КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 3 С. 699−705

Ки&М

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

УДК: 004.021

Параллельное представление локального элиминационного алгоритма для ускорения решения разреженных задач дискретной оптимизации

Д. В. Лемтюжникова

Вычислительный центр имени А. А. Дородницына Российской академии наук,
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

E-mail: darabbt@gmail.com

Получено 19 марта 2015 г.

Алгоритмы декомпозиции являются методами решения NP-трудных задач дискретной оптимизации (ДО). В этой статье демонстрируется один из перспективных методов, использующих разреженность матриц, — локальной элиминационный алгоритм в параллельной интерпретации (ЛЭАП). Это алгоритм структурной из декомпозиции на основе графа, который позволяет найти решение поэтапно таким образом, что каждый последующих этапов использует результаты предыдущих этапов. В то же время ЛЭАП сильно зависит от порядка элиминации, который фактически является стадиями решения. Также в статье рассматриваются древовидный и блочный тип распараллеливания для ЛЭАП и необходимые процессы их реализации.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, добровольные вычисления, локальный элиминационный алгоритм, параллельные вычисления, разреженные задачи, элиминационное дерево

Parallel representation of local elimination algorithm for accelerating the solving sparse discrete optimization problems

D. V. Lemtyuzhnikova

Dorodnicyn Computing Centre of RAS, 40 Vavilov st., Moscow, 119333, Russia

The decomposition algorithms provide approaches to deal with NP-hardness in solving discrete optimization problems (DOPs). In this article one of the promising ways to exploit sparse matrices — local elimination algorithm in parallel interpretation (LEAP) are demonstrated. That is a graph-based structural decomposition algorithm, which allows to compute a solution in stages such that each of them uses results from previous stages. At the same time LEAP heavily depends on elimination ordering which actually provides solving stages. Also paper considers tree- and block-parallel for LEAP and required realization process of it comparison of a several heuristics for obtaining a better elimination order and shows how is related graph structure, elimination ordering and solving time.

Keywords: discrete optimization, volunteer computing, local elimination algorithm, parallel computing, sparse problems, elimination tree

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 699–705 (Russian).

© 2015 Дарья Владимировна Лемтюжникова

Модели многих задач, возникающих на практике, можно представить в виде задач дискретной оптимизации (1): задачи теории расписаний, задачи маршрутизации, задачи оптимизации производства и многие другие. Сложность таких задач заключается в том, что они зависят от большого числа дискретных переменных, поэтому для их решения естественно использовать алгоритмы, которые не обладают экспоненциальной сложностью, но при этом дают точное решение. В этом представляют интерес локальные элиминационные алгоритмы (ЛЭА), которые разбивают большую задачу на подзадачи и элиминируют переменные, понижая тем самым величину перебора [Щербина, 2008].

$$\begin{gathered} F(X) \to \max; \\ AX\sigma B; \\ X \in \{0;1\}; \\ \sigma = \{<, \leq, =, >, \geq\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Для работы ЛЭА кроме данных самой задачи — целевой функции, матрицы и вектора ограничений, — необходим порядок элиминации, который указывает, каким образом будут исключаться переменные в задаче. Для этого нужно построить элиминационное дерево (ЭД) задачи, которое строится из гиперграфа задачи при помощи некоторого критерия элиминации, связанного с характером задачи. Перспективным алгоритмом построения ЭД является древовидная декомпозиция [Щербина, 2007].

Для разветвленного ЭД имеет смысл применять технологию распараллеливания [Лемтюжникова, 2013], так как подзадачи, находящиеся на одной высоте дерева, являются независимыми. Такой вид распараллеливания будем называть *древовидным распараллеливанием*.

Рассмотрим подзадачу, соответствующую вершине ЭД. Она имеет блочную структуру, так как первичная задача была разреженной. Блоки такой подзадачи слабосвязные, поэтому имеет смысл разбивать такие блоки, перебирая переменные, которые являются сепараторами этих блоков. Такой вид распараллеливания будем называть *блочным*.

ЛЭА дважды проходит по ЭД. Прямой ход ЛЭА решает подзадачи и сохраняет промежуточные решения, а обратный ход ЛЭА анализирует и собирает решения подзадач.

Рассмотрим пример решения разреженной задачи при помощи параллельного локального элиминационного алгоритма блочного типа. Решим имеющую БД-структуру задачу ЦЛП, которой соответствует дерево инцидентности блоков (рис. 1):

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 + 4x_7 + x_8 + 2x_9 + 3x_{10} + 5x_{11} + 6x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} B_1 : x_4 + x_5 + 4x_6 + 2x_7 \leq 4; \\ B_2 : 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 6; \\ B_3 : 3x_7 + 8x_8 + 3x_9 + x_{10} \leq 8; \\ B_4 : x_9 + 2x_{11} + 3x_{12} \leq 4; \\ B_5 : x_{10} + x_{13} + 2x_{14} \leq 2; \\ x_j = 0,1,\ j = 1,2,\ldots,14. \end{gathered} \tag{2}$$

Перейдем к решению задачи.

I. Строим дерево инцидентности блоков.

Дерево инцидентности блоков строится следующим образом. Вершины дерева — сами блоки, то есть каждой вершине соответствует некоторое ограничение задачи. Две вершины соединяются ребром в том случае, когда в соответствующих ограничениях существуют одни и те же переменные. Затем выбирается корневая вершина. Ее необходимо выбрать таким образом, чтобы дерево состояло из минимального количества слоев. Дерево инцидентности блоков соответствует ЭД. Так как подзадачи, соответствующие некоторым вершинам и находящиеся на одном слое являются независимыми (B_4 и B_5 на третьем слое, а также B_2 и B_3 на втором слое), имеет место *древовидное распараллеливание*.

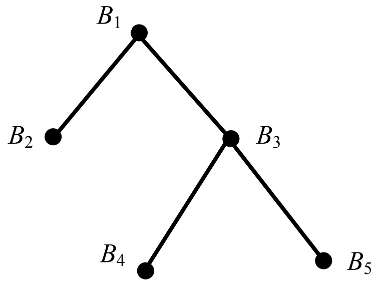

Рис. 1. Дерево инцидентности блоков

II. Решим параллельно подзадачи, соответствующие вершинам дерева инцидентности на последнем уровне.

1. Определимся с рассматриваемым блоком, множеством индексов переменных, принадлежащих одновременно текущему блоку и блоку, который является его предком и множеством потомков.

Начнем решение со слоя $v = L = 3,$ количество вершин на этом слое $l_3 = 2.$ Рассмотрим задачи, соответствующие блоку $r = 4,$ то есть четвертому ограничению, и блоку $r = 5$ — пятому ограничению. Они связаны ребром с вершиной $B_3,$ причем общей переменной ограничений B_3 и B_4 является $x_9,$ а для ограничений B_3 и B_5 — x_{10}. Значит, сепараторами блоков $r = 4$ и $r = 5$ являются $S_{34} = \{9\}$ и $S_{35} = \{10\}$ соответственно. Множество потомков для обеих вершин пусто.

2. Параллельно построим функцию для задач, соответствующих данным блокам.

Построим функцию для задачи D_4, соответствующей блоку $r = 4$. Для этого смотрим, какие еще переменные помимо x_9 присутствуют в этом ограничении $B_4 : x_9 + 2x_{11} + 3x_{12} \le 4.$ Это переменные x_{11} и x_{12}.	Построим функцию для задачи D_5, соответствующей блоку $r = 5$. Для этого смотрим, какие еще переменные помимо x_{10} присутствуют в этом ограничении $B_5 : x_{10} + x_{13} + 2x_{14} \le 2.$ Это переменные x_{13} и x_{14}

Теперь посмотрим на целевую функцию нашей задачи

$$z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 + 4x_7 + x_8 + 2x_9 + 3x_{10} + 5x_{11} + 6x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} \to \max.$$

Обратим внимание на коэффициенты при вышеназванных переменных x_{11} и x_{12}. Отсюда выписываем целевую функцию для задачи $D_4 : f_{D_4}\left(X_{S_{34}}\right) = \max\{5x_{11} + 6x_{12}\}$.	Обратим внимание на коэффициенты при вышеназванных переменных x_{13} и x_{14}. Отсюда выписываем целевую функцию для задачи $D_5 : f_{D_5}\left(X_{S_{35}}\right) = \max\{2x_{11} + 3x_{12}\}$.

3. Определим ограничения для этих функций.

Общая переменная x_9 переносится в правую сторону неравенства, ограничение задачи D_4: $2x_{11} + 3x_{12} \le 4 - x_9; x_{11}, x_{12} = \{0;1\}$.	Общая переменная x_{10} переносится в правую сторону неравенства, ограничение задачи D_5: $x_{13} + 2x_{14} \le 2 - x_{10}; x_{13}, x_{14} = \{0;1\}$.

4. Рассмотрим возможные значения общей переменной для каждой задачи. Обратим внимание, что блоки подзадач D_4 и D_5 слабосвязные, поэтому разобьем эти блоки, перебирая сепараторы, используем *блочное распараллеливание*.

Пусть $x_9 = 0$. | Пусть $x_9 = 1$. | Пусть $x_{10} = 0$. | Пусть $x_{10} = 1$.

Ограничение для данной задачи

$2x_{11} + 3x_{12} \le 4 - x_9$ имеет вид:

$2x_{11} + 3x_{12} \le 4 - 0$, то есть $2x_{11} + 3x_{12} \le 3$.

$2x_{11} + 3x_{12} \le 4 - 1$, то есть $2x_{11} + 3x_{12} \le 3$.

Переменные x_{11}, x_{12} могут принимать значения

$\{x_{11} = 1; x_{12} = 0\}$, $\{x_{11} = 0; x_{12} = 1\}$, $\{x_{11} = 0; x_{12} = 0\}$.

$\{x_{11} = 1; x_{12} = 0\}$, $\{x_{11} = 0; x_{12} = 1\}$, $\{x_{11} = 0; x_{12} = 0\}$.

Подставляя эти варианты в задачу D_4, получим, что максимальное значение для этой задачи $f_{D_4}(x_9) = \max\{5x_{11} + 6x_{12}\}$

$f_{D_4}(x_9) = f_{D_4}(0) = 6$ при переменных $X_{D_4}(0) = \{x_{11} = 0, x_{12} = 1\}$.

$f_{D_4}(x_9) = f_{D_4}(1) = 6$ при переменных $X_{D_4}(1) = \{x_{11} = 0, x_{12} = 1\}$.

$x_{13} + 2x_{14} \le 2 - x_{10}$ имеет вид

$x_{13} + 2x_{14} \le 2 - 0$, то есть $x_{13} + 2x_{14} \le 2$.

$x_{13} + 2x_{14} \le 2 - 1$, то есть $x_{13} + 2x_{14} \le 1$.

Переменные x_{13}, x_{14} могут принимать значения

$\{x_{13} = 1; x_{14} = 0\}$, $\{x_{13} = 0; x_{14} = 1\}$, $\{x_{13} = 0; x_{14} = 0\}$.

$\{x_{13} = 1; x_{14} = 0\}$, $\{x_{13} = 0; x_{14} = 0\}$.

Подставляя эти варианты в задачу D_5, получим, что максимальное значение для этой задачи $f_{D_5}(x_{10}) = \max\{2x_{13} + 3x_{14}\}$

$f_{D_5}(x_{10}) = f_{D_5}(0) = 3$ при переменных $X_{D_5}(0) = \{x_{13} = 0, x_{14} = 1\}$.

$f_{D_5}(x_{10}) = f_{D_5}(1) = 2$ при переменных $X_{D_5}(1) = \{x_{13} = 1, x_{14} = 0\}$.

III. Решим задачи, соответствующие другим слоям дерева инцидентности.

1. Перейдем на слой $v = 2$, количество вершин на этом слое $l_2 = 2$. Рассмотрим задачи, соответствующие блоку $r = 2$, то есть второму ограничению, и блоку $r = 3$ — третьему ограничению. Их вершина-предок $p_2 = 1$, то есть сепараторами являются $S_{12} = \{4\}$ и $S_{13} = \{7\}$ соответственно. Множество потомков для вершины B_2 пусто, а для B_3 : $J_3 = \{4,5\}$.

2. Параллельно построим функцию для задач и ограничений, соответствующих данным блокам.

Составим задачу D_2.

Так как вершина $r = 2$ не имеет потомков то кроме переменных, которые входят в целевую функцию, не нужно учитывать значения предыдущих функций. Соответствующая задача имеет вид $f_{D_2}\left(X_{S_{12}}\right) = \max\{2x_1 + x_2 + 3x_3\}$

при ограничениях

$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6 - x_4, x_1, x_2, x_3 = \{0;1\}$.

Если $x_4 = 0$, то $f_{D_2}(0) = 5$, $X_{D_2}(0) = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1\}$.

Если $x_4 = 0$, то $f_{D_2}(1) = 3$ $X_{D_2}(1) = \{x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1\}$.

Составим задачу D_3.

Так как вершина $r = 3$ имеет потомков $J_3 = \{4,5\}$, то кроме переменных, которые входят в целевую функцию, необходимо также учитывать значения функций, которые были получены при решении задач соответствующих дочерних блоков. Функция имеет вид

$$f_{D_3}\left(X_{S_{13}}\right) = \max\left\{x_8 + f_{D_4}(x_9) + f_{D_5}(x_{10}) + 2x_9 + 3x_{10}\right\}.$$

В ограничении общие переменные с другими блоками x_7, x_9 и x_{10} переносятся в правую сторону неравенства:

$8x_8 \le 8 - 3x_9 - x_{10} - 3x_7, x_8 = \{0;1\}$.

Если $x_7 = 0$, то $8x_8 \le 8 - 3x_9 - x_{10}$, $x_8 = 0$ $\forall x_9, x_{10}$ или $x_8 = 1, x_9 = 0, x_{10} = 0$.

Если $x_7 = 1$, то $8x_8 \le 5 - 3x_9 - x_{10}$, $x_8 = 0$ $\forall x_9, x_{10}$

3. Рассмотрим параллельно блоки-потомки для задачи D_3.

$x_9=0,\ f_{D_4}(0)=6,$ $X_{D_4}(0)=$ $=\{x_{11}=0,x_{12}=1\}.$	$x_9=1,\ f_{D_4}(1)=6,$ $X_{D_4}(1)=$ $=\{x_{11}=0,x_{12}=1\}.$	$x_{10}=0,\ f_{D_5}(0)=3,$ $X_{D_5}(0)=$ $=\{x_{13}=0,x_{14}=1\}.$	$x_{10}=1,\ f_{D_5}(1)=5,$ $X_{D_5}(1)=$ $=\{x_{13}=1,x_{14}=0\}.$

Рассмотрим функцию f_{D_3} при $x_7=0$, а точнее их части, связанные с переменными x_9 и x_{10} :

$x_9=0,$ $f_{D_4}(x_9)+2x_9+x_8=$ $=6+0+1=7,$ $X_{D_4}(0)=$ $=\{x_{11}=0,x_{12}=1\}.$	$x_9=1,$ $f_{D_4}(x_9)+2x_9+x_8=$ $=6+2+0=8,$ $X_{D_4}(1)=$ $=\{x_{11}=0,x_{12}=1\}.$	$x_{10}=0,$ $f_{D_5}(x_{10})+3x_{10}+x_8$ $=3+0+1=4,$ $X_{D_5}(0)=$ $=\{x_{13}=0,x_{14}=1\}.$	$x_{10}=1,$ $f_{D_5}(x_{10})+3x_{10}+x_8$ $=2+3+0=5,$ $X_{D_5}(1)=$ $=\{x_{13}=1,x_{14}=0\}.$

Следовательно, выбираем значение $x_9=1$. | Следовательно, выбираем значение $x_{10}=1$

Для x_9 и x_{10} максимальные значения получаются при $x_8=0$. Отсюда, $f_{D_3}(1)=x_8+f_{D_4}(x_9)+$ $+f_{D_5}(x_{10})+2x_9+3x_{10}=0+6+2+2+3=13,\ X_{D_3}(1)=\{x_{12}=1,x_{11}=0,x_9=1,x_{10}=1,x_8=0,x_{13}=1,x_{14}=0\}$

Рассмотрим функцию f_{D_3} при $x_7=1$, а точнее их части, связанные с переменными x_9 и x_{10}:

$x_9=0,$ $f_{D_4}(x_9)+2x_9+x_8=$ $=6+0+0=6$ $X_{D_4}(0)=$ $=\{x_{11}=0,x_{12}=1\}.$	$x_9=1,$ $f_{D_4}(x_9)+2x_9+x_8=$ $=6+2+0=8$ $X_{D_4}(1)=$ $=\{x_{11}=0,x_{12}=1\}.$	$x_{10}=0,$ $f_{D_5}(x_{10})+3x_{10}+x_8$ $=3+0+0=3$ $X_{D_5}(0)=$ $=\{x_{13}=0,x_{14}=1\}.$	$x_{10}=1,$ $f_{D_5}(x_{10})+3x_{10}+x_8$ $=2+3+0=5$ $X_{D_5}(1)=$ $=\{x_{13}=1,x_{14}=0\}.$

Следовательно, выбираем значение $x_9=1$. | Следовательно, выбираем значение $x_{10}=1$.

Отсюда $f_{D_3}(1)=x_8+f_{D_4}(x_9)+f_{D_5}(x_{10})+2x_9+3x_{10}=0+6+2+2+3=13,$

$X_{D_3}(1)=\{x_{12}=1,\ x_{11}=0,\ x_9=1,\ x_{10}=1,\ x_8=0,\ x_{13}=1,\ x_{14}=0\}$.

4. Перейдем к слою $\nu=1$, здесь всего одна вершина, $r=1$, причем $J_1=\{2,3\}$, $S_{13}=\{4\}$, $S_{12}=\{7\}$. Соответствующая задача Z_{D_r} имеет вид

$$f_{D_1}=\max\left\{x_5+3x_6+f_{D_2}(x_4)+f_{D_3}(x_7)+2x_4+4x_7\right\}$$

при ограничениях $x_5+4x_6\le 4-x_4-2x_7;\ x_5,x_6=\{0;1\}$.

Если $\{x_4=0,x_7=0\}$, то $\{x_5=0,x_6=1\}$, $\{x_5=1,x_6=0\}$ или $\{x_5=0,x_6=0\}$	Если $\{x_4=1,x_7=0\}$, то $\{x_5=1,x_6=0\}$ или $\{x_5=0,x_6=0\}$.	Если $\{x_4=0,x_7=1\}$, то $\{x_5=1,x_6=0\}$ или $\{x_5=0,x_6=0\}$.	Если $\{x_4=1,x_7=1\}$, то $\{x_5=1,x_6=0\}$ или $\{x_5=0,x_6=0\}$.

Рассмотрим блоки-потомки.

Если $x_4=0$, то $f_{D_2}(0)=5,\ X_{D_2}(0)=$ $=\{x_1=0,x_2=0,x_3=1\}.$	Если $x_4=1$, то $f_{D_2}(1)=3,\ X_{D_2}(1)=$ $=\{x_1=1,x_2=0,x_3=1\}.$	$x_7=\{0,1\}\ f_{D_3}=13,$ $X_{D_4}=\{x_9=1,x_{10}=1,x_{11}=0,x_{12}=1,x_{13}=1,x_{14}=0\}.$

Рассмотрим функцию f_{D_1}, а точнее ее часть, связанную с переменными x_4 и x_7:

$x_4 = 0$	$x_4 = 1$	$x_7 = 0$	$x_7 = 1$
$x_5 + 3x_6 + f_{D_2}(0) + 2x_4 =$	$x_5 + 3x_6 + f_{D_2}(1) + 2x_4 =$	$x_5 + 3x_6 + f_{D_3}(0) + 4x_7 =$	$x_5 + 3x_6 + f_{D_3}(1) + 4x_7 =$
$= 0 + 3 + 5 + 0 = 8.$	$= 1 + 0 + 3 + 2 = 6.$	$= 13 + 0 = 13.$	$= 1 + 0 + 13 + 4 = 18.$
Следовательно, выбираем значение $x_4 = 0.$		Следовательно, выбираем значение $x_7 = 1.$	

IV. Решим задачу, соответствующую корневой вершине:

$$f_{D_1} = \max\left\{x_5 + 3x_6 + f_{D_2}(x_4) + f_{D_3}(x_7) + 2x_4 + 4x_7\right\} = x_5 + 3x_6 + 3 + f_{D_3}(x_7) + 2 + 4.$$

Оптимальному решению соответствуют $x_4 = 0, x_7 = 1,$ причем $f_{D_1} = 23.$

V. Выпишем вектор значений исходя из решенных задач и произведем проверку:

$$X_{D_1} = \{x_{12} = 1, x_{11} = 0, x_{13} = 1, x_{14} = 0, x_8 = 0, x_9 = 1,$$
$$x_{10} = 1, x_4 = 0, x_7 = 1, x_5 = 1, x_6 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1\}.$$

Упорядочивая переменные, приходим к тому, что решение исходной задачи (которое, как уже отмечено, совпадает с решением задачи Z_{D_1}) имеет вид $x_1 = 1,$ $x_2 = 0,$ $x_3 = 1,$ $x_4 = 0,$ $x_5 = 1,$ $x_6 = 0,$ $x_7 = 1,$ $x_8 = 0,$ $x_9 = 1,$ $x_{10} = 1,$ $x_{11} = 0,$ $x_{12} = 1,$ $x_{13} = 1,$ $x_{14} = 0,$ $Z_{\max} = 23.$

При параллельной трактовке ЛЭА необходимо, чтобы реализовывались следующие процессы:

– процесс, который анализирует ЭД и выявляет подзадачи на данном уровне дерева;

– процесс, который распределяет подзадачи;

– процесс, который решает подзадачи;

– процесс, который анализирует подзадачи, записывает результат и создает задачи следующего уровня на основе полученной информации;

– процесс, который собирает информацию воедино;

– процесс, который анализирует полученное решение.

Для реализации этих процессов целесообразно использование парадигмы «Директор–мастер–рабочий». Директор анализирует ЭД, выделяет подзадачи на данном уровне и отправляет их мастеру. Мастер распределяет задачи среди рабочих, собирает полученные результаты и отправляет их обратно директору. Директор анализирует подзадачи, записывает результат в таблицу и, если корень ЭД не достигнут, создает задачи следующего уровня и отправляет мастеру. Если же корень ЭД был достигнут, директор просматривает таблицу промежуточных решений, выбирает оптимальное и проверяет целевую функцию. Если значение целевой функции в корне совпало со значением исходной целевой функции для полученного решения, то задача решена верно.

Для реализации парадигмы «директор–мастер–рабочий» хорошо подходит платформа распределенных вычислений BOINC (*Berkeley Open Infrastructure for Network Computing*) [Российские распределенные вычисления…], где директором назначается компьютер, на котором непосредственно решается задача, мастером назначается удаленный боинк-сервер, а рабочими процессами — удаленные компьютеры. Распределенные вычисления позволяют быстро решать объемные задачи, так как к процессу решения привлечено большое количество пользователей, а значит, и удаленных компьютеров. В данный момент ведется разработка параллельного ЛЭА для использования его на платформе BOINC.

Список литературы

Лемтюжникова Д. В., Щербина О. А. Локальный элиминационный алгоритм и параллельные вычисления // Интеллектуальные системы. МГУ. — 2013. — 17 (часть 5). — С. 490–494.

Российские распределенные вычисления на платформе BOINC [Электронный ресурс]. URL: http://www.boinc.ru/

Щербина О. А. Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 1. — С. 161–177.

Щербина О. А. Древовидная декомпозиция и задачи дискретной оптимизации (обзор) // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 4. — С. 102–118.