

УДК: 519.8

Моделирование эволюции песчано-гравийного дна канала в одномерном приближении

И. И. Потапов^а, К. С. Снигур^б

Вычислительный Центр ДВО РАН,
Россия, 680000, г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65

E-mail: ^а potapovii@rambler.ru, ^б snigur_ks@rambler.ru

*Получено 16 сентября 2014 г.,
после доработки 19 марта 2015 г.*

В работе предложена математическая модель для одномерного неравновесного руслового процесса. Модель учитывает движение наносов во взвешенном и влекомом состоянии. Транспорт влекомых наносов определен с помощью оригинальной формулы, аналитически полученной из уравнения движения тонкого придонного водогрунтового слоя. Данная формула не содержит новых феноменологических параметров и учитывает влияние уклона дна, физико-механических и гранулометрических параметров донного материала на процесс транспорта влекомых наносов. Для верификации предложенной модели был решен ряд классических тестовых задач. Выполнено сравнение результатов численных расчетов с известными экспериментальными данными и результатами других авторов. Показано, что, несмотря на относительную простоту предложенной математической модели, полученные численные решения хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: влекомые наносы, неравновесность, донные деформации, русловые процессы

Modeling of sand-gravel bed evolution in one-dimension

I. I. Potapov, K. S. Snigur

Computer Center FEB RAS, 65, Kim U Chena st., Khabarovsk, 680000, Russia

Abstract. — In the paper the model for a one-dimensional non-equilibrium riverbed process is proposed. The model takes into account the suspended and bed-load sediment transport. The bed-load transport is determined by using the original formula. This formula was derived from the thin bottom layer motion equation. The formula doesn't contain new phenomenological parameters and takes into account the influence of bed slope, granulometric and physical mechanical parameters on the bed-load transport. A number of the model test problems are solved for the verification of the proposed mathematical model. The comparison of the calculation results with the established experimental data and the results of other authors is made. It was shown, that the obtained results have a good agreement with the experimental data in spite of the relative simplicity of the proposed mathematical model.

Keywords: bed-load sediment, non-equilibrium, riverbed deformations, channel processes

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 315–328 (Russian).

Введение

В настоящее время существует большое количество математических моделей, описывающих процесс деформации донной поверхности [Kerssens, van Rijn, 1977; van Rijn, 1986; Wu, 2001; Singh, 2002; Wu, Viera, 2002; Sanchez, Wu, 2011]. Однако большая часть из них содержит эмпирические параметры и полуаналитические зависимости, которые усложняют математическую модель и позволяют лишь качественно оценивать характер развития русловых процессов, требуя для конкретных расчетов дополнительной адаптации.

В работе предложена одномерная неравновесная русловая модель, основанная на моделях [Петров, 1991; Потапов, Снигур, 2011; Потапов, Снигур, 2014], которая учитывает движение донного материала во взвешенном и влекомом состоянии. Гидродинамическая часть модели включает уравнения движения водного потока в рамках приближения «мелкой воды». Транспорт влекомых наносов определяется с помощью оригинальной формулы, аналитически полученной из уравнения движения тонкого придонного слоя. Формула позволяет учитывать влияние гранулометрических и физико-механических характеристик донного материала при расчете деформаций донной поверхности.

Для верификации предложенной модели решен ряд тестовых задач. Выполнено сравнение результатов численных расчетов с известными экспериментальными данными [Newton, 1951; Kerssens, van Rijn, 1977; van Rijn, 1986; Seal et al., 1997] и результатами других авторов [Kerssens, van Rijn, 1977; van Rijn, 1986; Wu, 2001; Singh, 2002; Wu, Viera, 2002; Sanchez, Wu, 2011].

Математическая постановка

Рассматривается задача описания длинноволновых деформаций песчаного дна равнинной реки или канала со спокойным потоком, имеющим постоянный расход Q . Поскольку характерное время релаксации процессов донных изменений на два–четыре порядка больше времени релаксации гидродинамического потока, в расчетах можно использовать стационарные уравнения гидродинамики [Картелишвили, 1973; Рекомендации по прогнозу..., 2005].

Для определения осредненной по глубине скорости жидкости $U = U(x)$ и глубины канала H используются стационарные одномерные по координате x уравнения гидравлики в приближении мелкой воды [Картелишвили, 1973; Гришанин, 1974; Рекомендации по прогнозу..., 2005]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2g} + \eta \right) + \frac{\tau}{gH\rho_w} = 0, \quad Q = UH, \quad (1)$$

где g — ускорение свободного падения, τ — придонные касательные напряжения, ρ_w — плотность воды. Ось x направлена по скорости потока U , декартова координата y направлена перпендикулярно вверх. $y = \zeta(t, x)$ — отметка дна, $y = \eta(t, x) = H + \zeta(t, x)$ — отметка свободной поверхности.

В большинстве случаев речные потоки могут рассматриваться как медленно изменяющиеся, тогда при численном моделировании гидродинамический поток можно считать квазистационарным на каждом временном шаге продолжительностью Δt [Рекомендации по прогнозу..., 2005].

Изменение отметки дна определяется из уравнения Экснера для сохранения песчаной массы [Exner, 1925; Белолипецкий, Генова, 2004]:

$$(1 - \varepsilon)\rho_s \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} = -\alpha \frac{W}{H} (S_* - S), \quad (2)$$

где t — временная координата, ε — коэффициент пористости песчаного дна, ρ_s — плотность частиц песка, G — удельный массовый расход влекомых наносов, $\alpha \in (0; 1)$ — феноменологический параметр регулировки транспорта взвешенных наносов, определяемый из согласования с экспериментальными данными, W — гидравлическая крупность, S — средняя субстанциальная мутность (находимая путем осреднения мутности по живому сечению потока без учета скорости течения), S_* — транспортирующая способность потока. Для замыкания уравнения (2) используется зависимость удельного расхода влекомых наносов G от придонного касательного напряжения и локальных уклонов донной поверхности [Петров, 1991]:

$$G = G_0 \tau^{\frac{3}{2}} \left[(1 - \chi) - \frac{1}{\tan \varphi \cos \gamma} \left(1 - \frac{\chi}{2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right], \quad (3)$$

$$G_0 = \frac{4}{3} \frac{\rho_s m}{\kappa \sqrt{\rho_w} (\rho_s - \rho_w) g \tan \varphi \cos \gamma}, \quad m = \begin{cases} 1, & \chi < 1, \\ 0, & \chi \geq 1, \end{cases}$$

$$\chi = \sqrt{\frac{\tau_*}{\tau}}, \quad \tau_* = \frac{3 \kappa^2 d (\rho_s - \rho_w) g \tan \varphi \cos \gamma}{8 c_x}, \quad (4)$$

где τ_* — критическое придонное касательное напряжение, φ — угол внутреннего трения частиц, c_x — коэффициент лобового сопротивления частиц, d — средний диаметр частиц, γ — острый угол между нормалью к поверхности дна и вертикальной линией, κ — постоянная Кармана.

Для определения средней субстанциальной мутности взвешенных наносов S в уравнении (2) используется уравнение переноса [Караушев, 1977; Белолипецкий, Генова, 2004; Singh, 2002]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S U}{\partial x} = \alpha \frac{W}{H} (S_* - S). \quad (5)$$

Транспортирующая способность потока S_* находится по формуле [Караушев, 1977]

$$S_* = \begin{cases} \beta \frac{U^3}{WH}, & W < u_*, \\ 0, & W \geq u_*, \end{cases} \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_*}{\rho_w}}, \quad \beta = 0.2. \quad (6)$$

Для определения придонного касательного напряжения τ используется формула Шези–Маннинга [Гришанин, 1974]:

$$\tau = \rho_w g \frac{U^2}{C^2}, \quad C = \frac{1}{n_s} H^{\frac{1}{6}}, \quad (7)$$

где n_s — шероховатость донного материала по Маннингу.

Уравнения (1)–(7) при заданном расходе Q замыкаются начальными условиями

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0(x), \quad S(x, 0) = S_b(x) \quad (8)$$

и граничными условиями

$$S(0, t) = S_0, \quad G(0, t) = G_0, \quad \frac{\partial \zeta(L, t)}{\partial x} = J, \quad H(L, t) = H_0, \quad (9)$$

где ζ_0 — начальный уровень донной поверхности, H_0 — глубина потока на выходе из расчетной области, G_0 — удельный массовый расход влекомых наносов, поступающих в расчетную область, S_b — средняя субстанциальная мутность в начальный момент времени, S_0 — средняя субстанциальная мутность, поступающая в расчетную область, J — основной уклон донной поверхности, L — длина расчетной области.

Метод решения

Решение стационарного уравнения гидродинамики (1) осуществлялось с помощью метода обратного счета [Тамагоз, 1964], имеющего первый порядок точности. Уравнение донных деформаций (2) решалось с использованием метода Патанкара [Патанкар, 1977] и явной схемы аппроксимации производных, имеющей второй порядок точности по пространству и первый — по времени. В расчетах использовалась регулярная пространственная и временная сетка, имеющая шаг Δx по пространству и Δt — по времени. Для устойчивого решения уравнения (2) выполнялось условие [Флетчер, 1991]

$$C_u = \frac{U\Delta t}{\Delta x} < 0.7, \quad (10)$$

где C_u — число Куранта. Уравнение транспорта взвешенных наносов (5) решалось с помощью неявной схемы бегущего счета [Белолыпецкий, Генова, 2004], имеющей первый порядок точности по пространству и времени.

Оценка точности проводилась путем построения решения на последовательно измельчаемых сетках [Флетчер, 1991]. Качество сетки полагалось достаточным при выполнении условия

$$\max_{i=0\dots N, n=0\dots T} \frac{[\zeta_i^n]_{\text{old}} - [\zeta_i^n]_{\text{new}}}{[\zeta_i^n]_{\text{old}}} \leq 0.0001, \quad (11)$$

где $[\zeta_i^n]_{\text{old}}$ — значение функции ζ в i -том узле на n -ом временном слое на сетке без сгущения, $[\zeta_i^n]_{\text{new}}$ — значение функции ζ в i -том узле на n -ом временном слое на сетке со сгущением.

Пошаговый алгоритм решения задачи (1)–(9) представлен в работе [Потапов, Снигур, 2014] и реализован в программном комплексе [Потапов, Снигур, 2014с].

Верификация модели

Для верификации предложенной модели авторами выполнено решение ряда модельных русловых задач. Однако в силу требований к объему работы ниже приводится решение только трех типов задач о деформации донной поверхности.

- Задача об эрозии дна осветленным гидродинамическим потоком [Newton, 1951].
- Задача о движении клина донных наносов [Seal et al., 1997].
- Задача о деформации каверны транзитным гидродинамическим потоком [Kerssens, van Rijn, 1977; van Rijn, 1986].

Решение данного набора тестовых задач позволяет оценить способность модели отражать процесс размыва и намыва донной поверхности.

Перед решением каждой задачи необходимо оценить вклад взвешенных наносов в процесс формирования донной поверхности. Воспользуемся рекомендациями [Петров, Петров, 2000] и, в соответствии с гравитационной теорией взвешенных наносов [Великанов, 1948], оценим скорость убывания средней субстанциальной мутности S по глубине потока:

$$S = S_0 \left(\frac{a}{y} \right)^K, \quad K = \frac{W}{\kappa u_*} = \frac{1.4 \sqrt{(\rho_s - \rho_w)gd}}{\kappa \sqrt{\rho_w g H J}}, \quad (12)$$

где $a \approx 2d$ — глубина активного слоя, u_* — динамическая скорость, $\kappa = 0.4$, $a < y < H$.

Принадлежность степенного параметра K к диапазону значений от 3 до 12 свидетельствует о быстром убывании средней субстанциальной мутности по глубине потока [Петров, Петров, 2000]. В этом случае влиянием взвешенных наносов можно пренебречь, то есть можно не решать уравнение (5), предполагая, что при $H \leq x < a$ мутность S очень быстро достигает значения S_* в силу его малости, что избавляет нас от использования феноменологических параметров α и β .

Для задач о размыве дна осветленным гидродинамическим потоком степенной параметр K изменяется в пределах 7.9–9, для задач о движении клина донных наносов параметр K равен 10.19 и 10.81. Все вышеуказанные значения $K \in (3, 12)$, следовательно, транспорт взвешенных наносов в данных задачах можно не учитывать. Однако для задач о деформации каверны параметры K равны 0.01 и 0.9, следовательно, в данных задачах транспорт взвешенных наносов учитывать необходимо.

Задача о размыве донной поверхности

При решении задачи о размыве донной поверхности при набегании на нее осветленного потока использовались следующие параметры: $d = 0.00069$ м, $\varphi = 32^\circ$, $c_x = 0.45$, $\varepsilon = 0.375$, $n_s = 0.015$, $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\rho_s = 2650$ кг/м³, $g = 9.8$ м/с², $\kappa = 0.4$, $L = 9.14$ м, $\zeta_0 = \zeta_b - Jx$, $\zeta_b = 0.1$ м, $S_b = 0$ кг/м², $G_0 = 0$ кг/(мс), $S_0 = 0$ кг/м², согласованные с параметрами из экспериментальной работы [Newton, 1951]. Отличающиеся параметры расчета задач 1, 2 и 3 показаны в таблице 1. Пространственный шаг сетки $\Delta x = 0.11$, временной шаг $\Delta t = 0.2$.

Таблица 1. Русловые параметры

№ задачи/параметр	H_0 , м	U , м/с	J
Задача 1	0.0411	0.45	0.00416
Задача 2	0.0411	0.45	0.00416
Задача 3	0.0365	0.5	0.0061

На рисунке 1 приведены полученные донные профили (сплошные кривые), экспериментальные данные [Newton, 1951] (точечные множества) и донные профили, полученные по модели [Singh, 2002] (пунктирные кривые), кривой 1 обозначен начальный донный профиль, группой кривых 2, 3 и 4 показаны профили донной поверхности в моменты времени 1, 2 и 3 часа соответственно. Как видно на рисунке 1, донный профиль, полученный по модели [Singh, 2002], максимально отклоняется от экспериментальных данных в начале расчетной области, где относительная погрешность расчетных данных по сравнению с экспериментальными данными достигает 12%. Решения, полученные по предложенной модели, лучше согласуются с экспериментальными данными, ее максимальная относительная погрешность не превышает 9%.

На рисунках 2 и 3 приведены расчетные донные профили (сплошные кривые), экспериментальные данные [Newton, 1951] (точечные множества) и результаты моделирования по модели SSC1D [Wu, Viera, 2002] (пунктирные кривые). На рисунке 2 кривой 1 обозначен начальный профиль дна, группами кривых 2, 3 и 4 обозначены профили донной поверхности в моменты времени 1, 4 и 24 часа соответственно. На рисунке 3 кривой 1 обозначен начальный профиль дна, группами кривых 2, 3, 4, 5 и 6 обозначены профили донной поверхности в моменты времени 1, 2.17, 4, 12 и 27 часов соответственно. Из графиков, приведенных на рисунках 2 и 3, видно, что максимальное отклонение расчетных данных по предложенной модели от экспериментальных данных в моменты времени 1, 2, 2.17 и 4 часа не превышает 5%. Модель [Wu, Viera, 2002] на данных временах наблюдения восстанавливает фронт размыва менее точно, ее относительная погрешность достигает 18%. Но при более длительном размыве (12, 24 и 27 часов) расчетные данные по предложенной модели сильнее отклоняются от экспериментальных

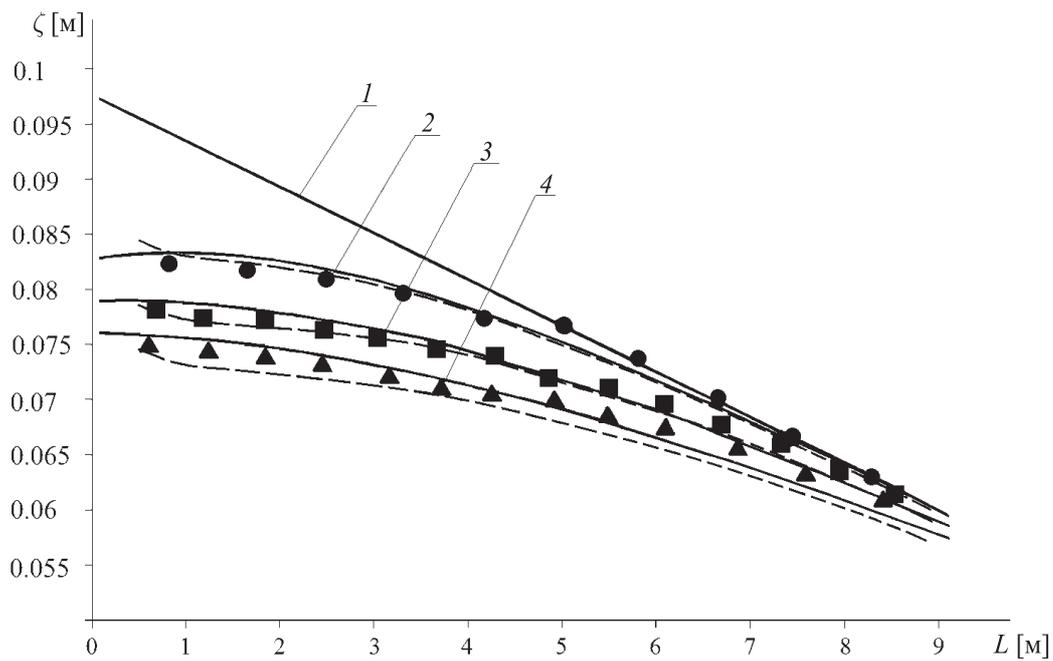


Рис. 1. Сравнение экспериментальных данных и расчетных данных. Задача 1

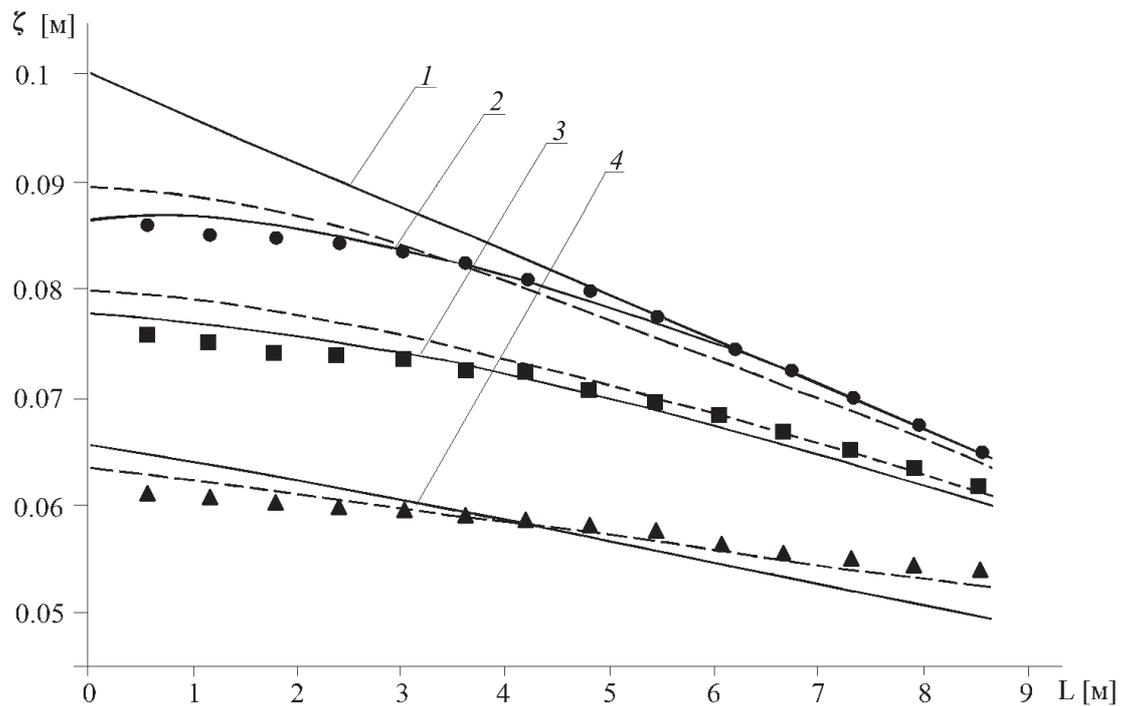


Рис. 2. Сравнение экспериментальных данных и расчетных данных. Задача 2

данных по сравнению с расчетами [Wu, Viera, 2002]. Наблюдается недостаточный размыв в начале расчетной области и избыточный размыв на выходе из расчетной области. Таким образом, расчетный профиль донной поверхности имеет более сильный уклон, чем экспериментальный

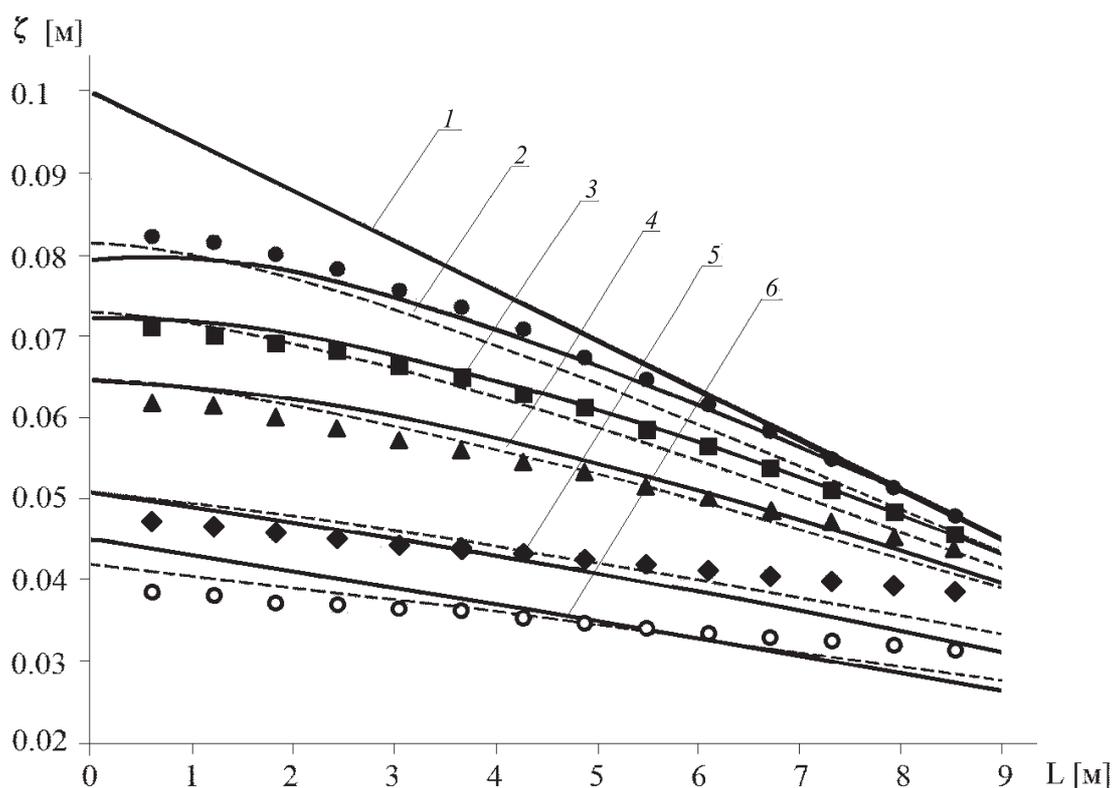


Рис. 3. Сравнение экспериментальных данных и расчетных данных. Задача 3

профиль. На рисунке 4 приведена динамика изменения глубины размыва в начале, середине и конце расчетной области, а так же график расхода наносов на выходе из расчетной области для задачи 3, сплошными линиями обозначены расчетные данные, точечными множествами — экспериментальные данные [Newton, 1951], пунктирной линией — результаты расчетов по модели [Wu, Viera, 2002]. Несмотря на отклонения расчетных профилей дна от экспериментальных профилей, предложенная модель с достаточной для практики точностью предсказывает расход донных наносов на выходе из расчетной области.

Причиной отклонения расчетных донных профилей от экспериментальных при длительном размыве может быть несоответствие расчетных и фактических сдвиговых напряжений, которое связано с образованием на дне канала коротковолновых донных форм. Косвенно на это указывает изменение шероховатости от 0.016 в начале расчетной области до 0.012 в конце расчетной области, экспериментально определенное [Newton, 1951]. Решения по предложенной модели были получены при постоянной шероховатости дна, равной 0.015. Тем не менее в целом по изменению уровня донной поверхности предложенная модель качественно и количественно описывает процесс размыва донной поверхности осветленным потоком, полученные результаты согласуются с экспериментальными данными, средняя относительная погрешность расчетных данных во всех трех задачах не превосходит 22%. Отметим, что в модели SSHE1D распределение шероховатости от начального значения до конечного задавалось с помощью регрессионной функции, однако авторы [Wu, Viera, 2002] получили качественно аналогичные результаты, полученный ими средний уклон дна также превышает экспериментальный. Относительная погрешность расчетных данных по модели [Wu, Viera, 2002] не превосходит 14%.

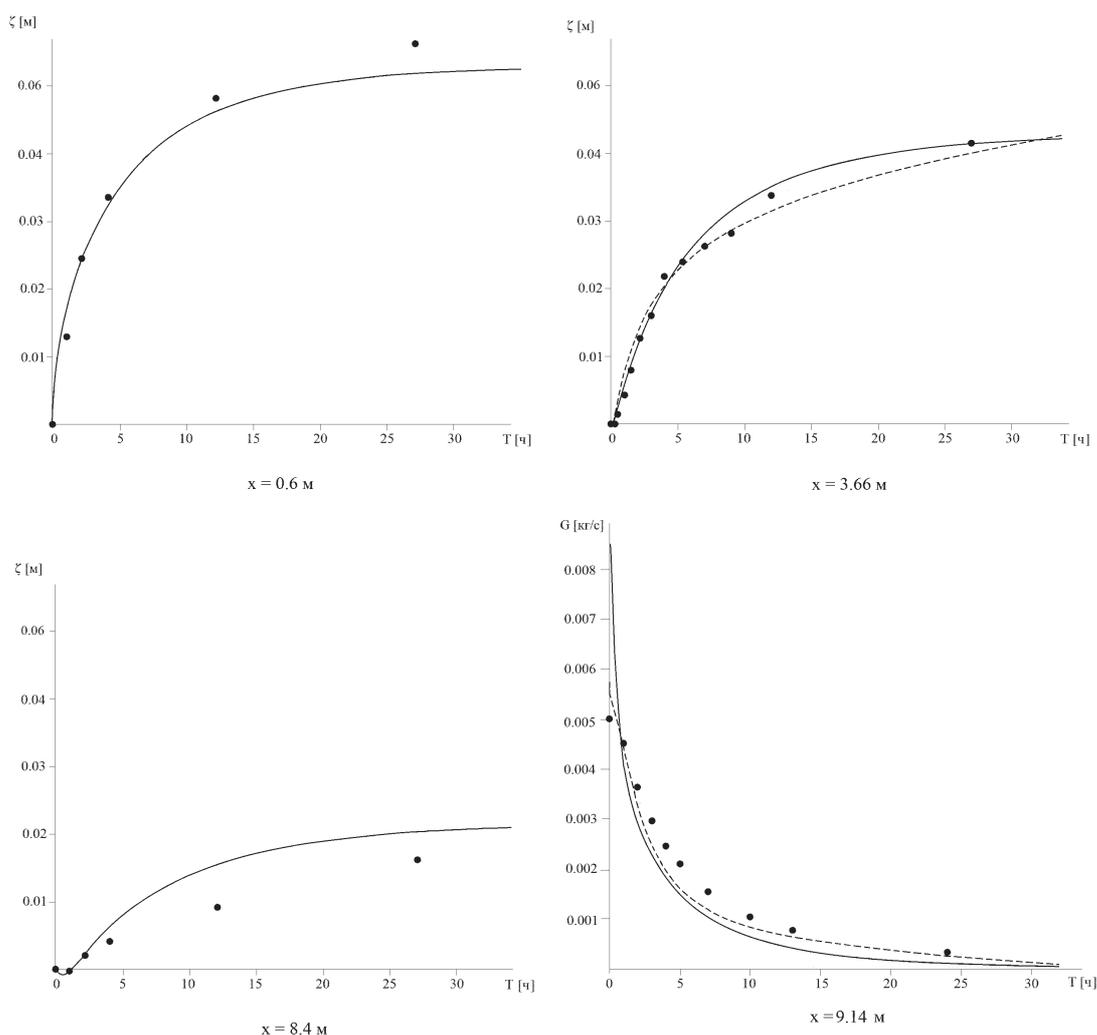


Рис. 4. Глубина размыва дна в точке $x = 0.6$ м, $x = 3.66$ м, $x = 8.4$ м и расход наносов в точке $x = 9.14$ м

Задача о движении клина донных наносов

Для оценки способности модели описывать процесс намыва донной поверхности, выполнено решение ряда модельных задач о движении клина донных наносов. Параметры расчета взяты из экспериментальной работы [Seal et al., 1997]: $\varphi = 47^0$, $c_x = 0.15$, $\varepsilon = 0.23$ [Wu, Viera, 2002], $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\rho_s = 2650$ кг/м³, $g = 9.8$ м/с², $\kappa = 0.4$, $L = 45$ м, $S_b = 0$ кг/м², $S_0 = 0$ кг/м²; $\zeta_0 = \zeta_k - J_k x$, при $x \leq 5$ м $\zeta_k = 0.33$ м, $J_k = 0.02$, при $5 < x \leq 5.13$ $\zeta_0 = 5.58$ м, $J_k = 1.07$, при $x > 5.13$ м $\zeta_k = 0.1$ м, $J_k = 0.002$. В эксперименте был использован смешанный гранулометрический материал с диаметром частиц в диапазоне 0.125 мм – 64 мм и средним диаметром частиц $d = 4.63$ мм, используемым в расчетах. Отличающиеся русловые параметры для задач 1 и 2 указаны в таблице 2. Пространственный шаг сетки $\Delta x = 0.12$, временной шаг $\Delta t = 0.2$.

На рисунке 5 приведены полученные донные профили (сплошные кривые), экспериментальные данные [Seal et al., 1997] (точечные множества) и донные профили, полученные по модели [Wu, 2001] (пунктирные кривые), кривой 1 обозначен начальный донный профиль, группой кривых 2, 3 и 4 показаны профили донной поверхности в моменты времени 2, 8 и 16.8 часов соответственно. На рисунке 6 приведены полученные донные профили (сплошные кривые), экс-

Таблица 2. Русловые параметры

№ задачи/параметр	H_0 , м	U , м/с	G_0 , кг/(мс)
Задача 1	0.4	0.4	0.62
Задача 2	0.45	0.357	0.31

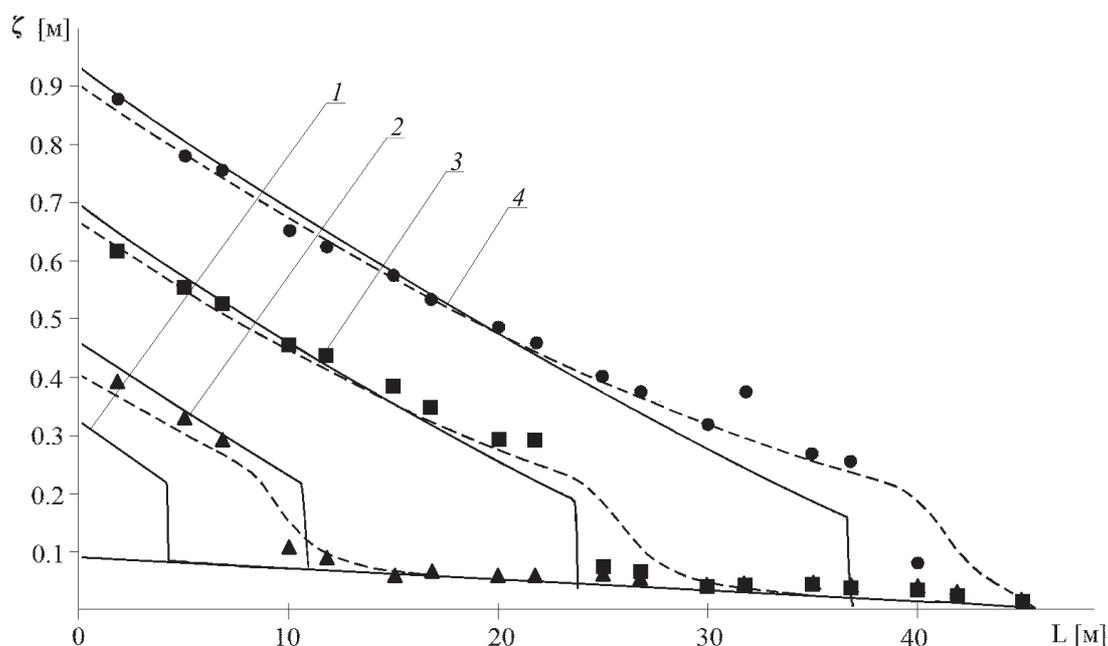


Рис. 5. Сравнение экспериментальных данных и расчетных данных. Задача 1

периментальные данные [Seal et al., 1997] (точечные множества) и донные профили, полученные по модели [Wu, Viera, 2002] (пунктирные кривые), кривой 1 обозначен начальный донный профиль, группой кривых 2, 3 и 4 показаны профили донной поверхности в моменты времени 4, 16 и 32.4 часов соответственно.

Из графиков, представленных на рисунках 5 и 6, видно, что несмотря на неоднородный фракционный состав намываемого клина, полученные донные профили хорошо согласуются с экспериментальными данными. Предложенная русловая модель хорошо восстанавливает горизонтальный фронт клина, выдерживает скорость сдвига клина, максимальное отклонение расчетных данных от экспериментальных наблюдается на вертикальном фронте клина донных наносов. Данное отклонение связано с резким увеличением глубины, которое способствует осаждению мелких фракций наносов и формированию сглаженного профиля клина. Так как предложенная модель является однофракционной, она не способна учесть данный процесс. Средняя относительная погрешность расчетных данных по предложенной модели равна 3% и 5% для первой и второй задач соответственно.

Профили, полученные по модели SCHE1D [Wu, Viera, 2002] и SCHE2D [Wu, 2001] более плавные и восстанавливают вогнутость профиля клина и вертикальный фронт клина донных наносов. Но, несмотря на это, решения [Wu, 2001; Wu, Viera, 2002] имеют среднюю относительную погрешность, которая незначительно меньше погрешности полученных по предложенной модели решений, 2.3% и 2% для задач 1 и 2 соответственно.

Таким образом, предложенная модель качественно не уступает моделям [Wu, Viera, 2002; Wu, 2001].

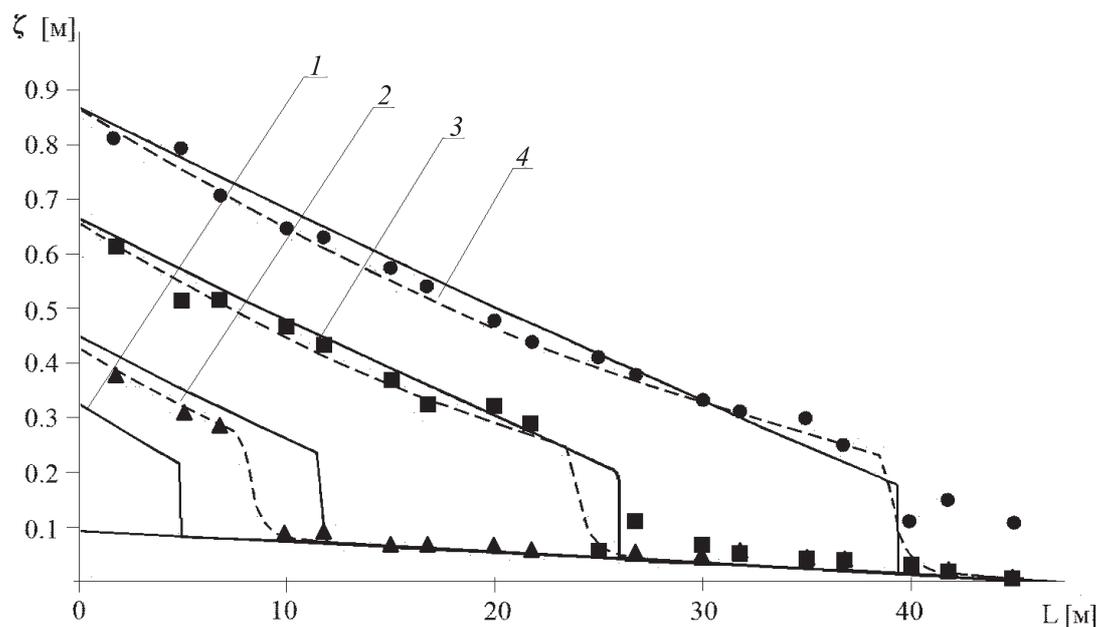


Рис. 6. Сравнение экспериментальных данных и расчетных данных. Задача 2

Задача о деформации каверны

При решении задачи о деформации каверны транзитным гидродинамическим потоком использовались следующие параметры: $d = 0.0001$ м, $c_x = 0.4$, $\varphi = 26^0$, $\alpha = 0.25$, $\varepsilon = 0.4$, $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\rho_s = 2650$ кг/м³, $g = 9.8$ м/с², $\kappa = 0.4$, $L = 17$ м, $J = 0.0002$, $U = 0.18$ м/с, $H_0 = 0.255$ м, $h = 0.125$ м — глубина каверны, $L_m = 4.5$ м — общая длина каверны, $L_c = 1.5$ м — длина донной части каверны, $W = 0.005$ м/с, $S_b = S_*$ кг/м², $G_0 = 0.0063$ кг/(мс), $S_0 = 0.9213$ кг/м², согласованные с экспериментальными данными [van Rijn, 1986]. Пространственный шаг сетки $\Delta x = 0.57$, временной шаг $\Delta t = 2$.

На рисунке 7 приведен полученный донный профиль (сплошная кривая), экспериментальные данные [van Rijn, 1986] (точечные множества) и донные профили, полученные по моделям [Sanchez, Wu, 2011] (штрихпунктирная кривая) и [van Rijn, 1986] (пунктирная кривая), кривой 1 обозначен начальный донный профиль, группой кривых 2 показан уровень донной поверхности в момент времени 10 часов.

Из сравнения полученного решения и решений [van Rijn, 1986; Sanchez, Wu, 2011] с экспериментальными данными [van Rijn, 1986] видно, что решения, полученные по моделям [van Rijn, 1986] и [Sanchez, Wu, 2011], не могут правильно восстанавливать фронтальное движение подветренного склона каверны и осуществляют избыточный размыв донной поверхности напорного склона каверны. Решения, полученные в [Sanchez, Wu, 2011; van Rijn, 1986], имеют относительную погрешность по отношению к экспериментальным данным в среднем 15–20%. Результаты, полученные по предложенной модели, имеют хорошее согласование с экспериментальными данными. Отметим, что предложенная модель хорошо восстанавливает движение подветренного и напорного склона каверны, глубину каверны, не приводит к избыточному размыву донной поверхности в основной выходной части канала. Средняя относительная погрешность полученного решения по сравнению с экспериментальными данными не превышает 5%, что близко к систематической точности отдельных экспериментальных измерений [van Rijn, 1986].

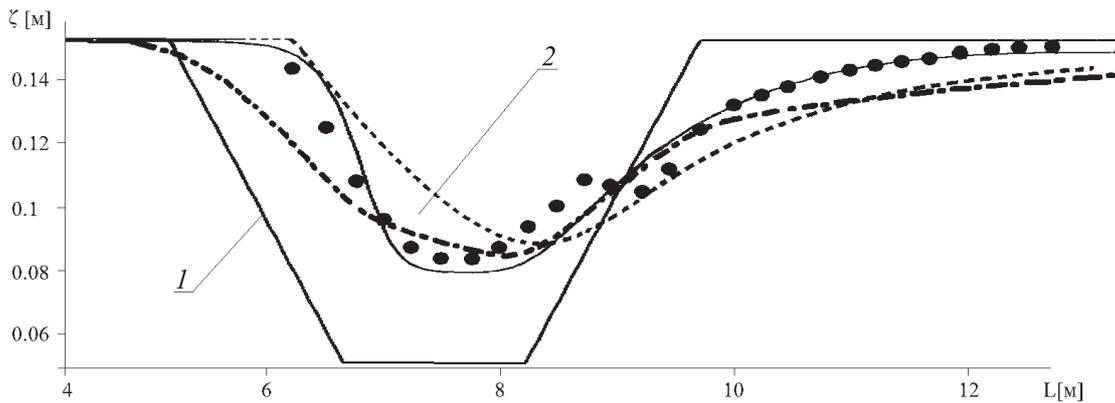


Рис. 7. Сравнение экспериментальных данных и расчетных данных, время наблюдения. Задача 1

Для решения задачи 2 о деформации каверны использовались следующие физико-механические и гранулометрические параметры, взятые из работы [Kerssens, van Rijn, 1977]: $d = 0.00017$ м, $c_x = 0.5$, $\varphi = 22^\circ$, $\alpha = 0.4$, $\varepsilon = 0.3$, $\rho_w = 1000$ кг/м³, $\rho_s = 2610$ кг/м³, $g = 9.8$ м/с², $\kappa = 0.4$, $L = 30$ м, $J = 0.0002$, $H_0 = 0.39$ м, $U = 0.5$ м/с, $h = 0.19$ м, $L_m = 6$ м, $L_c = 2$ м, $W = 0.01$ м/с, $S_b = S_*$ кг/м², $G_0 = 0.0182$ кг/(мс), $S_0 = 0.5734$ кг/м². Пространственный шаг сетки $\Delta x = 0.2$, временной шаг $\Delta t = 0.2$.

На рисунке 8 приведены полученные донные профили (сплошные кривые), экспериментальные данные [Kerssens, van Rijn, 1977] (точечные множества) и донные профили, полученные по модели [Kerssens, van Rijn, 1977] (пунктирные кривые), кривой 1 обозначен начальный донный профиль, группой кривых 2 и 3 показаны профили донной поверхности в момент времени 7 и 14 часов соответственно.

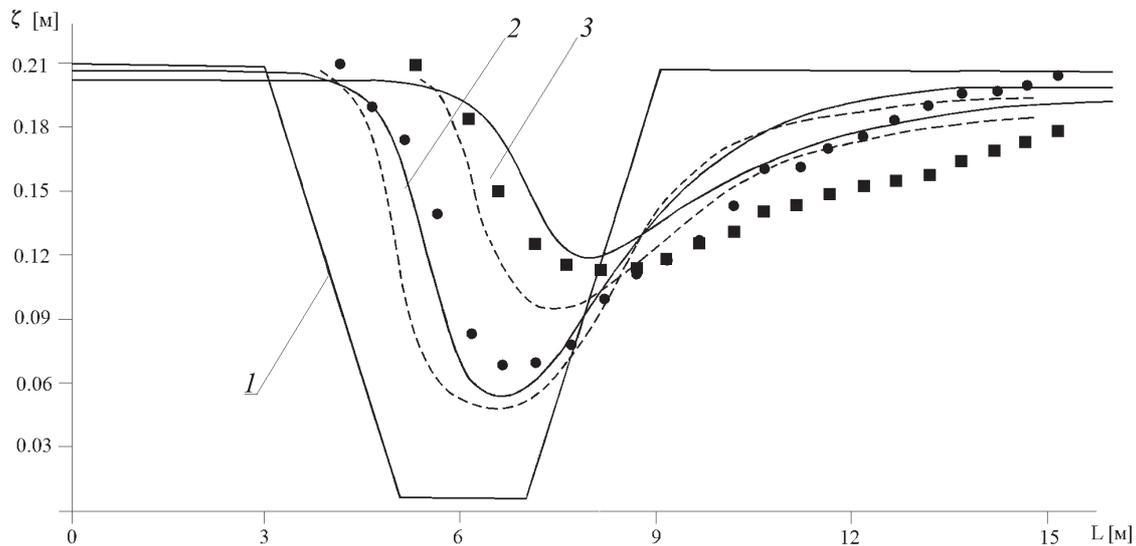


Рис. 8. Сравнение экспериментальных данных и расчетных данных, время наблюдения. Задача 2

Из сравнения графиков на рисунке 8 видно, что основное рассогласование экспериментальных данных и расчетных данных наблюдается на участке напорного склона каверны. На данном участке погрешность расчетов по предложенной модели и по модели [Kerssens, van Rijn,

1977] достигает 25 % и 39 % соответственно. Автор [Kerssens, van Rijn, 1977] указывает, что баланс наносов в эксперименте не соблюдается, расход наносов на выходе из канала завышен по сравнению со расходом наносов на входе в канал. Автор [Kerssens, van Rijn, 1977] предполагает, что на участке напорного склона каверны происходит повышение придонных скоростей из-за активного выноса донного материала потоком. Мы полагаем, что увеличение расхода наносов происходит за счет изменения гидродинамических характеристик потока. Возможно, место слива жидкости с экспериментальной установки расположено слишком близко к каверне, что приводит к искривлению свободной поверхности потока, увеличению скорости потока на участке напорного склона каверны и интенсивному размыву дна.

Модель [Kerssens, van Rijn, 1977] осуществляет избыточный размыв подветренного склона каверны и не восстанавливает глубину каверны. Решения, полученные по предложенной модели, лучше согласуются с экспериментальными данными в области подветренной и донной части каверны, максимальное отклонение расчетных данных от экспериментальных на этих участках не превышает 13 %.

В целом по области, за исключением напорного склона каверны, предложенная модель качественно и количественно согласуется с экспериментальными данными, средняя относительная погрешность составляет 7.5 %.

Заключение

В работе предложена математическая модель для одномерного неравновесного руслового процесса. В рамках предложенной модели решен ряд модельных русловых задач, выполнено сравнение полученных решений с известными экспериментальными данными. Показано, что, несмотря на относительную простоту предложенной математической модели, полученные численные решения хорошо согласуются с экспериментальными данными. Сравнение результатов численных расчетов с результатами других авторов показало, что предложенная модель не уступает по точности моделям [Kerssens, van Rijn, 1977; Sanchez, Wu, 2011; Singh, 2002; van Rijn, 1986; Wu, 2001; Wu, Viera, 2002], а в случае с задачей о деформации каверны превосходит их.

На основе проведенного сравнительного анализа с учетом работ [Петров, Потапов, 2010; Потапов, Снигур, 2011; Бондаренко, Потапов, 2013; Петров, Потапов, 2014; Потапов, Снигур, 2014] можно сделать вывод, что предложенная модель может применяться при решении широкого диапазона практических русловых задач.

Список литературы

- Баренблатт Г. И.* О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке, занимающем полупространство или плоский открытый канал конечной глубины // Прикл. математика и механика. — 1955. — Т. 19, № 1. — С. 61–88.
- Барышников Н. Б., Попов И. В.* Динамика русловых потоков и русловые процессы. — Л.: Гидрометеиздат, 1988. — 454 с.
- Барышников Н. Б.* Гидравлические сопротивления речных русел: Учебное пособие. — СПб.: Изд. РГГМУ. — 2003. — 147 с.
- Белолипецкий В. М., Генова С. Н.* Вычислительный алгоритм для определения динамики взвешенных и донных наносов в речном русле // Вычислительные технологии. — 2004. — Т. 9, № 2. — С. 9–25.
- Бондаренко Б. В., Потапов И. И.* Математическое моделирование эволюции берегового склона в каналах с песчаным руслом // Вычислительные технологии. — 2013. — Т. 18, № 4. — С. 26–36.
- Великанов В. М.* Движение наносов. — М.: Речиздат, 1948. — 210 с.

- Гришанин К. В.* Устойчивость русел рек и каналов. — Л.: Гидрометеоздат, 1974. — 143 с.
- Караушев А. В.* Теория и методы расчета речных наносов. — Л.: Гидрометеоздат, 1977. — 272 с.
- Картвелишвили Н. А.* Потоки в недеформируемых руслах. — Л.: Гидрометеоздат, 1973. — 279 с.
- Колмогоров А. Н.* О новом варианте гравитационной теории движения взвешенных наносов // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естеств. наук. — 1954. — № 3. — С. 41–45.
- Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
- Петров П. Г.* Движение сыпучей среды в придонном слое жидкости // ПМТФ. — 1991. — № 5. — С. 72–75.
- Петров А. Г., Петров П. Г.* Вектор расхода наносов в турбулентном потоке над размываемым дном // ПМТФ. — 2000. — Т. 41, № 2. — С. 102–112.
- Петров А. Г., Потапов И. И.* О развитии возмущений песчаного дна канала // ДАН. — 2010. — Т. 431, № 2. — С. 191–195.
- Петров А. Г., Потапов И. И.* Перенос наносов под действием нормальных и касательных придонных напряжений с учетом уклона дна // ПМТФ. — 2014. — Т. 55, № 5. — С. 1–6.
- Потапов И. И., Снигур К. С.* Анализ деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 4. — С. 114–119.
- Потапов И. И., Снигур К. С.* Исследование эволюции поперечной русловой прорези под действием транзитного гидродинамического потока // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2014. — № 2. — С. 146–152.
- Потапов И. И., Снигур К. С.* Программный комплекс для расчета деформаций несвязного дна канала в нижнем бьефе гидроузла // Свидетельство РФ о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014618581, РИД 614091840008.
- Рекомендации по прогнозу трансформации русла в нижних бьефах гидроузлов: СО 34.21.204 — 2005. — Изд. 24.11.2006. — Взамен П95-81/ВНИИГ; введ. 01.01.2007.
- Тамагоз И. С.* Аналитический метод расчета неустановившегося движения воды в нижнем бьефе гидроэлектростанции (метод превышений) // Тр. Ленинградпроекта. — 1964. — Вып. 1.
- Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т.: Т. 2. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1991. — 552 с.
- Exner F. M.* Uber die Wechselwirkung zwischen Wasser und Geschiebe in Flussen. Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, Math. — Naturwiss. Kl. Abt. 2A. 1925. 134. P. 165–180.
- Kerssens P. J. M., van Rijn L. C.* Model for non-steady suspended sediment transport // Project Engineers delft hydraulics laboratory, Delft, Netherlands. — 1977. 8 p.
- Sanchez A., Wu W.* A non-equilibrium sediment transport model for coastal inlets and navigation channels. In: Roberts T. M., Rosati J. D., and Wang P. (eds.) // Proceedings, Symposium to Honor Dr. Nicholas C. Kraus, Journal of Coastal Research, Special Issue. — 2011. — No. 59. — P. 39–48.
- Seal R., Parker G., Paola C., Mullenbach B.* Laboratory experiments on downstream fining of gravel, narrow channels runs 1 through 3: supplemental methods and data // External memorandum M-239, St. Anthony Falls Hydraulic Lab., University of Minnesota. — 1995.
- Singh V.* Two dimensional sediment transport model using parallel computers // B. Tech., Banaras Hindu University, India. — 2002. — 109 p.
- Newton C. T.* An experimental investigation of bed degradation in an open channel // Transcript, Boston Society of Civil Engineers. — 1951. — P. 28–60.
- van Rijn L. C.* Sedimentation of dredged channels by currents and waves // Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering. — 1986. — Vol. 112, no. 5. — P. 541–559.
- Wu W.* CCHE2D sediment transport model — Technical manual // National center for computational hydroscience and engineering. The university of Mississippi. — 2001. — Technical report no. NCCHE-TR-2001-3. — 45 p.

Wu W., Vieira D. A. One-dimensional channel network model CCHE1D 3.0 – Technical manual // National center for computational hydroscience and engineering. The university of Mississippi. – 2002. – Technical report no. NCCHE-TR-2002-1. – 122 p.