**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 4 С. 821–833**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9

Нелинейная матричная краевая задача в случае параметрического резонанса

С. М. Чуйко[a], О. В. Несмелова (Старкова)[b], Д. В. Сысоев[c]

Донбасский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Г. Батюка, 19

E-mail: [a] chujko-slav@inbox.ru, [b] star-o@ukr.net, [c] sysoev92@mail.ru

*Получено 20 января 2015 г.,
после доработки 10 июня 2015 г.*

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений нелинейной матричной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса. Построена сходящаяся итерационная схема для нахождения приближений к решению нелинейной матричной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса. В качестве примера применения построенной итерационной схемы найдены приближения к решениями периодической краевой задачи для уравнения типа Риккати с параметрическим возмущением. Для контроля точности найденных приближений к решениям периодической краевой задачи для уравнения типа Риккати использованы невязки этих приближений.

Ключевые слова: нелинейная нетерова краевая задача, матричные дифференциальные уравнения, обобщенный оператор Грина, параметрический резонанс

Nonlinear boudary value problem in the case of parametric resonance

S. M. Chuiko, O. V. Nesmelova (Starkova), D. V. Sysoev

Donbass State Pedagogical University, 19 G. Batuka street, Donetsk region, Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. — We construct necessary and sufficient conditions for the existence of solution of seminonlinear matrix boundary value problem for a parametric excitation system of ordinary differential equations. The convergent iteration algorithms for the construction of the solutions of the semi-nonlinear matrix boundary value problem for a parametric excitation system differential equations in the critical case have been found. Using the convergent iteration algorithms we expand solution of seminonlinear periodical boundary value problem for a parametric excitation Riccati type equation in the neighborhood of the generating solution. Estimates for the value of residual of the solutions of the seminonlinear periodical boundary value problem for a parametric excitation Riccati type equation are found.

Keywords: seminonlinear boundary value problem, matrix differential equations, generalized Green's operator, parametric excitation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 821–833 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины. Номер государственной регистрации 0112U0000372.

Традиционное изучение периодических и нетеровых краевых задач в критических случаях было связано с предположением, что дифференциальное уравнение, а также краевое условие, известны и фиксированы [Boichuk, Samoilenko, 2004; Гребеников, Рябов, 1979]; кроме того, изучение периодических задач в случае параметрического резонанса было связано с исследованием прежде всего вопросов устойчивости [Мандельштам, Папалекси, 1934; Шмидт, 1978; Якубович, Старжинский, 1987]. В то же время при изучении периодических краевых задач в случае параметрического резонанса, связанным с многочисленными приложениями в электронике [Мандельштам, Папалекси, 1934], геодезии [Люлько, 2012], теории плазмы [Силин, 1973], нелинейной оптике, механике [Болотин, 1956] и станкостроении [Копелев, 1984], наряду с нахождением решений периодических краевых задач требуется вычисление собственной функции соответствующего дифференциального уравнения. Таким образом, основным отличием данной статьи является изучение вопросов разрешимости нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от собственной функции краевой задачи. Используемая классификация нетеровых краевых задач в случае параметрического резонанса в зависимости от простоты или кратности уравнения для порождающих констант существенно отличается от аналогичной классификации периодических задач в случае параметрического резонанса [Шмидт, 1978; Якубович, Старжинский, 1987] и соответствует общей классификации периодических и нетеровых краевых задач [Boichuk, Samoilenko, 2004; Гребеников, Рябов, 1979].

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [Boichuk, Krivosheya, 2001]

$$Z(t,\varepsilon): \ Z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbf{C}^1[a;b], \quad Z(t,\cdot) \in \mathbf{C}[0;\varepsilon_0], \quad Z(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

матричного дифференциального уравнения

$$Z'(t,\varepsilon) = AZ(t,\varepsilon) + Z(t,\varepsilon)B + F(t,\varepsilon) + \varepsilon\, \Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{1}$$

подчиненных краевому условию

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}. \tag{2}$$

Решение матричной краевой задачи (1), (2) ищем в малой окрестности решения порождающей задачи

$$Z_0'(t,\varepsilon) = AZ_0(t,\varepsilon) + Z_0(t,\varepsilon)B + F(t,\varepsilon), \quad \mathcal{L}Z_0(\cdot,\varepsilon) = \mathcal{A}. \tag{3}$$

Здесь $A \in \mathbb{R}^{\alpha\times\alpha}$ и $B \in \mathbb{R}^{\beta\times\beta}$ — постоянные матрицы. Нелинейный матричный оператор

$$\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon): \ \mathbb{R}^{\alpha\times\beta} \to \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

предполагаем дифференцируемым в смысле Фреше [Канторович, Акилов, 1977, с. 636] по первому аргументу в малой окрестности решения порождающей задачи и непрерывно дифференцируемым по μ в малой окрестности решения порождающей задачи (2) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$. Нелинейность $\Phi(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ и неоднородность порождающей задачи $F(t,\varepsilon)$ считаем непрерывными по t на отрезке $[a,b]$ и по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Кроме того, $\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon)$ — линейный ограниченный матричный функционал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\varepsilon): \ \mathbf{C}^1[a;b] \to \mathbb{R}^{\delta\times\gamma}.$$

Вообще говоря, предполагаем $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \gamma$. Условия разрешимости и структура решения линейной дифференциальной системы (3) были приведены в монографии [Беллман, 1969]. Конструктивные условия разрешимости и структура периодического решения линейной дифференциальной системы (3) при условии $\alpha = \beta$ получены в статье [Boichuk, Krivosheya, 2001] с использованием обобщенного обращения матриц и операторов, описанного в статье [Boichuk, Krivosheya, 1998]. Таким образом, задача о построении решений матричного дифференциального уравнения (1), подчиненного краевому условию (2), является обобщением периодической задачи для матричного уравнения Риккати [Boichuk, Krivosheya, 2001], нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [Boichuk, Samoilenko, 2004; Boichuk, 1988; Бойчук, 1990], а также задачи Коши для матричного уравнения Бернулли [Деревенский, 2008, ч. 1; Деревенский, 2008, ч. 2].

Как известно [Беллман, 1969, с. 211], общее решение

$$W(t,\Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

задачи Коши

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(a) = \Theta$$

определяют $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные фундаментальные матрицы:

$$U'(t) = AU(t), \quad U(a) = I_\alpha, \quad V'(t) = BV(t), \quad V(a) = I_\beta.$$

Общее решение $Z(t) \in \mathbf{C}^1[a,b]$ задачи Коши [Boichuk, Krivosheya, 2001]

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B + F(t), \quad Z(a) = \Theta \tag{4}$$

имеет вид

$$Z(t,\Theta) = W(t,\Theta) + K\Big[F(s)\Big](t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

где

$$K\Big[F(s)\Big](t) := \int\limits_a^t U(t)U^{-1}(s)F(s)V(t)V^{-1}(s)\,ds$$

— оператор Грина задачи Коши для матричного уравнения (4). Подставляя общее решение матричного дифференциального уравнения (4) в краевое условие (2), приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\mathcal{L}Z(\cdot,\Theta) = \mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot) \tag{5}$$

относительно матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$. Обозначим $\Xi^{(j)} \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, $j = 1, 2, \dots \alpha\cdot\beta$ — естественный базис [Воеводин, Кузнецов, 1984] пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ и c_j — константы, определяющие разложение матрицы $\Theta \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, при этом

$$\mathcal{L}W(\cdot,\Theta) = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j, \quad \Theta = \sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\Xi^{(j)}c_j, \quad c_j \in \mathbb{R}^1, \quad j = 1, 2, \dots \alpha\cdot\beta.$$

Таким образом, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta} \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot)c_j = \mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)$$

относительно констант $c_j \in \mathbb{R}^1$. Определим оператор [Чуйко, 2014b; Чуйко, 2014a] $\mathcal{M}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{m\cdot n}$ как оператор, который ставит в соответствие матрице $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вектор-столбец $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$, составленный из n столбцов матрицы $\mathcal{B}$, а также обратный оператор

$$\mathcal{M}^{-1}\Big\{\mathcal{M}[\mathcal{B}]\Big\} : \mathbb{R}^{m\cdot n} \to \mathbb{R}^{m\times n},$$

который ставит в соответствие вектор-столбцу $\mathcal{M}[\mathcal{B}] \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$ матрицу $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Итак, приходим к линейному алгебраическому уравнению

$$Q \cdot c = \mathcal{M}\Big[\mathcal{A}\Big] - \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} \tag{6}$$

относительно вектора $c \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta}$, равносильному уравнению (5); здесь

$$Q := \Big[\ \mathcal{M}\Big[Q^{(1)}\Big]\ \ \mathcal{M}\Big[Q^{(2)}\Big] \ldots \mathcal{M}\Big[Q^{(\alpha\cdot\beta)}\Big]\ \Big], \quad Q^{(j)} := \mathcal{L}U(\cdot)\Xi^{(j)}V(\cdot) \in \mathbb{R}^{\beta\times\delta}.$$

Уравнение (6) разрешимо тогда и только тогда, когда [Boichuk, Samoilenko, 2004; Чуйко, 2014b; Чуйко, 2014a]

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{7}$$

Здесь P_{Q^*} — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\delta\cdot\gamma} \to \mathbb{N}(Q^*)$; матрица $P_{Q_d^*}$ составлена из d линейно независимых строк ортопроектора P_{Q^*} матрицы $Q \in \mathbb{R}^{\delta\cdot\gamma\times\alpha\cdot\beta}$. При условии (7) и только при нем общее решение уравнения (6)

$$c = Q^+\mathcal{M}\Big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\} + P_{Q_r}c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

определяет общее решение [Чуйко, 2014b; Чуйко, 2014a] матричного уравнения (5)

$$\Theta = \mathcal{M}^{-1}\Big\{Q^+\mathcal{M}\Big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big\}\Big\} + \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}c_r\Big],$$

которое, в свою очередь, определяет общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2)

$$Z(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t), \quad \Theta_r := \mathcal{M}^{-1}\Big[P_{Q_r}c_r\Big].$$

Здесь P_Q — ортопроектор: $\mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times\alpha\cdot\beta} \to \mathbb{N}(Q)$; матрица $P_{Q_r} \in \mathbb{R}^{\alpha\cdot\beta\times r}$ составлена из r линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q,

$$G\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t) := W\Big\{t, \mathcal{M}^{-1}\Big\{Q^+\mathcal{M}\Big[\mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s)\Big](\cdot)\Big]\Big\}\Big\} + K\Big[F(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина [Чуйко, 2014c] матричной краевой задачи (4), (2), Q^+ — псевдообратная (по Муру-Пенроузу) матрица [Boichuk, Samoilenko, 2004; Воеводин, Кузнецов, 1984]. Обозначим индексы

$$\Big\{j_1,\ j_2,\ \ldots\ j_r\Big\} \subseteq \Big\{1,\ 2,\ \ldots\ m\cdot n\Big\}$$

линейно независимых столбцов ортопроектора P_Q, при этом

$$W(t,\Theta_r) := \sum_{k=1}^{r} U(t)\cdot \Xi^{(j_k)} V(t)\cdot c_{j_k}, \quad \Theta_r \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

— общее решение матричного дифференциального уравнения (4), подчиненного краевому условию (2). При условии $P_{Q^*} \neq 0$ будем говорить, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом задача (3) разрешима лишь для тех неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$, для которых выполнено условие (7). В свою очередь, при условии $P_{Q^*} = 0$ для краевой задачи (3) имеет место некритический случай, при этом задача (3) разрешима для любых неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A}$. Условие разрешимости (7) является обобщением соответствующих условий [Boichuk, Samoilenko, 2004; Boichuk, 1988; Бойчук, 1990; Лаптинский, Маковецкий, 2005] на случай матричной краевой задачи (3) и может быть использовано в теории краевых задач [Boichuk, Samoilenko, 2004], а также в теории управления [Коробов, Бебия, 2014].

Условия разрешимости

Предположим, что для краевой задачи (3) имеет место критический случай, при этом условие (7) выполнено и задача (1), (2) в малой окрестности решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathcal{A}\Big](t)$$

порождающей задачи (3) имеет решение

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Таким образом, приходим к задаче о нахождении решения

$$X(t,\varepsilon): \quad X(\cdot,\varepsilon) \in \mathbf{C}^1[a,b], \quad X(t,\cdot) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0], \quad X(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

и собственной функции $\zeta(\varepsilon) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0]$ слабонелинейной матричной краевой задачи

$$X'(t,\varepsilon) = AX(t,\varepsilon) + X(t,\varepsilon)B + \varepsilon\,\Phi(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon), \quad \mathcal{L}X(\cdot,\varepsilon) = 0, \tag{8}$$

разрешимой тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)) + X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{9}$$

В силу непрерывности по Z и по μ нелинейной функции $\Phi(z,\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи (3) и начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ собственной функции $\mu(\varepsilon)$ приходим к следующему уравнению

$$\mathcal{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Необходимые условия существования решения матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая лемма, являющаяся обобщением соответствующих утверждений [Чуйко, Кулиш, 2012; Чуйко, Кулиш, 2013; Чуйко, Старкова, Кулиш, 2014].

Лемма. *Предположим, что для краевой задачи* (3) *имеет место критический случай, при этом выполнено условие разрешимости:*

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Предположим также, что в малой окрестности порождающего решения

$$Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) = W(t,\Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s,\varepsilon);\mathcal{A}\Big](t)$$

задача (1), (2) *имеет решение*

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad \Theta_0(0) := \Theta_0^* \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta},$$

для которого в достаточно малой окрестности начального значения собственной функции $\mu_0(\varepsilon)$ *существует непрерывная собственная функция*

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{F}(\Theta_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0. \tag{10}$$

По аналогии с нетеровыми слабонелинейными краевыми задачами в критическом случае [Boichuk, Samoilenko, 2004], а также периодическими краевыми задачами [Гребеников, Рябов, 1979] уравнение (10) будем называть уравнением для порождающих констант матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Корни уравнения для порождающих порождающих констант (10), в данном случае — матрицы $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, а также собственные функции $\mu_0(\varepsilon)$ определяют порождающее решение $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$, в малой окрестности которого могут существовать искомые решения исходной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса. Если же уравнение (10) не имеет корней

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \ \ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1, \ \ \Theta_0(\varepsilon), \ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0],$$

то исходная матричная краевая задача (1), (2) в случае параметрического резонанса не имеет искомых решений. Фиксируя одно из решений $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, уравнения для порождающих порождающих констант (10), а также собственную функцию $\mu_0(\varepsilon)$, приходим к задаче об отыскании решения матричной краевой задачи (1), (2) в окрестности порождающего решения $Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon))$; в этой окрестности имеет место разложение [Канторович, Акилов, 1977, с. 636]

$$\Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big] = \Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon\Big] +$$
$$+D\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big] + A\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon) + R\Big[Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon\Big],$$

при этом в малой окрестности порождающего решения $\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$,

$$A\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big] := \frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),t,\varepsilon\Big]\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}}$$

— $(\alpha\times\beta)$ — матрица и $R(Z(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon)$ — остаток этого разложения. Дифференциал

$$D\Big[Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(t,\varepsilon)\Big]\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$$

представляет собой линейный по $X(t,\varepsilon)$ оператор. С учетом последнего разложения, а также равенства (10), необходимое и достаточное условие (9) существования решения

$$X(t,\varepsilon)=W(t,\Theta_r(\varepsilon))+X^{(1)}(t,\varepsilon)$$

нелинейной матричной краевой задачи (8) является уравнением

$$P_{Q_d^*}M\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X(s,\varepsilon)\Big]+$$
$$+A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)+R\Big[Z(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon\Big]\Big\}(\cdot)\Big\}=0$$

относительно матрицы $\Theta_r(\varepsilon)$ и скалярной функции $\zeta(\varepsilon)$. Здесь $W(t,\Theta_r(\varepsilon))$ — общее решение однородной части краевой задачи (8) и

$$X^{(1)}(t,\varepsilon)=\varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon);\ 0\Big](t)$$

— частное решение неоднородной матричной краевой задачи (8). Обозначим $\xi_j(\varepsilon)$ скалярные функции, определяющие разложение матрицы

$$\Theta_r(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon),\quad \xi_j(\varepsilon)\in\mathbf{C}[0,\varepsilon_0],\quad j=1,2,\ \ldots\ \alpha\cdot\beta$$

по векторам $\Xi^{(j)}\in\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{\alpha\times\beta}$, вектор

$$\check{c}(\varepsilon):=\begin{pmatrix}\xi(\varepsilon)\\ \zeta(\varepsilon)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{1+\alpha\beta},\quad \xi(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\alpha\beta}$$

и матрицу

$$\mathcal{B}_0(\varepsilon):=\begin{bmatrix}\mathcal{B}_0^{(1)} & \mathcal{B}_0^{(2)} & \ldots & \mathcal{B}_0^{(\alpha\beta)} & \mathcal{B}_0^{(1+\alpha\beta)}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{d\times(1+\alpha\beta)},$$

где

$$\mathcal{B}_0^{(j)}:=P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),\ U(s)\cdot\Xi^{(j)}\cdot V(s)\Big]\Big\}\Big\}(\cdot)\in\mathbb{R}^d,\quad j=1,2,\ \ldots,\ \alpha\beta$$
$$\mathcal{B}_0^{(1+\alpha\beta)}:=P_{Q_d^*}M\Big\{\mathcal{L}K\Big\{A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)\Big\}.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие (9) разрешимости нелинейной матричной краевой задачи (8) преобразуется к виду

$$\mathcal{B}_0(\varepsilon)\cdot\check{c}(\varepsilon)=-P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$
$$+\mathcal{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}. \tag{11}$$

Уравнение (11) разрешимо относительно вектора $\check{c}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{1+\alpha\beta}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathcal{B}_0^*} P_{Q_d^*} \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$
$$+\mathcal{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}=0.$$

В частности, уравнение (11) разрешимо при условии

$$P_{\mathcal{B}_0^*}(\varepsilon) P_{Q_d^*} = 0, \quad \mathcal{B}_0^+(\varepsilon) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0]; \tag{12}$$

в этом случае уравнение (10) имеет по меньшей мере одно решение

$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{Q_d^*} \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$
$$+\mathcal{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\};$$

здесь $P_{\mathcal{B}_0^*}(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ — матрица-ортопроектор:

$$P_{\mathcal{B}_0^*}(\varepsilon):\ \mathbb{R}^{d\times d} \to \mathbb{N}(\mathcal{B}_0^*(\varepsilon)).$$

Таким образом, при условии (12) по меньшей мере одно решение нелинейной матричной краевой задачи (1), (2) в случае параметрического резонанса определяет следующая операторная система

$$Z(t,\varepsilon) = Z_0(t,\Theta_0(\varepsilon)) + X(t,\varepsilon), \quad X(t,\varepsilon) = W(t,\Theta_r(\varepsilon)) + X^{(1)}(t,\varepsilon),$$
$$X^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon;\ 0\Big](t),$$
$$\mu(\varepsilon)=\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon), \quad \Theta_r(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{I}_0\,\check{c}(\varepsilon)\Big], \quad \zeta(\varepsilon) = \mathfrak{I}_1\,\check{c}(\varepsilon),$$
$$\check{c}(\varepsilon) = -\mathcal{B}_0^+(\varepsilon)\cdot P_{Q_d^*} \mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot)+$$
$$+\,\mathcal{L}K\Big[R(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon))+X(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)+\zeta(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}; \tag{13}$$

здесь

$$\mathfrak{I}_0 := \begin{pmatrix} I_{\alpha\beta} & O\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha\beta\times(1+\alpha\beta)}, \quad \mathfrak{I}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times(1+\alpha\beta)}$$

— постоянные матрицы. Для нахождения приближенного решения операторной системы (13) применим метод последовательных приближений [Канторович, Акилов, 1977]. Таким образом, доказано следующее утверждение, которое является обобщением соответствующего утверждения для традиционных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае параметрического резонанса [Шмидт, 1978; Якубович, Старжинский, 1987; Чуйко, Кулиш, 2013; Чуйко, Старкова, Кулиш, 2014; Чуйко, 2014d].

Теорема. *Предположим, что для порождающей матричной краевой задачи* (3) *имеет место критический случай, при этом выполнено условие разрешимости:*

$$P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{A} - \mathcal{L}K\Big[F(s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Предположим также, что уравнение (10) *имеет корни*

$$\Theta_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\alpha\times\beta}, \ \ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1, \ \ \Theta_0(\varepsilon),\ \mu_0(\varepsilon) \in \mathbf{C}[0,\varepsilon_0],$$

тогда при условии (12) *в малой окрестности решения порождающей задачи* (3)

$$Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) = W(t, \Theta_0(\varepsilon)) + G\Big[F(s, \varepsilon); \mathcal{A}\Big](t)$$

и в достаточно малой окрестности начального значения $\mu_0(\varepsilon)$ *собственной функции* $\mu(\varepsilon)$ *по меньшей мере одно решение матричной краевой задачи* (1), (2)

$$Z(t, \varepsilon) = Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X(t, \varepsilon)$$

и непрерывную собственную функцию $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ *определяет операторная система* (13)*; для нахождения этого решения применима итерационная схема*

$$Z_{k+1}(t, \varepsilon) = Z_0(t, \Theta_0(\varepsilon)) + X_{k+1}(t, \varepsilon), \quad X_{k+1}(t, \varepsilon) = W(t, \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon)) + X^{(1)}_{k+1}(t, \varepsilon),$$
$$X^{(1)}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[\Phi(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon);\ 0\Big](t),$$
$$\mu_{k+1}(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \quad \Theta_{r_{k+1}}(\varepsilon) = \mathcal{M}^{-1}\Big[\mathfrak{J}_0\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon)\Big], \quad \zeta_{k+1}(\varepsilon) = \mathfrak{J}_1\, \check{c}_{k+1}(\varepsilon),$$
$$\check{c}_{k+1}(\varepsilon) = -\mathcal{B}^{+}_0(\varepsilon)\cdot P_{Q^*_d}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), X^{(1)}_k(s, \varepsilon)\Big]\Big\}(\cdot) +$$
$$+\, \mathcal{L}K\Big[R(Z_0(s, \Theta_0(\varepsilon)) + X_k(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta_k(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](\cdot)\Big\}, \quad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\,. \tag{14}$$

Длина отрезка $[0, \varepsilon^*]$, на котором применим метод простых итераций, может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [Boichuk, Samoilenko, 2004; Гребеников, Рябов, 1979], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого последней системой аналогично [Чуйко, 2005; Чуйко, 2006].

Пример. Условия доказанной теоремы выполняются в случае 2π-периодической задачи для уравнения типа Риккати

$$Z'(t, \varepsilon) = AZ(t, \varepsilon) + Z(t, \varepsilon)B + F(t) + \varepsilon\, \Phi(Z(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) = 0, \tag{15}$$

где

$$\Phi(Z(t, \varepsilon), \mu(\varepsilon), t, \varepsilon) := \mu S_1 Z(t, \varepsilon) S_2 + S_3 Z(t, \varepsilon) S_4 Z^*(t, \varepsilon) S_5,$$
$$S_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_4 := S_1, \quad S_5 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t & 0 \\ 0 & \sin 2t \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}Z(\cdot, \varepsilon) := Z(0, \varepsilon) - Z(2\pi, \varepsilon).$$

Общее решение полуоднородной задачи Коши для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z'(t) = AZ(t) + Z(t)B, \quad Z(0) = \Theta$$

имеет вид

$$W(t, \Theta) = U(t)\cdot\Theta\cdot V(t), \quad \Theta \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

где $U(t)$ и $V(t)$ — нормальные ($U(0) = I_2,\ V(0) = I_3$) фундаментальные матрицы:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & -2\sin t \\ \sin t & \cos t - \sin t \end{pmatrix}, \quad V(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t & -\sin 2t \\ 2\sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\Xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ \Xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— естественный базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$ и $c_j,\ j = 1, 2, \ \ldots\ 4$ — константы, определяющие разложение матрицы Θ по векторам $\Xi^{(j)}$ базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Общее решение однородной матричной задачи (15) определяет матрица $Q = 0$ и ее ортопроекторы $P_Q = P_{Q^*} = I_4$. Таким образом, для матричной краевой задачи (15) имеет место критический случай. Поскольку для 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) условие (7) выполнено, постольку порождающая 2π-периодическая задача для матричного дифференциального уравнения (15) разрешима для данных неоднородностей $F(t)$ и $\mathcal{A} = 0$. Общее решение порождающей 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15)

$$Z_0(t, \Theta_r) = W(t, \Theta_r) + G\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t), \quad \Theta_r = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix}$$

определяет обобщенный оператор Грина

$$G\Big[F(s); \mathcal{A}\Big](t) = K\Big[F(s)\Big](t),$$

где

$$\mathcal{M}K\Big[F(s)\Big](t) = \frac{1}{30} \times \begin{pmatrix} 2(-25\cos t + 37\cos 2t - 12\cos 3t - 6\sin 2t + 9\sin 3t) \\ -25\cos t + 46\cos 2t - 21\cos 3t + 25\sin t - 8\sin 2t - 3\sin 3t \\ -25\cos t + 28\cos 2t - 3\cos 3t + 25\sin t - 44\sin 2t + 21\sin 3t \\ 12\cos 2t - 12\cos 3t + 25\sin t - 26\sin 2t + 9\sin 3t \end{pmatrix}.$$

Уравнение (10) для порождающих констант 2π-периодической задачи для матричного дифференциального уравнения (15) имеет действительный корень

$$\mu = 1, \quad \xi = \begin{pmatrix} \frac{37}{15} & \frac{23}{15} & \frac{14}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}^*,$$

которому соответствует матрица полного ранга

$$\mathcal{B}_0 = -120\pi \begin{pmatrix} 34 & -158 & 38 & 300 & 0 \\ 15 & -34 & 68 & -38 & 0 \\ 3 & -208 & 14 & 214 & 0 \\ -41 & -3 & 61 & -14 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в случае 2π-периодической задачи для уравнения (15) выполнены условия теоремы, следовательно 2π-периодическая задача (15) в малой окрестности порождающего решения

$$Z_0(t) = \begin{pmatrix} 37\cos 2t - 6\sin 2t & 2(7\cos 2t - 11\sin 2t) \\ -4\sin 2t + 23\cos 2t & 6\cos 2t - 13\sin 2t \end{pmatrix}$$

разрешима, причем $\mu(0) = 1$. Итерационная схема (14) определяет первое приближение от порождающего решения $X_1^{(1)}(t,\varepsilon)$:

$$\mathcal{M}X_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \left\{X_{1,i}^{(1)}(t,\varepsilon)\right\}_{i=1}^{4},$$

для которого

$$X_{1,1}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{47\ 250}\Big\{-31\ 500 + 24\ 192\cos t - 10\ 080\cos 2t - 14\ 640\cos 3t +$$

$$+ 32\ 028\cos 4t + 41\ 776\sin t - 21\ 210\sin 2t + 15\ 360\sin 3t + 5\ 021\sin 4t\Big\},$$

$$X_{1,2}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{47\ 250}\Big\{-10\ 500 + 32\ 984\cos t - 13\ 020\cos 2t - 15\ 000\cos 3t +$$

$$+ 5\ 536\cos 4t + 8\ 792\sin t - 29\ 190\sin 2t + 360\sin 3t + 12\ 127\sin 4t\Big\},$$

$$X_{1,3}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{47\ 250}\Big\{-10\ 500 + 16\ 492\cos t - 12\ 180\cos 2t + 180\cos 3t +$$

$$+ 6\ 008\cos 4t + 4\ 396\sin t - 2\ 310\sin 2t + 7\ 500\sin 3t - 5\ 569\sin 4t\Big\},$$

$$X_{1,4}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{8\varepsilon}{47\ 250}\Big\{2\ 611\cos t - 2\ 730\cos 2t - 915\cos 3t +$$

$$+ 1\ 034\cos 4t - 1\ 512\sin t - 1\ 260\sin 2t\sin 2t + 960\sin 3t + 288\sin 4t\Big\}.$$

Для оценки точности найденного порождающего и первого приближения к 2π-периодическому решению уравнения типа Риккати (13) определим невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \Big\|\Big\|\mathcal{M}\Big[Z_1'(t,\varepsilon) - AZ_1(t,\varepsilon) - Z_1(t,\varepsilon)B - F(t) -$$

$$-\varepsilon\,\Phi(Z_k(t,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]\Big\|_{\mathbb{R}^4}\Big\|_{L^2[0;2\pi]}, \quad k = 0,\ 1\ .$$

В частности, при $\varepsilon = 0,1$ имеем:

$$\Delta_0(0,1) \approx 0,318\ 171, \quad \Delta_1(0,1) \approx 0,030\ 770.$$

При $\varepsilon = 0,01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0,01) \approx 0,0318\ 171, \quad \Delta_1(0,01) \approx 0,00307\ 697.$$

Заметим, что матрица $\mathcal{B}_0$, ключевая при исследовании матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть найдена непосредственно из уравнения для порождающих констант (10). Действительно:

$$\frac{\partial}{\partial \check{c}}P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big[\Phi(Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](\cdot)\Big\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\xi,\zeta)}P_{Q_d^*}\mathcal{M}\Big\{\mathcal{L}K\Big\{D\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),W(s,\sum_{j=1}^{\alpha\cdot\beta}\Xi^{(j)}\xi_j(\varepsilon)) + X^{(1)}(s,\varepsilon)\Big] +$$

$$+ A\Big[Z_0(s,\Theta_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big]\zeta(\varepsilon)\Big\}(\cdot)\Big\}\Bigg|_{\substack{X(t,\varepsilon)=0\\ \zeta(\varepsilon)=0}} = \mathcal{B}_0.$$

Предложенная в статье схема исследования матричных краевых задач (1), (2) в случае параметрического резонанса, как и в случае нетеровых краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогично [Boichuk, Samoilenko, 2004; Chuiko, Chuiko, 2012] может быть перенесена на матричные краевые задачи с запаздыванием, а также — аналогично [Boichuk, Samoilenko, 2004; Boichuk, Chuiko, 1992; Чуйко, 2006; Chuiko, Boichuk, 2009] на автономные матричные краевые задачи. И, наконец, аналогично [Boichuk, Samoilenko, 2004; Чуйко, 2007] предложенная схема исследовании матричных краевых задач может быть перенесена на матричные краевые задачи со слабонелинейным функционалом в краевом условии.

Список литературы

Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М. : Наука, 1969. — 367 с.

Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач. — Киев : Наук. думка, 1990. — 96 с.

Бойчук А. А. Функция Грина линейной неоднородной краевой задачи // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1988. — № 7. — С. 3–6.

Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. — М. : Гостехиздат, 1956. — 600 с.

Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М. : Наука, 1984. — 318 с.

Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М. : Наука, 1979. — 432 с.

Деревенский В. П. Матричные уравнения Бернулли. I // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 2. — P. 14–23.

Деревенский В. П. Матричные уравнения Бернулли. II // Известия вузов. Математика. — 2008. — № 7. — P. 3–10.

Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М. : Наука, 1977. — 744 с.

Коробов В. И., Бебия М. О. Стабилизация одного класса нелинейных систем, управляемых по первому приближению // Доп. НАН України. — 2014. — № 2. — С. 20–25.

Копелев Ю. Ф. Параметрические колебания станков. — Металлорежущие станки: респ. межвед. науч.-техн. сб. — Киев, 1984. Вып. 12. — С. 3–8.

Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И. К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова // Дифференц. уравнения. — 2005. — Т. 41, № 7. — С. 994–996.

Люлько Н. А. Основной и комбинационный резонансы в нелинейной системе двух осциляторов. Новосибирск, 2012. — 33 с. (Препринт / РАН Сиб. отд-ние. Инст. математики; № 281).

Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний. // Журн. техн. физики. — 1934. — № 3. — С. 5–29.

Силин В. П. Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму. — М. : Наука, 1973. — 287 с.

Чуйко А. С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005. — Т. 8, № 2. — С. 278–288.

Чуйко С. М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина. Серия: Математика, прикладная математика и механика. — № 1120. — 2014a. — С. 85–94.

Чуйко С. М. О решении матричного уравнения Сильвестра // Вестник Одесского национального университета. Сер. математика и механика. — 2014b. — Т. 19, Вып. 1 (21). — С. 49–57.

Чуйко С. М. Область сходимости итерационной процедуры для автономной краевой задачи // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9, № 3. — С. 416–432.

Чуйко С. М. Оператор Грина линейной нетеровой краевой задачи для матричного дифференциального уравнения // Динамические системы. — 2014c. — Т. 4 (32), № 1–2. — С. 101–107.

Чуйко С. М. Нелинейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Нелинейные колебания. — 2014d. — Т. 17, № 1. — С. 137–148.

Чуйко С. М. Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доп. НАН України. — 2007. — № 2. — С. 26–30.

Чуйко С. М., Кулиш П. В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — Т. 24. — С. 243–252.

Чуйко С. М., Кулиш П. В. Слабонелинейная периодическая задача в случае параметрического резонанса // Труды ИПММ НАН Украины. — 2013. — Т. 27. — С. 240–249.

Чуйко С. М., Старкова О. В., Кулиш П. В. Периодическая краевая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса // Комп. исследов. и модел. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 27–43.

Шмидт Г. Параметрические колебания. — М. : Мир, 1978. — 336 с.

Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. — М. : Наука, 1987. — 328 с.

Boichuk A. A., Krivosheya S. A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equation // Differential Equation. — 2001. — Vol. 37, No. 4. — P. 464–471.

Boichuk A. A., Krivosheya S. A. Criterion of the solvability of matrix equation of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — Vol. 50, No. 8. — P. 1162–1169.

Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.

Chuiko S. M., Boichuk I. A. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.) — 2009. — Vol. 12, No. 3. — P. 405–416.

Boichuk A., Chuiko S. Autonomous Weakly Nonlinear Boundary Value Problems in Critical Cases // Differential equation. — 1992. — No. 10. — P. 1353–1358.

Chuiko S. M., Chuiko A. S. On the approximate solution of periodic boundary value problems with delay by the least-squares method in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — 2012. — Vol. 14, No. 3. — P. 445–460.