые условия

$$v^{j+\eta/p} = N \text{ при } x^{(0)_\eta} \in \gamma_{\bar{P},h,\eta}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad \eta = 1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

$$\alpha \tilde{v}_{x_\eta}^{j+\eta/p} + \beta v^{j+\eta/p} = \mu^{j+\eta/p} \text{ при } x^{(0)_\eta} \in \gamma_{\Sigma,h,\eta}$$

и начальное условие

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad (16)$$

причем

$$\tilde{v}_{x_\eta} = \sum_{\eta=1}^p \cos(n, \hat{x}_\eta) v_{\hat{x}_\eta}, \quad v_{\hat{x}_\eta} = \begin{cases} v_{\hat{x}_\eta}, & x^{(-1)_\eta} \in \omega_h^*, \\ v_{\hat{x}_\eta}, & x^{(+1)_\eta} \in \omega_h^*, \end{cases}$$

тем самым аппроксимируя с первым порядком граничное условие (7).

Пусть известно  $v^j$ . Чтобы найти из (14), (15) значение  $v^{j+1}$  на новом слое, необходимо решить  $n$  уравнений (14) с краевым условием (15), последовательно полагая  $\eta = 1, 2, \dots, p$ . Разностное уравнение для определения  $v^{j+\eta/p}$  пишется вдоль отрезка  $\Delta_\eta$ , лежащего на  $C_\eta$ ; концы этого отрезка принадлежат границе  $\gamma_{h,\eta}$ . Разностное уравнение решается методом прогонки вдоль всех отрезков  $\Delta_\eta$  при фиксированном  $\eta$ . При этом затрачивается число арифметических операций, пропорциональное числу узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ . Полагая последовательно  $\eta = 1, 2, \dots, p$  и меняя направления прогонок, определяются  $v^{j+1/p}, v^{j+2/p}, \dots, v^{j+\eta/p}, \dots, v^{j+1}$ , затратив при этом  $O(1)$  операций на узел действий.

Следует выделить два момента. Во-первых (поскольку предлагаемому методу присущи элементы аналитических подходов), значения во всех точках  $p$ -мерной двусоставной области  $Q_p = D_p \times [0, T]$  характеризуют распределение температуры в заданной неограниченной области  $\Omega_p = \mathbb{R}^p \times [0, T]$ , кроме того, все узлы сетки  $\bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_h$ , построенной в  $Q_p$ , используются при расчете задачи, а значения в этих узлах — при анализе результатов вычислительных экспериментов. Во-вторых (поскольку предлагаемому методу присущи элементы численных подходов),  $p$ -мерные задачи решаются по аналогии с одномерными, а геометрия тела (как одного, так и нескольких), поверхность которого задается границей  $\Sigma$ , может быть произвольной, сложной. Возможность применения предлагаемого метода для решения задач с границей  $\Sigma$  произвольной, не обязательно правильной формы является чрезвычайно важным для приложений. В литературе геометрическая универсальность метода, то есть его применимость к реальным системам, а не только специально подобранным модельным, отмечается как одно из необходимых условий общей эффективности и практической ценности метода.

## Численные примеры

Для метода, предлагаемого в данной работе, в качестве тестовых рассматривается несколько задач, имеющих аналитическое решение, и проводится сравнение аналитических зависимостей, результатов вычислительных экспериментов, полученных предлагаемым методом, вычислительных результатов других авторов для уравнения теплопроводности при постоянных коэффициентах  $k, c, \rho$ .

ПРИМЕР 1. Для задачи (1)–(4) при  $a^2 = k/c\rho = 0,25$ ,  $u_0(x) = \exp(-x^2) \sin x$ ,  $f \equiv 0$ ,  $\alpha \equiv 0$ ,  $\beta \equiv 1$ ,  $\mu \equiv 0$  решение представляется в виде [Боголюбов, Кравцов, 1998]

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} \exp\left(-\frac{4x^2+t}{4(1+t)}\right) \sin \frac{x}{1+t}. \quad (17)$$

Расчет задачи (7)–(10) предлагаемым методом производился при  $T = 9,5$ , шаг по  $t$   $\tau = 0,5$ , шаг по  $x$   $h = 0,5$ . Средняя относительная погрешность отклонения приближенного решения от точного (17) в различные моменты времени равна 0,83 %.

ПРИМЕР 2. В работе [Калиткин и др., 2005] рассматривается случай  $a^2 = 1$ ,  $u_0(x) = \exp(-x^2)$ ,  $f \equiv 0$  для задачи (1)–(4) при  $\alpha \equiv 1$ ,  $\beta \equiv 0$ ,  $\mu \equiv 0$ , решение которой представляется в следующем виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \exp\left(-\frac{x^2}{1+4t}\right). \quad (18)$$

Зная аналитическое решение задачи, легко оценить и сопоставить численные методы моделирования, для этого выбираются методы одного класса (численно решающие задачу непосредственно в неограниченной области). Метод вычислений на квазиравномерных сетках [Калиткин и др., 2005; Альшина и др., 2002], как и метод, предлагаемый в данной работе, использует точные граничные условия на бесконечности в общем случае для одномерных, двумерных и трехмерных областей, является простым в реализации.

На рис. 1, 2 приведены профили температуры в моменты времени  $t = 1,0, 2,0, 5,0, 7,0$ , полученные по аналитической зависимости (18), численным результатам, представленным в [Калиткин и др., 2005], и результатам предлагаемого метода.

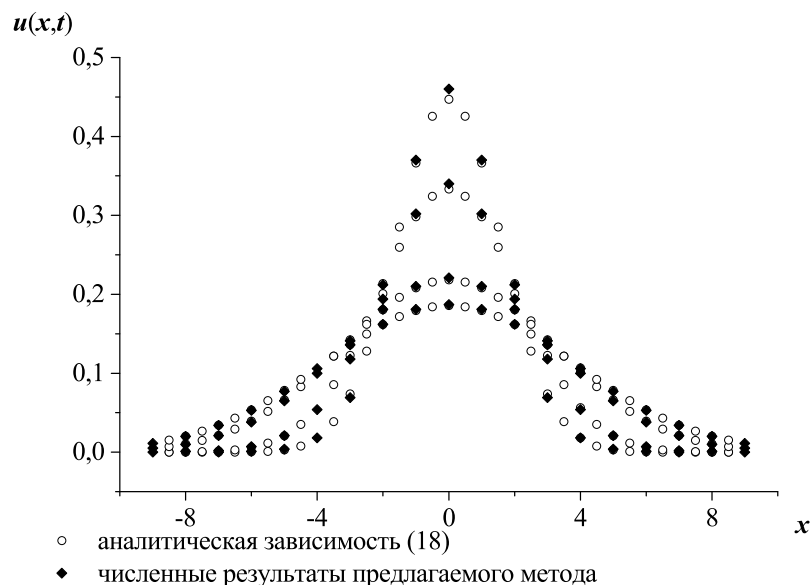


Рис. 1. Профили температуры по (18) и по предлагаемому методу

Расчет задачи (7)–(10) по предлагаемому аналитико-численному методу проводился при  $T = 9,5$ ,  $\tau = 0,5$ ,  $h = 1$ , средняя относительная погрешность составляла 2,67 %. Хотя квазиравномерная сетка [Калиткин и др., 2005] по пространственной координате являлась наиболее

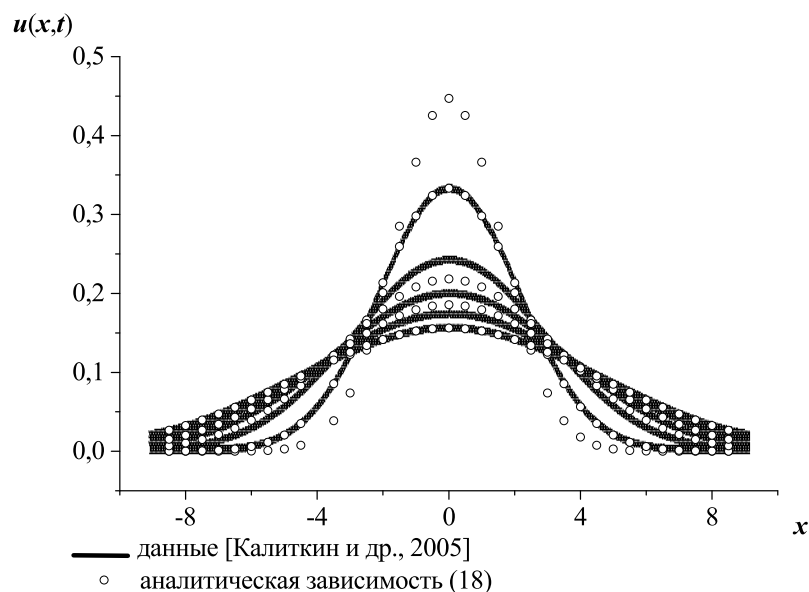


Рис. 2. Профили температуры по (18) и по методу квазиравномерных сеток

густой вблизи точки  $x = 0$ , тем не менее погрешность вычислений на квазиравномерной сетке в начальные моменты времени (рис. 2) велика по сравнению с полученными на равномерной сетке численными результатами по предлагаемому методу (рис. 1).

## Заключение

Разработан метод для решения  $p$ -мерных задач теплопередачи в областях сложной геометрии, для которых применение традиционных методов затруднено.

С использованием предлагаемого метода модель процесса теплопередачи преобразуется к виду, удобному для численного исследования с применением традиционных методов численного анализа.

Предлагаемый метод единообразно применим к широкому классу задач, характеризуется вычислительной эффективностью и простотой реализации.

Результаты вычислительных экспериментов хорошо согласуются с немногочисленными аналитическими решениями и показывают более высокую точность предлагаемого метода по сравнению с методами того же класса.

Задачу, приведенную к виду, удобному для численного решения по предлагаемому методу, легко распараллелить и проводить суперкомпьютерное моделирование нестационарных процессов теплопередачи на новых высокопроизводительных системах.

В дальнейших исследованиях планируется оценить применимость предлагаемого метода к задачам нестационарной теплопроводности в анизотропных средах.

## Список литературы

- Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Панченко С. Л. Численное решение краевых задач в неограниченной области // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14, № 11. — С. 10–22.



- Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Задачи по математической физике. — М. : Изд-во МГУ, 1998. — 350 с.
- Калиткин Н. Н. Численные методы. — СПб. : БХВ-Петербург, 2011. — 582 с.
- Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Rogov B. B. Вычисления на квазиравномерных сетках. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 224 с.
- Канунникова Е. А. Аналитико-численный метод решения трехмерных внешних краевых задач для эллиптических уравнений // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. — 2014. — № 1 (189). — С. 35–38.
- Лаврентьев М. А. Конформные отображения. — М.–Л. : Гостехиздат, 1946. — 160 с.
- Мажукин В. И., Малафеев Д. А., Матус П. П., Самарский А. А. Разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений математической физики с переменными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 3. — С. 407–419.
- Рябенский В. С. Метод разностных потенциалов и его приложения. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 432 с.
- Самарский А. А. Теория разностных схем. — М. : Наука, 1977. — 656 с.
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
- Самарский А. А., Вабищевич П. Н., Матус П. П. Разностные схемы повышенного порядка точности на неравномерных сетках // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 2. — С. 265–274.
- Самарский А. А., Мажукин В. И., Малафеев Д. А., Матус П. П. Повышение точности разностных схем на неравномерных по пространству сетках // Доклады академии наук. — 1999. — Т. 367, № 3. — С. 310–313.
- Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. — Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1983. — 214 с.
- Bermudez A., Hervella-Nieto L., Prieto A., Rodriguez R. Perfectly Matched Layers for Time-Harmonic Second Order Elliptic Problems // Archives of Computational Methods in Engineering. — 2010. — Vol. 17, Iss. 1. — P. 77–107.
- Han H., Huang Z. Exact and approximating boundary conditions for the parabolic problems on unbounded domains // Computers and Mathematics with Applications. — 2002. — Vol. 44, Iss. 5–6. — P. 655–666.
- Genger J. J. Mapping of a general type of three-dimensional region on a sphere // Amer. J. of Mathem. — 1930. — Vol. 52, Iss. 2. — P. 197–221.
- Tsynkov S. V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Applied Numerical Mathematics. — 1998. — Vol. 27, Iss. 4. — P. 465–532.
- Wua X., Sun Z. Convergence of difference scheme for heat equation in unbounded domains using artificial boundary conditions // Applied Numerical Mathematics. — 2004. — Vol. 50, Iss. 2. — P. 261–277.
- Ying L. Numerical methods for exterior problems. — Peking : World Scientific Pub. Co. Inc., 2006. — 280 p.