**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 4 С. 813–819**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.5

Приближение классов интегралов Пуассона суммами Фейера

О. А. Новиков[1,a], О. Г. Ровенская[2]

[1]Донбасский государственный педагогический университет,
84116, Украина, г. Славянск, ул. Г. Батюка, 19
[2]Донбасская государственная машиностроительная академия,
84313, Украина, г. Краматорск, ул. Шкадинова, 72

E-mail: [a] o.rovenskaya@mail.ru

*Получено 30 апреля 2015 г.,
после доработки 2 июня 2015 г.*

Получена ассимптотическая формула для верхних граней уклонений сумм Фейера на классах интегралов Пуассона. В ряде случаев полученное соотношение обеспечивает решение задачи Колмогорова–Никольского для сумм Фейера и классов интегралов Пуассона.

Ключевые слова: ряд Фурье, задача Колмогорова–Никольского, класс интегралов Пуассона

Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums

O. A. Novikov[1], O. G. Rovenska[2]

[1]Donbass State Pedagogical University, 19 G. Batyuka street, Slovyansk, 84116, Ukraine
[2]Donbass State Engineering Academy, 72 Shkadinova street, Kramatorsk, 84313, Ukraine

Abstract. — We obtain asymptotic formula for upper bounds of deviations of Fejer sums on classes of Poisson integrals. Under certain conditions, formula guarantee the solvability of the Kolmogorov–Nikol'skiy problem for Fejer sums and classes of Poisson integrals.

Keywords: Fourier series, Kolmogorov–Nikol'skiy problem, class of Poisson integrals

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 813–819 (Russian).

Введение

Работа посвящена решению одной из экстремальных задач теории приближения классов периодических функций линейными методами. Изучены вопросы асимптотического поведения верхних граней уклонений сумм Фейера на классах периодических функций, представимых в виде интегралов Пуассона. В работе применены методы исследования интегральных представлений уклонений полиномов на классах функций, возникшие и получившие свое развитие благодаря работам С. М. Никольского, С. Б. Стечкина, Н. П. Корнейчука, В. К. Дзядика, А. И. Степанца и других.

В работе [Степанец, 1987, с. 29] классы периодических (ψ,β)-дифференцируемых функций определены следующим образом.

Пусть L — пространство суммируемых 2π-периодических функций, $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— ряд Фурье функции f. Пусть $\psi(k)$ — произвольная функция натурального аргумента и β — фиксированное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, то эта функция называется (ψ,β)-производной функции f и обозначается f_β^ψ. Множество всех непрерывных функций, имеющих (ψ,β)-производную, обозначается C_β^ψ. Если $f \in C_\beta^\psi$ и, кроме того, $f_\beta^\psi(x) \in S_M^0$, где

$$S_M^0 = \{\varphi(t) \in L \vdots \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0,\ \operatorname{ess\,sup}|\varphi(t)| \le 1\},$$

то множество таких функций обозначается $C_{\beta,\infty}^\psi$.

В работе [Степанец, 1987, с. 31] показано, что элементы классов C_β^ψ, которые определяются функциями $\psi(k) = q^k$, $q \in (0;1)$, с точностью до константы представимы в виде свертки

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^\psi(x+t)P_\beta^q(t),$$

где

$$P_\beta^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

— ядро Пуассона.

Будем обозначать символом $C_{\beta,\infty}^q$ классы $C_{\beta,\infty}^\psi$ которые определяются указанной функцией $\psi(k) = q^k$, $q \in (0;1)$. Также будем обозначать $f_\beta^\psi(x) = f_\beta^q(x)$. Известно [Степанец, 2001], что классы $C_{\beta,\infty}^q$, которые принято называть классами интегралов Пуассона, состоят из функций $f(x)$, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \ln \frac{1}{q}$.

Обозначим через $S_n(f;x)$ частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L$

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Суммы Фейера $\sigma_n(f;x)$ функции $f \in L$ задаются следующим соотношением

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x)$$

и представляют собой средние арифметические частичных сумм Фурье этой функции. Как известно, последовательность полиномов $\sigma_n(f;x)$ равномерно сходится к исходной функции для всех $f \in C$.

Суммы Валле Пуссена функции $f \in L$ (см. [Степанец, 1987, с. 47]) определяются соотношением

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x)$$

и являются средними арифметическими частичных сумм Фурье $S_k(f;x)$ для $k = n-p, n-p+ +1, ..., n-1$.

Задача приближения классов интегралов Пуассона тригонометрическими полиномами имеет свою историю. В 1946 году С. М. Никольский [Никольский, 1946] показал, что для верхних граней уклонений частичных сумм Фурье, взятых по классам $C^q_{\beta,\infty}$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}_n\left(C^q_{\beta,\infty}\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - S_{n-1}(f;x)\|_C = \frac{8q^n}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n},$$

где величина $O(1)$ не зависит от n. В 1980 году С. Б. Стечкин [Стечкин, 1980] показал, что остаточный член в этой формуле можно записать в виде $O(1)\frac{q^{n+1}}{(1-q)n}$, где величина $O(1)$ равномерно ограничена по n и q.

В работе [Рукасов, Чайченко, 2002] (см. также [Степанец, Рукасов, Чайченко, 2007, с. 218]) для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x) - V_{n,p}(f;x)\|_C =$$

$$= \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right),\ 1 < p < n.$$

А. С. Сердюком [Сердюк, 2004] также было показано, что имеет место более общий результат

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{p,q} + O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^{s(p)}}\right)\right),$$

где

$$K_{p,q} = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos pt + q^2}dt,\ s(1) = 1,\ s(p) = 3,\ \forall p > 1.$$

Кроме того, в работе [Ровенская, Новиков, 2010] исследованы вопросы приближения интегралов Пуассона тригонометрическими полиномами, которые порождаются повторным применением метода суммирования Валле Пуссена.

В работах [Новиков, Ровенская, 2011; Ровенская, Новиков, 2012] рассмотрены асимптотические свойства прямоугольных линейных средних рядов Фурье на классах функций многих переменных, являющихся аналогами интегралов Пуассона в многомерном случае.

Основной результат

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $\beta = 1$, $n \to \infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};\sigma_n\right) = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} \|f(x)-\sigma_n(f;x)\|_C.$$

Теорема. *Пусть $q \in (0;1)$. Тогда для $n \to \infty$ имеет место асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{1-q^2} + \ln\frac{1+q}{1-q}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n, q.

Доказательство. Найдем интегральные представления для уклонений сумм Фейера от функций $f(x) \in C^q_{\beta,\infty}$:

$$\delta_n(f;x) \overset{df}{=} f(x)-\sigma_n(f;x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k(f;x),$$

где

$$\rho_k(f;x) \overset{df}{=} f(x) - S_k(f;x).$$

Преобразуем величины $\rho_m(f;x)$:

$$\rho_m(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\sum_{k=m}^{\infty} q^k\cos(kt+\beta\pi/2)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+m}\cos((k+m)t+\beta\pi/2)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\cos(\beta\pi/2)q^{k+m}\cos(k+m)t - \sin(\beta\pi/2)q^{k+m}\sin(k+m)t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)\left(\cos(\beta\pi/2)q^m\cos mt\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos kt - \cos(\beta\pi/2)q^m\sin mt\sum_{k=0}^{\infty}q^k\sin kt - \right.$$

$$\left. - \sin(\beta\pi/2)q^m\sin mt\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos kt - \sin(\beta\pi/2)q^m\cos mt\sum_{k=0}^{\infty}q^k\sin kt\right)dt.$$

Используя формулы [Степанец, 1987, с. 123]

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos kt = \frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2},$$

получим

$$\rho_m(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\Bigg\{\Bigg[\cos(\beta\pi/2)q^m\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2} -$$

$$-\sin(\beta\pi/2)q^m\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\Bigg]\cos mt - \Bigg[\cos(\beta\pi/2)q^m\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2} +$$

$$+\sin(\beta\pi/2)q^m\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\Bigg]\sin mt\Bigg\}dt.$$

Теперь можем записать

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_\beta^q(x+t)\Bigg\{\Bigg[\cos(\beta\pi/2)q^m\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2} -$$

$$-\sin(\beta\pi/2)q^m\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\Bigg]\cos mt - \Bigg[\cos(\beta\pi/2)q^m\frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2} +$$

$$+\sin(\beta\pi/2)q^m\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\Bigg]\sin mt\Bigg\}dt = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\beta^q(x+t)}{1-2q\cos t+q^2}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{n-1} q^m\Bigg[[\cos mt - q\cos(m-1)t]\cos\frac{\beta\pi}{2} - [\sin mt - q\sin(m-1)t]\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg]dt.$$

Выполняя элементарные преобразования, можно показать что

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\beta^q(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\Bigg[[1-2q\cos t+q^2\cos 2t]\cos\frac{\beta\pi}{2} -$$

$$-[-2q\sin t+q^2\sin 2t]\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg]dt + O(1)\frac{q^n}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}.$$

Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2} = O(1)\frac{1}{(1-q)^3},$$

то

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_\beta^q(x+t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2}\Bigg[[1-2q\cos t+q^2\cos 2t]\cos\frac{\beta\pi}{2} -$$

$$-[-2q\sin t+q^2\sin 2t]\sin\frac{\beta\pi}{2}\Bigg]dt + O(1)\frac{q^n}{(1-q)^3 n}.$$

Пусть $\beta = 1$. Тогда

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f_1^q(x+t)[-2q\sin t+q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

В силу инвариантности класса $C^q_{1,\infty}$ относительно сдвига по аргументу

$$\sup_{f\in C^q_{1,\infty}} \|\delta_n(f;x)\| = \sup_{f\in S^0_M} \left| \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)[-2q\sin t + q^2\sin 2t]}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|-2q\sin t + q^2\sin 2t\right|}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3} =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)(-2q\sin t + q^2\sin 2t)}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3},$$

где

$$\varphi(t) = \operatorname{sign}(-2q\sin t + q^2\sin 2t).$$

Так как $\varphi(t) \in S^0_M$, то

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma_n) = \frac{1}{\pi n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|-2q\sin t + q^2\sin 2t\right|}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3} =$$

$$= \frac{2}{\pi n} \int\limits_{0}^{\pi} \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{0}^{\pi} \frac{2q\sin t - q^2\sin 2t}{(1-2q\cos t+q^2)^2} dt = -\frac{(1-q^2)}{2}(1-2q\cos t+q^2)^{-1} + \frac{1}{2}\ln(1-2q\cos t+q^2)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2q}{(1-q^2)} + \ln\frac{(1+q)}{(1-q)},$$

то

$$\mathcal{E}(C^q_{1,\infty};\sigma_n) = \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2q}{(1-q^2)} + \ln\frac{(1+q)}{(1-q)}\right) + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Утверждение теоремы доказано.

В случаях $q \in (0; 1-\delta]$, $\delta \in (0;1)$ полученная асимптотическая формула обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова–Никольского.

Список литературы

Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1946. — Т. 10, № 3. — С. 207–256.

Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными методами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 3. — С. 255–264.

Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелинейные колебания. — 2010. — Т. 13, № 1. — С. 96–99.

Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение периодических функций высокой гладкости прямоугольными линейными средними рядов Фурье // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 3. — С. 521–529.

Рукасов В. И., Чайченко С. О. Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2002. — Т. 54, № 12. — С. 1653–1668.

Сердюк А. С. Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 1. — С. 97–107.

Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.

Степанец А. И. Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. — 2001. — Т. 192, № 1. — С. 113–138.

Степанец А. И., Рукасов В. И., Чайченко С. О. Приближения суммами Валле Пуссена. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 368 с.

Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1980. — Т. 145. — С. 126–151.