**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 3 С. 707−713**

Ки&М

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

УДК: 004.023

Размещение точек Штейнера в дереве Штейнера на плоскости средствами MatLab

Д. Т. Лотарев

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1

E-mail: dimlot@mail.ru

Получено 30 сентября 2014 г.

Рассматривается способ локализации точек Штейнера средствами MatLab в задаче Штейнера с потоком на евклидовой плоскости, когда соединяемые точки лежат в вершинах четырех-, пяти- или шестиугольника. Матрица смежности считается заданной. Метод использует способ решения трехточечной задачи Штейнера, в которой дерево Штейнера связывает три точки. Представлена визуализация найденных решений.

Ключевые слова: задача Штейнера, точка Штейнера, источник ресурса, потребитель ресурса, трехточечная задача Штейнера, задача для большего числа, понижение размерности

Allocation of steinerpoints in euclidean Steiner tree problem by means of MatLab package

D. T. Lotarev

A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems, Russian Academy of Sciences, 19/1 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russia

The problem of allocation of Steiner points in Euclidean Steiner Tree is considered. The cost of network is sum of building costs and cost of the information transportation. Euclidean Steiner tree problem in the form of topological network design is a good model of this problem.

The package MatLab has the way to solve the second part of this problem — allocate Steiner points under condition that the adjacency matrix is set. The method to get solution has been worked out. The Steiner tree is formed by means of solving of the sequence of "three points" Steiner

Keywords: Steiner problem, Steiner point, source resource, consumer resource, “three points” Steiner problem, task for bigger number, decrease dimension

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 707–713 (Russian).

1. Введение

Компьютерная сеть представляет собой множество компьютеров, соединенных каналами связи, по которым передается информация. Несмотря на широкое распространение беспроводных технологий, многие компьютерные сети используют в качестве физической среды передачи информации медные или волоконно-оптические кабели. В этом случае при создании сети возникает необходимость прокладывать кабельные сети на земной территории. Земная территория существенно неоднородна по условиям прокладки кабеля. Следует учитывать, что каждый из элементов этой неоднородности определяет свои условия и стоимость прокладки. Стремясь минимизировать затраты на прокладку кабельной сети, приходится решать задачу размещения сети в условиях этой неоднородности.

Моделью задачи о минимизации затрат может быть либо задача о минимальном связывающем дереве (Minimal Spanning Tree — MST) [Прим, 1961], либо задача о минимальном дереве Штейнера — задача Штейнера (Steiner Minimal Tree — SMT) [Берн, Грэм, 1989; Курант, Роббинс, 2001]. В задаче об MST разветвления сети допускаются только в соединяемых точках, а в задаче о SMT, называемой просто задачей Штейнера, разветвления сети допускаются во всех точках области размещения кабелей. В данной работе именно эта задача принята за модель задачи размещения компьютерной сети на неоднородной территории.

Задача Штейнера представляет большой научный и практический интерес. Известно [Берн, Грэм, 1989; Курант, Роббинс, 2001], что на плоскости минимальное дерево Штейнера короче минимального связывающего дерева не более чем на 13.6 %. Но это NP-трудная задача и для ее решения применяются главным образом эвристические методы. Точное решение возможно только для задач малой размерности.

Задача минимизации длины дерева — это одна из старейших задач оптимизации. П. Ферма предложил задачу поиска точки $\boldsymbol{P}$, которая минимизирует суммарное расстояние от $\boldsymbol{P}$ до трех заданных точек плоскости. Исследованием этой задачи занимались математики того времени и нашли ее решение [Курант, Роббинс, 2001]. Если в треугольнике ABC, вершинами которого являются заданные точки, все углы меньше 120 градусов, то точка P лежит внутри треугольника, и каждый из трех углов $\angle APB$, $\angle APC$, $\angle BPC$ равен 120°. Если один из углов треугольника равен или больше 120°, то точка $\boldsymbol{P}$ лежит в вершине этого угла. В [Курант, Роббинс, 2001] описан способ решения задачи. Если на каждой стороне треугольника ABC построить дугу в 120°, то точка пересечения дуг — это искомая точка. В [Лотарев, 2008] представлено решение классической задачи Штейнера для трех исходных точек. Задача названа трехточечной задачей Штейнера и решается средствами MatLab.

Пакет прикладных программ MatLab предоставляет большие возможности в изучении этой задачи. В [Лотарев, 2008] представлены исследования по трехточечной задачи Штейнера без потока средствами MatLab. В данной работе представлено продолжение этих исследований.

Здесь рассматривается сеть коммуникаций, которая создается для транспортировки потока. Поэтому критерием оптимальности при оптимизации сети принята сумма затрат на строительство сети и на транспортировку по ней того потока, для перемещения которого сеть строится. Мы рассматриваем информационный поток, но он может быть также материальным или энергетическим.

2. Трехточечная задача Штейнера с потоком на евклидовой плоскости

В задаче размещения сети на земной территории требуется выполнение минимума некоторого критерия оптимальности. Каждому критерию отвечает некоторая своя оптимальная конфигурация сети.

Пусть на некотором равнинном участке земной территории задано размещение трех объектов, A_1, A_2, A_3, из которых объект A_3 является источником некоторого ресурса, а объекты A_1,

A_2 — потребителями. В соответствии с принятой моделью считаем, что они лежат на евклидовой плоскости, и сеть имеет вид, показанный на рис. 1. Используются следующие обозначения. A_3 — источник ресурса, A_1, A_2 — потребители, l_1, l_2, l_3 — ребра сети, p — точка разветвления, a_i, $i = 1, 2, 3,$ — углы при точке разветвления.

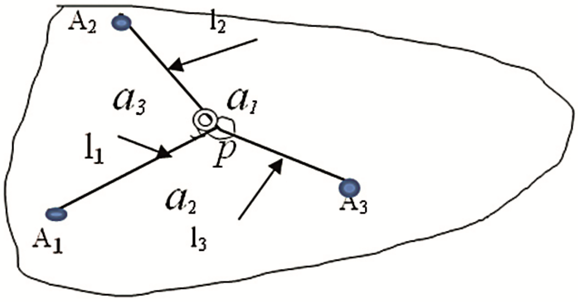


Рис. 1. Модель участка территории и сети на нем

Заданы значения следующих параметров:

$r_1 = \text{const}$ — значение удельных строительных затрат — затрат на строительство отрезка коммуникации единичной длины,

$r_2 = \text{const}$ — значение удельных транспортных затрат на транспортировку единичного потока по отрезку коммуникации единичной длины:

$q_1 = \text{const}$ — значение спроса стока A_1,

$q_2 = \text{const}$ — значение спроса стока A_2.

Значения r_1 определяются свойствами территории, r_2 — качеством самой коммуникации, а q_1, q_2— свойствами потребителей.

Требуется построить на этом участке сеть транспортных коммуникаций, связывающих источник A_3 с потребителями, A_1, A_2, которая обеспечивает протекание потока ресурса при минимальном значении критерия оптимальности.

Будем полагать, что искомая сеть имеет вид дерева Штейнера и что точка Штейнера является точкой разветвления сети. Задача состоит в том, чтобы найти локализацию точки Штейнера, выяснить, как изменяются ее локализация и значения углов между инцидентными ей ребрами при учете в критерии оптимальности затрат на транспортировку потока. Эти изменения зависят от значений параметров q_1, q_2, r_1, r_2. Значения этих параметров определяют и длину ребер l_1, l_2, l_3 (см. рис. 1). При некоторых значениях параметров q_1, q_2, r_1, r_2 сеть остается классическим деревом Штейнера, при других она становится кратчайшим связывающим деревом.

Затраты F на строительство сети и на транспортировку по ней потоков q_1 и q_2 можно записать в виде

$$F = (r_1 + r_2 q_1) l_1 + (r_1 + r_2 q_2) l_2 + (r_1 + r_2 (q_1 + q_2)) l_3. \quad (1)$$

Обозначим f_1, f_2, f_3 суммарные строительные и транспортные затраты на отрезке коммуникации единичной длины для ребер l_1, l_2, l_3 соответственно

$$f_1 = r_1 + r_2 q_1, \quad (2)$$

$$f_2 = r_1 + r_2 q_2, \quad (3)$$

$$f_3 = r_1 + r_2 (q_1 + q_2). \quad (4)$$

Тогда критерий (1) принимает вид

$$F = f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3. \quad (5)$$

Критерий оптимальности (5) можно рассматривать как работу сил f_1, f_2, f_3, приложенных к материальной точке p и направленных к точкам A_1, A_2, A_3, при возможном движении материальной точки p к точкам A_1, A_2, A_3. Эта работа равна потенциальной энергии материальной точки p относительно точек A_1, A_2, A_3 [Гантмахер, 1960].

Известно [Гантмахер, 1960], что потенциальная энергия механической системы имеет строгий минимум в положении устойчивого равновесия системы и что система находится в равновесии, если сумма сил, воздействующих на нее, равна нулю. Таким образом, необходимым условием минимума критерия (5) является равенство нулю векторной суммы $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3$:

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = 0\,. \tag{6}$$

Углы между векторами $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ в точке $\boldsymbol{p}$ можно определить из соотношения (6). Для этого все векторы $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$, фигурирующие в (6), спроектируем поочередно на направление вектора f_1, направление вектора f_2, направление вектора f_3 (проекции на направление, противоположное направлению вектора f_3, показаны на рис. 2).

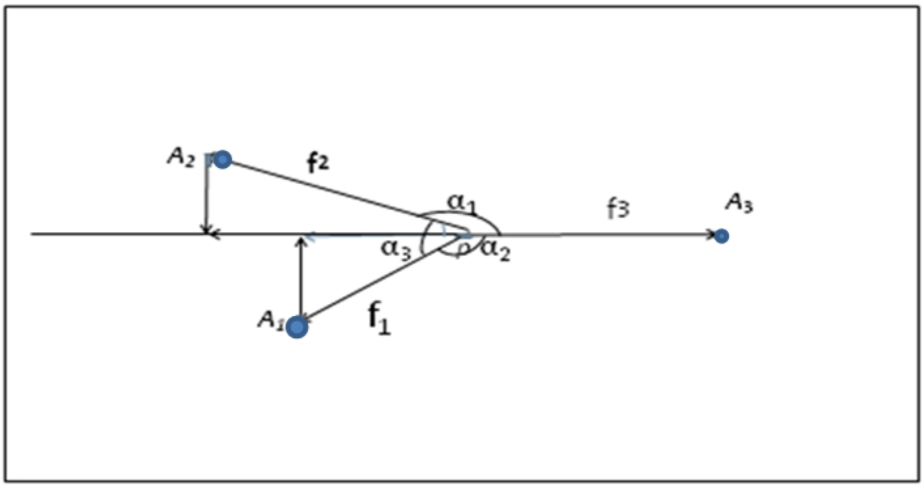


Рис. 2. Силы, действующие на точку Штейнера

Раскрывая в (6) суммы пар векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2$, $\vec{f}_1, \vec{f}_3$, $\vec{f}_2, \vec{f}_3$, получаем три уравнения:

$$(f_1^2 + 2f_1 f_2 \cos\alpha_3 + f_2^2) = f_3^2,$$

$$(f_1^2 + 2f_1 f_3 \cos\alpha_2 + f_3^2) = f_2^2,$$

$$(f_2^2 + 2f_2 f_3 \cos\alpha_1 + f_3^2) = f_1^2.$$

Из этих уравнений следуют соотношения

$$\cos\alpha_1 = \frac{f_1^2 - f_2^2 - f_3^2}{2f_2 f_3}, \tag{7}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{f_2^2 - f_1^2 - f_3^2}{2f_1 f_3}, \tag{8}$$

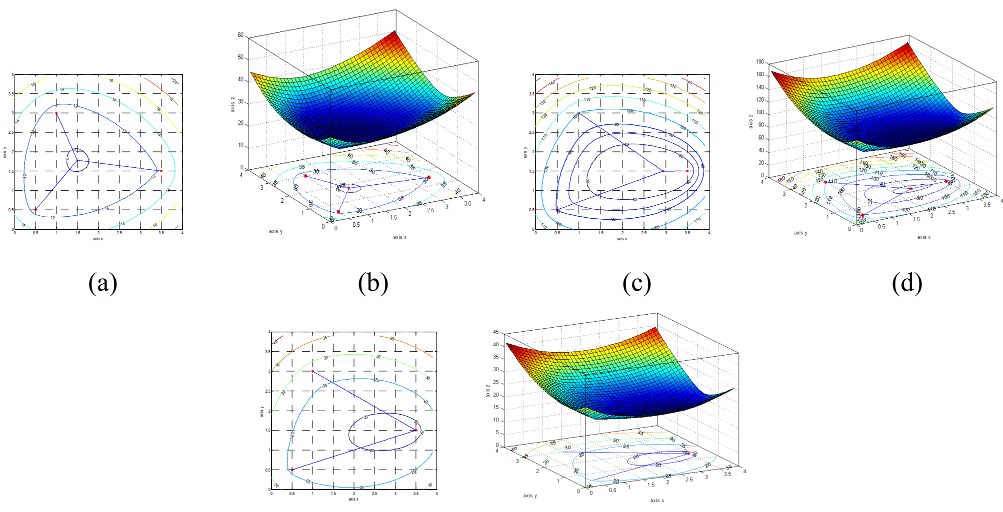
$$\cos\alpha_3 = \frac{f_3^2 - f_1^2 - f_2^2}{2f_1 f_2}. \tag{9}$$

Если удельные транспортные затраты малы по сравнению с удельными строительными затратами, то ими можно пренебречь и соотношения (2)–(4) принимают вид

$$f_1 = r_1,\ f_2 = r_1,\ f_3 = r_1. \tag{10}$$

Подставляя эти выражения для f_1, f_2, f_3 в соотношения (7), (8), (9), получаем, что в классическом дереве Штейнера на евклидовой плоскости каждый из углов a_1, a_2, a_3 между ребрами дерева, сходящимися в точке Штейнера, равен 120° и $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 = \cos\alpha_3 = \frac{1}{2}$.

Программа, код которой написан на М-языке системы MATLAB, позволяет определить координаты точки Штейнера и значения углов между ребрами, инцидентными этой точке, при различных значениях удельных строительных и транспортных затрат, а также получить визуальное представление результатов, показанное на рис. 3. На этом рисунке показаны положение дерева на плоскости (a, c, e), поверхность отклика и линии уровня (b, d, f).



(a) (b) (c) (d)

(e) (f)

Рис. 3. Минимальное дерево Штейнера на плоскости при различных значениях удельных строительных (r_1) и удельных транспортных (r_2) затрат: (a, b) $r_2 = 0$; (c, d) $r_1 = 5$, $r_2 = 3$; (e, f) $r_1 = 0$

Из рисунка видно, что при изменении значений удельных строительных и удельных транспортных затрат меняются и положение точки Штейнера, и значения углов между инцидентными ей ребрами.

3. Понижение размерности

Умение решать трехточечную задачу позволяет понизить размерность исходной задачи, в которой число соединяемых точек более 3.

В дереве Штейнера для каждой пары вершин, смежных из одной точки Штейнера, существуют две замечательные точки: первая — это точка Штейнера, вторая — это эквивалентный сток.

Используя эквивалентный сток, можно решить задачу для точек, число которых больше трех. Для этого необходимо заменить пару стоков, для которых заданной матрицей смежности определена одна общая для них и смежная с ними точка Штейнера, одним эквивалентным стоком. Тем самым задача Штейнера для n точек сведется задаче с $n - 1$ точками. Нужно только найти локализацию этого эквивалентного стока. Для этого в трехточечной задаче на продолжении звена $A_3 p$ нужно найти такую точку A_4, что сток со спросом $(q_1 + q_2)$, размещенный в этой точке, эквивалентен двум стокам A_1 и A_2 по затратам на строительство коммуникации $[A_3, A_4]$

и на транспортировку по ней потока ($q_1 + q_2$) от источника A_3 до стока A_4. Этот сток и называется эквивалентным стоком.

Если для некоторой точки Штейнера еще не построенной сети известны и локализация точки Штейнера, и величина потока, который будет по ней протекать, то ее можно рассматривать источником для всех достижимых из нее стоков. Это означает, что процесс построения дерева Штейнера можно составить из двух групп шагов. Первая группа шагов — это шаги вперед. На этих шагах определяется локализация эквивалентных стоков. На последнем шаге этой группы определяется также окончательная локализация точки Штейнера, смежной с источником.

После этого начинаются шаги назад. На этих шагах определяется окончательная локализация остальных точек Штейнера. При этом на каждом шаге за источник принимается точка Штейнера, локализованная на предыдущем шаге.

Решение для 4-х исходных точек (рис. 4*a*) состоит из следующих шагов.

Далее всюду предполагается, что источник обозначен через A_1.

Шаг 1. Решаем трехточечную задачу для A_1, A_2, A_3 и находим локализацию эквивалентного стока ЭК1. Здесь же определяется локализация точки Штейнера TS_1. Но она верна только при отсутствии четвертого стока. Поэтому в дальнейшем она не используется.

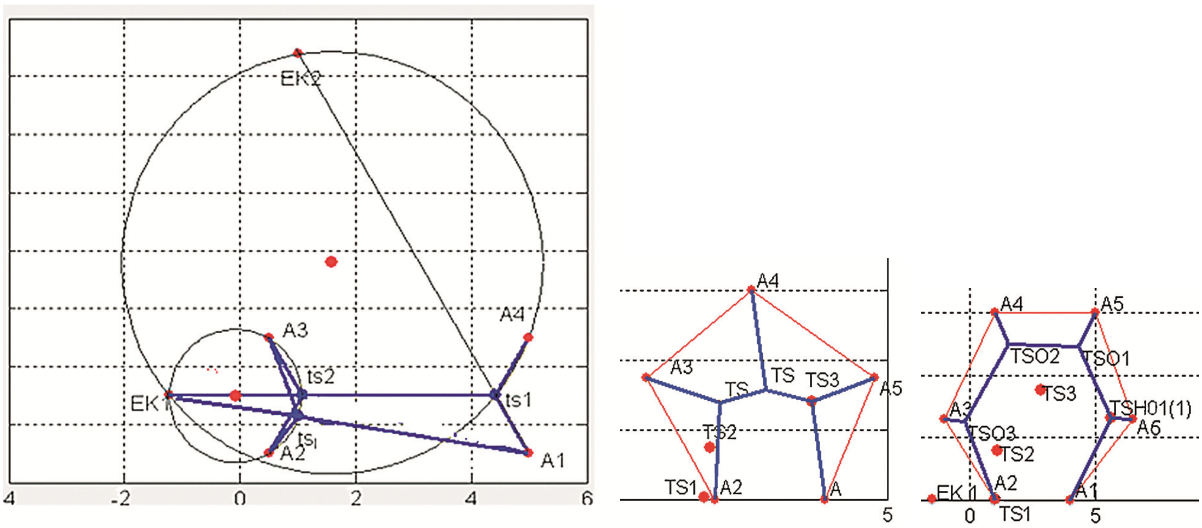
Шаг 2. Решаем трехточечную задачу для A_1, EK_1, A_4 и находим локализацию эквивалентного стока EK_2 и точки Штейнера TS_1, смежной с A_1 и A_4.

Шаг 3. Принимаем TS_1 за источник и, решая трехточечную задачу для TS_1, A_2, A_3, получаем окончательное решение задачи.

Шаг 1 и **шаг 2** считаются шагами вперед, а **шаг 3** — шагом назад.

Аналогичным образом ищутся деревья Штейнера для вершин правильного пятиугольника и вершин правильного шестиугольника (рис. 4*b*, 4*c*).

На рис. 4*a* можно видеть процесс пошагового решения задачи.



(a) (b) (c)

Рис. 4. Деревья Штейнера для вершин правильных многоугольников: (a) для четырехугольника, (b) для пятиугольника, (c) для шестиугольника

Заключение

Введение понятия эквивалентного стока позволяет быстро получить размещение точек Штейнера в задаче Штейнера небольшой размерности на эвклидовой плоскости при заданной матрице смежности.

Список литературы

Берн У., Грэм Л. Поиск кратчайших путей // Scientific American (издание на русском языке). — 1989. — № 3. — С. 64–70.

Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Физматгиз, 1960.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. — М.: МЦНМО, 2001.

Лотарев Д. Т. Решение трехточечной задачи Штейнера на плоскости средствами MatLab // Труды ИСА РАН. — 2008. — Т. 32. — С. 159–165.

Прим Р. Кратчайшие связывающие сети и некоторые их обобщения // Кибернетический сборник. — 1961. — № 2. — С. 95–107.