**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 2 С. 271–280**

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 536.2

Влияние формы и размеров локального источника энергии на режимы конвективного теплопереноса в квадратной полости

Н. С. Гибанов[1,a], М. А. Шеремет[1,2,б]

[1] Томский государственный университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
[2] Томский политехнический университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30

E-mail: [a]fire9n@mail.ru, [б]Michael-sher@yandex.ru

Получено 12 февраля 2015 г.

Проведен численный анализ влияния формы и размеров локального источника постоянной температуры на нестационарные режимы термогравитационной конвекции в квадратной полости с изотермическими вертикальными стенками. Рассматривался источник энергии прямоугольной, треугольной и трапециевидной формы. Краевая задача, сформулированная в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность скорости – температура» в приближении Буссинеска, была реализована численно методом конечных разностей. Получены распределения изолиний функции тока и температуры, а также временные зависимости для среднего числа Нуссельта на поверхности источника энергии в широком диапазоне изменения определяющих параметров.

Ключевые слова: термогравитационная конвекция, локальный источник энергии прямоугольной, треугольной и трапециевидной формы, замкнутая квадратная полость, математическое моделирование

Effect of shape and sizes of a local heat source on convective heat transfer in a square cavity

N.S. Gibanov[1], M. A. Sheremet[1,2]

[1] *Tomsk State University, 36, Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia*
[2] *Tomsk Polytechnic University, 30, Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia*

Abstract. — Numerical analysis of the effects of the local heat source shape on transient natural convection in a square enclosure has been carried out. The local heat source has rectangular, triangular and trapezoidal shape. The boundary value problem formulated in the dimensionless variables such as stream function, vorticity and temperature by using the Boussinesq approximation has been solved by means of finite difference method. Distributions of streamlines and isotherms and time dependences for the average Nusselt number along the heat source surface in a wide range of governing parameters have been obtained.

Keywords: natural convection, local heat source of rectangular, triangular and trapezoidal shape, square enclosure, mathematical simulation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 271–280 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-6942.2015.8) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-08-31137 мол_а).

Введение

Естественная конвекция — механизм переноса энергии, играющий важную роль в природе и во многих отраслях производства. Современная радиоэлектронная аппаратура (РЭА) и электронная техника (ЭТ) нуждаются как в эффективном охлаждении тепловыделяющих элементов, так и в разумном их размещении на электронных платах [Jaluria, 1998]. Следует отметить, что смоделировать размещение тепловыделяющих элементов необходимо до изготовления электронной платы, учитывая массогабаритные характеристики системы и другие ее особенности, с целью более эффективной эксплуатации в течение долгого времени. Наиболее оптимальным подходом к решению такой задачи является проведение детального моделирования процессов переноса массы, импульса и энергии в герметичном корпусе блока РЭА или ЭТ при наличии источников энергии конечных размеров, но различной формы, на основе современных численных методов механики жидкости и газа.

В связи с этим повышенное внимание в настоящее время уделяется теоретическим и экспериментальным исследованиям режимов конвективного теплопереноса в замкнутых и полуоткрытых областях различной геометрии: квадратные полости [Lam, Prakash, 2014; Saravanan, Sivaraj, 2011; Кузнецов, Шеремет, 2009], прямоугольные области [da Silva, Lorente, Bejan, 2014; El Qarnia, Draoui, Lakhal, 2013; Jin, Tou, Tso, 2005; Sharma, Velusamy, Balaji, 2009], пространственные объекты [Sezai, Mohamad, 2000; Fontana et al., 2013; Sudhakar, Balaji, Venkateshan, 2010; Кузнецов, Шеремет, 2010; Пивоваров, 2013].

Наиболее значимыми для практики являются исследования процессов конвективного теплопереноса в областях при наличии тепловыделяющих элементов конечных размеров [Lam, Prakash, 2014; Sharma, Velusamy, Balaji, 2009; Sudhakar, Balaji, Venkateshan, 2010; Кузнецов, Шеремет, 2009, 2010]. В большинстве отмеченных работ авторы акцентировали внимание на анализе влияния расположения тепловыделяющих элементов и их размеров на структуру термогидродинамических полей, формирующихся при эксплуатации изделия.

Целью настоящей работы является численный анализ ламинарных режимов естественной конвекции в замкнутой квадратной полости с локальным источником тепловыделения прямоугольной, треугольной и трапециевидной формы различных размеров. Отдельное внимание было акцентировано на исследовании эволюции тепловых факелов, возникающих над энерговыделяющим элементом.

Математическая модель

Рассматривается краевая задача термогравитационной конвекции в замкнутой полости, изображенной на рисунке 1 (штриховыми линиями показаны различные конфигурации источника энергии). Во все время процесса температура нагревателя, расположенного в зоне основания, постоянна. Горизонтальные стенки являются теплоизолированными, а вертикальные стенки поддерживаются при постоянной минимальной температуре, что отражает охлаждение анализируемого объекта со стороны внешней среды. Такая система пассивного охлаждения (без привлечения зон активной внешней вентиляции) технически может быть реализована, например, введением тепловых труб [Jaluria, 1998] на вертикальных стенках.

Считается, что теплофизические свойства внутренней среды не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Внутри полости находится вязкая, теплопроводная, ньютоновская жидкость, удовлетворяющая приближению Буссинеска. Движение и теплоотдача во внутренней полости принимаются плоскими, теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенками считается пренебрежимо малым по сравнению с конвективным механизмом переноса энергии.

Транспортные уравнения массы, импульса и энергии в рассматриваемой области имеют вид нестационарных уравнений Обербека–Буссинеска [Мартюшев, Шеремет, 2014].

Краевая задача формулируется в безразмерных переменных «функция тока – завихренность скорости – температура» [Мартюшев, Шеремет, 2014]. В качестве масштаба расстояния выбрана длина полости по оси x. Для приведения к безразмерному виду системы уравнений использовались следующие соотношения:

$$X=\frac{x}{L},\ Y=\frac{y}{L},\ \tau=\frac{t}{t_0},\ U=\frac{u}{V_0},\ V=\frac{v}{V_0},\ \Theta=\frac{T-T_c}{T_h-T_c},\ \Psi=\frac{\psi}{\psi_0},\ \Omega=\frac{\omega}{\omega_0},$$

где x, y — координаты декартовой системы координат; X, Y — безразмерные координаты, соответствующие координатам x, y; L — размер полости; t — время; $t_0=L/V_0$ — масштаб времени; τ — безразмерное время; u, v — составляющие скорости в проекции на оси x, y соответственно; U, V — безразмерные составляющие скорости, соответствующие u, v; $V_0=\sqrt{g\beta(T_\text{h}-T_\text{c})L}$ — масштаб скорости (скорость естественной конвекции); g — ускорение свободного падения; β — температурный коэффициент объемного расширения; T_h — температура источника энергии; T_c — температура вертикальных стенок; Θ — безразмерная температура; Ψ – безразмерная функция тока, соответствующая ψ; ψ — функция тока $u=\partial\psi/\partial y$, $v=-\partial\psi/\partial x$; $\psi_0=V_0L$ — масштаб функции тока; Ω — безразмерный аналог завихренности скорости, соответствующий ω; ω — завихренность скорости $\omega=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$; $\omega_0=V_0/L$ — масштаб завихренности скорости.

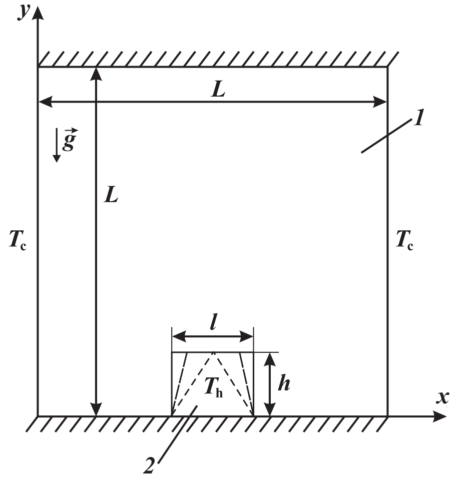


Рис. 1. Область решения: *1* — полость, *2* — источник тепловыделения

Безразмерные уравнения Обербека–Буссинеска имеют следующий вид [Мартюшев, Шеремет, 2014]:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=-\Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Omega}{\partial X}-\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Omega}{\partial Y}=\sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right)+\frac{\partial\Theta}{\partial X}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial X}-\frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial Y}=\frac{1}{\sqrt{\text{Pr}\cdot\text{Ra}}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right), \tag{3}$$

где $\text{Pr}=\nu/a$ — число Прандтля; $\text{Ra}=g\beta(T_\text{h}-T_\text{c})L^3/\nu a$ — число Рэлея; a — коэффициент температуропроводности внутренней среды; ν — коэффициент кинематической вязкости среды.

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1)–(3) рассматривались в следующем виде.

В **начальный момент времени** предполагалось, что жидкость, заполняющая полость, неподвижна, поэтому $\Psi(X,Y,0)=\Omega(X,Y,0)=0$. Начальная температура, вследствие выбранного обезразмеривания, принимала вид $\Theta(X,Y,0)=\Theta_0=0$.

Граничные условия:

- на границах $Y = 0$ и $Y = 1$: $\Psi = 0,\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0,\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$;
- на границах $X = 0$ и $X = 1$: $\Psi = 0,\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial X} = 0,\ \Theta = 0$;
- на поверхности источника энергии: $\Psi = 0,\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \overline{n}} = 0,\ \Theta = 1$.

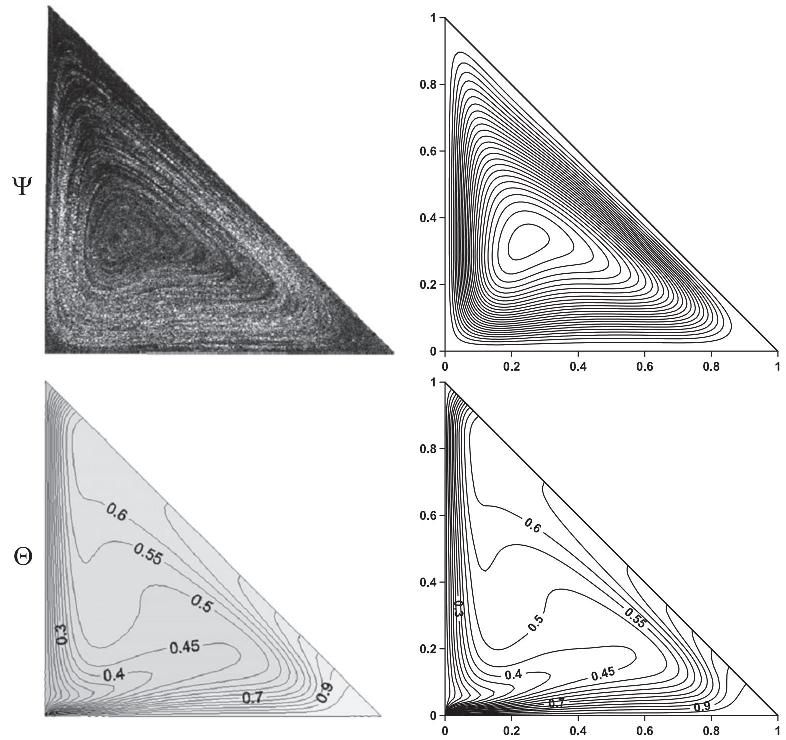
Сформулированная краевая задача для дифференциальных уравнений (1)–(3) решена методом конечных разностей [Мартюшев, Шеремет, 2014; Пасконов, Полежаев, Чудов, 1984] на равномерной сетке. Уравнения решались последовательно, каждый временной шаг начинался с определения функции тока внутри полости, затем решались уравнение дисперсии завихренности (2) и уравнение энергии (3). Значения завихренности скорости на поверхностях стенок полости и локального источника энергии определялись на основе формулы Вудса [Пасконов, Полежаев, Чудов, 1984]. Для численного решения уравнений параболического типа (2) и (3) применялась локально-одномерная схема Самарского, позволяющая плоскую задачу свести к системе одномерных. Для аппроксимации конвективных слагаемых использовалась монотонная схема Самарского, для диффузионных слагаемых — центральные разности. Эволюционный член представлял собой одностороннюю разность по времени и имел первый порядок точности относительно шага по времени. Все производные по пространственным координатам аппроксимировались со вторым порядком точности относительно шага по координате. Дискретизация уравнения Пуассона для функции тока (1) проводилась на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученное разностное уравнение разрешалось методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Разработанный метод решения был протестирован на ряде модельных задач свободноконвективного теплопереноса [Мартюшев, Шеремет, 2014]. В качестве тестовой задачи, позволяющей проанализировать работоспособность численного алгоритма в криволинейной области, рассматривалась естественная конвекция вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости внутри треугольной полости с изотермическими катетами и адиабатической гипотенузой [Yesiloz, Aydin, 2013]. На рисунках 2 и 3 представлены распределения изолиний функции тока и температуры при различных значениях числа Рэлея в сравнении с экспериментальными и численными данными [Yesiloz, Aydin, 2013].

Разработанный метод решения также был протестирован на множестве сеток. На рисунке 4 представлены временные зависимости среднего числа Нуссельта на поверхности источника энергии от размерности разностной сетки при $\mathrm{Ra} = 10^6$, $\mathrm{Pr} = 0.7$ в случае источника энергии прямоугольной формы. Из рисунка 4 видно, что с течением времени наблюдается тепловое установление процесса, поскольку интегральный коэффициент теплообмена при $\tau = 100$ не изменяется. В связи с этим считается, что $\tau = 100$ характеризует стационарный режим теплопереноса. Поскольку уменьшение шага разностной сетки отражается на повышении времени счета, то для дальнейшего анализа была выбрана разностная сетка размерности 140×140 с целью оптимизации точности вычислений и времени расчета.

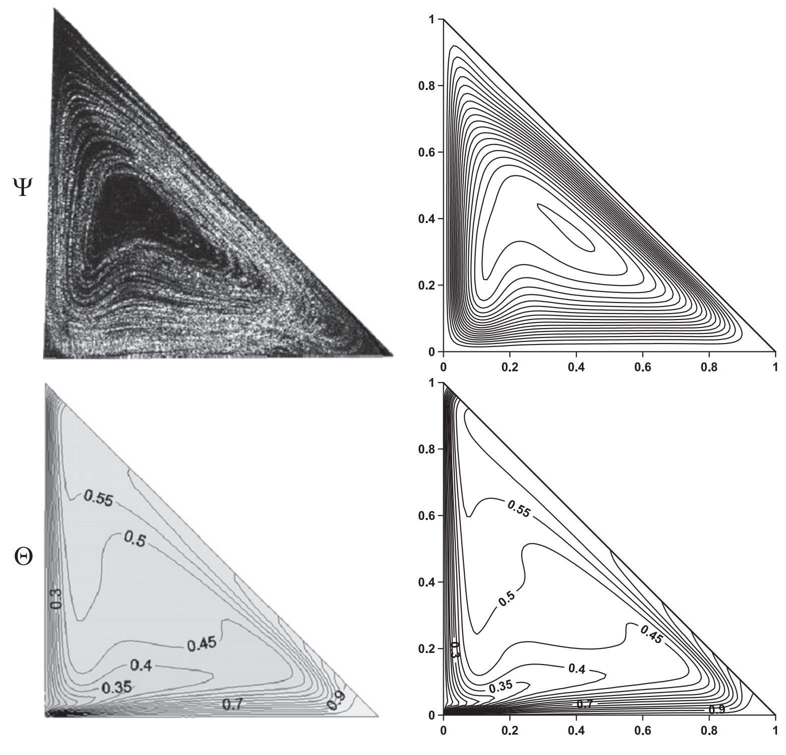
Результаты численного моделирования

Численный анализ проведен при следующих значениях безразмерных комплексов, характеризующих режимы конвективного теплопереноса: $\mathrm{Ra} = 10^4$–10^6; $\mathrm{Pr} = 0.7$; $h/L = 0.2$; $0 \le \tau \le 100$; $0.1 \le l/L \le 0.7$. Источник тепловыделения рассматривался трех форм: прямоугольной, треугольной и трапециевидной. Необходимо отметить, что влияние числа Рэлея, формы и размеров тепловыделяющего элемента на локальные распределения изолиний функции тока и температуры продемонстрировано в условиях стационарного процесса ($\tau = 100$). Данный момент времени



(*а*) (*б*)

Рис. 2. Изолинии функции тока Ψ и температуры Θ при Ra = 10^6: данные [Yesiloz, Aydin, 2013] (*а*), полученные результаты (*б*)



(*а*) (*б*)

Рис. 3. Изолинии функции тока Ψ и температуры Θ при Ra = $5 \cdot 10^6$: данные [Yesiloz, Aydin, 2013] (*а*), полученные результаты (*б*)

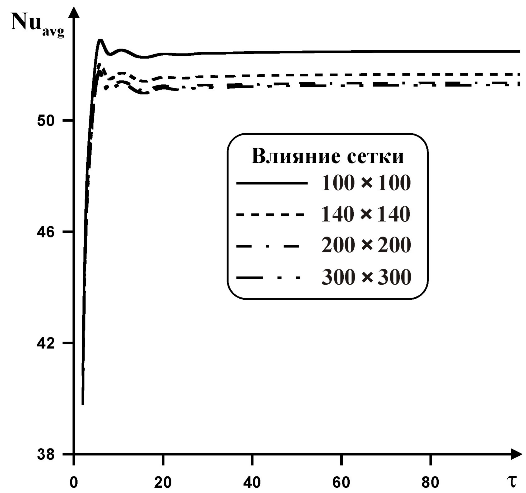


Рис. 4. Зависимость среднего числа Нуссельта от времени и размерности разностной сетки

характеризует термогидродинамическое установление анализируемого явления, что можно проследить, например, по временным зависимостям для среднего числа Нуссельта.

На рисунке 5 представлены распределения изолиний функции тока и температуры, отражающие влияние формы источника энергии на структуру течения и теплоперенос при $\mathrm{Ra} = 10^6$, $l/L = 0.3$. Независимо от формы тепловыделяющего элемента внутри полости формируются две конвективные ячейки, отражающие наличие восходящих потоков в центральной части полости и нисходящие вблизи холодных вертикальных стенок. Изменение формы локального источника энергии при постоянных длине и высоте проявляется в модификации структуры конвективных ячеек, главным образом вблизи поверхности тепловыделяющего элемента, вследствие наличия угловых точек. Искривление линий тока вблизи угловых точек нагревателя приводит к снижению интенсивности движения внутри конвективных ячеек, а именно: $\left|\Psi\right|_{\max}\Big|_{\text{треугольный элемент}} = 0.0325 > \left|\Psi\right|_{\max}\Big|_{\text{трапециевидный элемент}} = 0.0309 > \left|\Psi\right|_{\max}\Big|_{\text{прямоугольный элемент}} = 0.0298$.

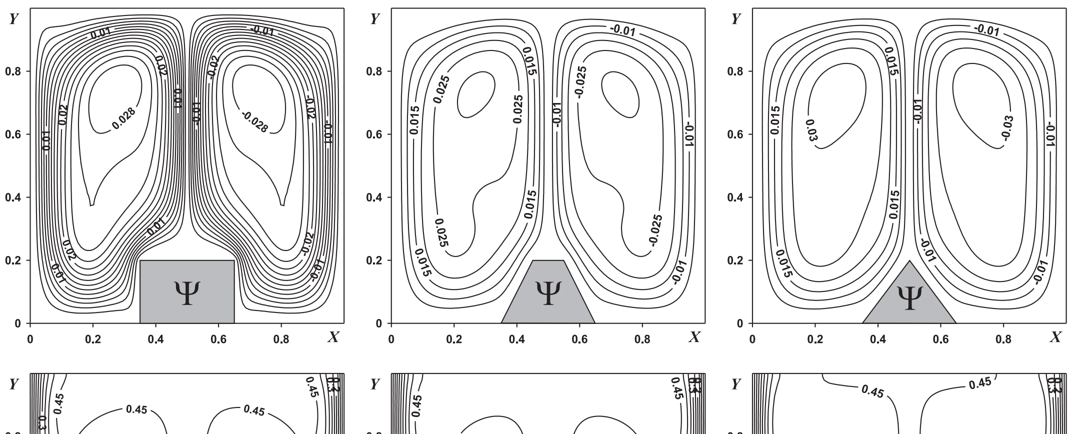
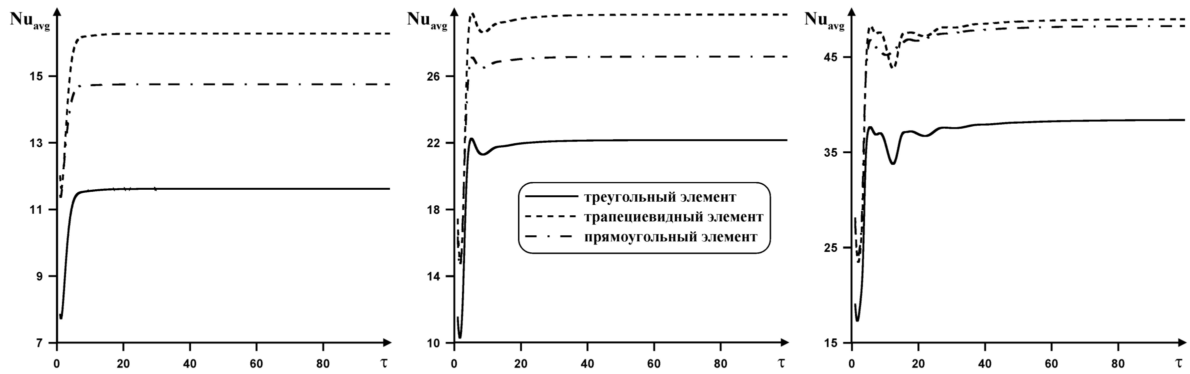


Рис. 5. Линии тока Ψ и изотермы Θ при $\mathrm{Ra} = 10^6$, $l/L = 0.3$ и различных формах источника энергии

Конфигурация термического факела над источником энергии, а также профили температуры в верхней части полости существенно изменяются при вариации формы тепловыделяющего элемента. Вблизи поверхности источника наблюдается значительное уменьшение толщины свободного пограничного слоя, отражающего контуры двумерного теплового факела.



(*а*) (*б*) (*в*)

Рис. 6. Зависимости среднего числа Нуссельта от времени и формы нагревателя при $l/L = 0.3$: $\mathrm{Ra} = 10^4$ (*а*), $\mathrm{Ra} = 10^5$ (*б*), $\mathrm{Ra} = 10^6$ (*в*)

На рисунке 6 представлена зависимость среднего числа Нуссельта на поверхности тепловыделяющего элемента от времени, формы нагревателя и числа Рэлея. Временную зависимость интегрального коэффициента теплообмена можно условно разделить на четыре зоны: начальный участок (или зона теплопроводности), участок интенсивного теплоотвода (или конвективная зона), участок установления и стационарный участок. На начальном временном участке происходит снижение среднего числа Нуссельта вследствие прогрева области вблизи поверхности тепловыделяющего элемента за счет теплопроводности. Такое изменение $\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$ обусловлено тем, что в начальный момент времени температура в области решения изменяется скачкообразно от $\Theta = 0$ внутри полости до $\Theta = 1$ на поверхности источника энергии. Продолжительность начального участка определяется формой источника энергии и значением числа Рэлея. Увеличение Ra проявляется в затягивании начального участка. При $\mathrm{Ra} = 10^6$ наиболее продолжительный начальный участок наблюдается в случае трапециевидного элемента, а наименее продолжительный — в случае треугольного элемента. После достижения глобального минимума среднее число Нуссельта начинает увеличиваться (участок интенсивного теплоотвода) вследствие интенсификации конвективного механизма переноса энергии. Последнее приводит к более интенсивному теплосъему с поверхности тепловыделяющего элемента, что отражается в росте градиента температуры вдоль поверхности нагревателя. Достижение максимального значения $\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$ в результате монотонного роста характеризует завершение второго участка. Последующие колебания интегрального коэффициента теплообмена описывают участок установления, который в случае $\mathrm{Ra} = 10^4$ отсутствует. Следует отметить, что причиной формирования данной зоны является взаимодействие между подъемной силой, стремящейся хаотизировать течение, и силами внутреннего трения (вязкими силами), направленными на ослабление конвективного движения. Продолжительность участка установления возрастает с повышением числа Рэлея. Достижение постоянного значения $\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$ характеризует формирование стационарного режима теплопереноса.

Анализируя влияние формы источника энергии на интенсивность теплообмена можно отметить наибольшее значение $\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$ в случае нагревателя трапециевидной формы, а наименьшее значение среднего числа Нуссельта — в случае тепловыделяющего элемента треугольной формы. Рост числа Рэлея проявляется в уменьшении разности значений $\mathrm{Nu}_{\mathrm{avg}}$ на стационарном участке в случае источника энергии трапециевидной и прямоугольной форм.

Влияние числа Рэлея и формы источника энергии на значения среднего числа Нуссельта на поверхности термостата при $\tau = 100$ представлено на рисунке 7. Основные особенности зависимости вида $\mathrm{Nu_{avg}} = f\left(\mathrm{Ra}, \text{форма нагревателя}\right)$ были подробно описаны выше.

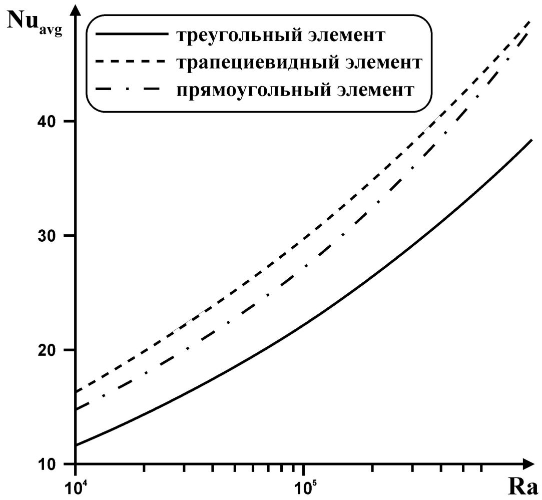


Рис. 7. Зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рэлея и формы нагревателя при $\tau = 100$, $l/L = 0.3$

В случае нагревательного элемента прямоугольной формы был проведен анализ влияния длины источника на эволюцию термического факела и интегрального коэффициента теплообмена. Следует отметить, что с увеличением длины тепловыделяющего элемента (l/L) от 0.1 до 0.7 на участке интенсивного теплоотвода формируется один или два термических факела. С ростом времени два факела в случае нагревателя большой длины сливаются с образованием и последующим развитием одного факела.

На рисунке 8 показана зависимость среднего числа Нуссельта в случае источника энергии прямоугольной формы от времени и длины нагревателя. Формирование двух термических факелов при $l/L = 0.7$ сопровождается существенным сокращением начального временного участка и увеличением как временной продолжительности зоны интенсивного теплоотвода, так и среднего числа Нуссельта на этом участке. По всей видимости, уменьшение продолжительности начального временного участка обусловлено близостью изотермической вертикальной стенки полости к поверхности термостата, что приводит к снижению времени взаимодействия между тепловыми волнами от нагреваемой и охлаждаемой стенок.

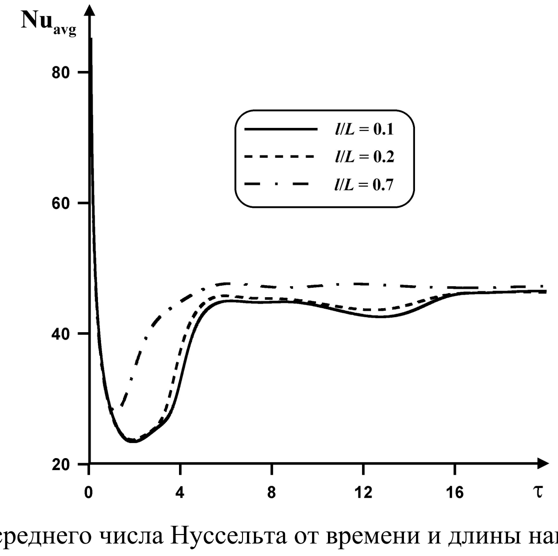


Рис. 8. Зависимость среднего числа Нуссельта от времени и длины нагревателя при $\mathrm{Ra} = 10^6$

Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что изменение формы локального источника энергии при постоянных длине и высоте проявляется в модификации структуры конвективных ячеек, главным образом, вблизи поверхности тепловыделяющего элемента, вследствие наличия угловых точек. Отмеченное искривление линий тока проявляется в снижении интенсивности движения внутри конвективных ячеек. Показано, что временную зависимость интегрального коэффициента теплообмена можно условно разделить на четыре зоны: начальный участок (или зона теплопроводности), участок интенсивного теплоотвода (или конвективная зона), участок установления и стационарный участок. Наличие и продолжительность каждой из этих зон определяются формой источника энергии и значением числа Рэлея. В стационарном режиме наибольшее значение среднего числа Нуссельта достигается в случае нагревателя трапециевидной формы, а наименьшее значение — в случае тепловыделяющего элемента треугольной формы. Установлено также, что формирование двух термических факелов при $\mathrm{Ra} = 10^6$ сопровождается существенным сокращением начального временного участка и увеличением как временной продолжительности зоны интенсивного теплоотвода, так и среднего числа Нуссельта на этом участке.

Список литературы

Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. О возможности регулирования тепловых режимов типичного элемента радиоэлектронной аппаратуры или электронной техники с локальным источником тепла за счет естественной конвекции // Микроэлектроника. — 2010. — Т. 39, № 6. — С. 452–467.

Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Численное моделирование температурных полей узлов и блоков радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники // Микроэлектроника. — 2009. — Т. 38, № 5. — С. 344–352.

Мартюшев С. Г., Шеремет М. А. Численный анализ конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой воздушной полости с локальным источником энергии // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 3. — С. 383–396.

Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984. — 288 с.

Пивоваров Д. Е. Трехмерные конвективные взаимодействия в наклонном продольном слое воздуха // Известия РАН. Механика жидкости и газа. — 2013. — № 3. — С. 43–52.

da Silva A. K., Lorente S., Bejan A. Optimal distribution of discrete heat sources on a wall with natural convection // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2004. — Vol. 47. — P. 203–214.

Fontana É., Capeletto C. A., da Silva A., Mariani V. C. Three-dimensional analysis of natural convection in a partially-open cavity with internal heat source // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2013. — Vol. 61. — P. 525–542.

Jaluria Y. Design and Optimization of Thermal Systems. — New York: McGraw-Hill, 1998. — 626 p.

Jin L. F., Tou K. W., Tso C. P. Effects of rotation on natural convection cooling from three rows of heat sources in a rectangular cavity // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2005. — Vol. 48. — P. 3982–3994.

Lam P. A. K., Prakash K. A. A numerical study on natural convection and entropy generation in a porous enclosure with heat sources // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2014. — Vol. 69. — P. 390–407.

El Qarnia H., Draoui A., Lakhal E. K. Computation of melting with natural convection inside a rectangular enclosure heated by discrete protruding heated sources // Applied Mathematical Modelling. — 2013. — Vol. 37. — P. 3968–3981.

Saravanan S., Sivaraj C. Natural convection in an enclosure with a localized nonuniform heat source on the bottom wall // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2011. — Vol. 54. — P. 2820–2828.

Sezai I., Mohamad A. A. Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal enclosure // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2000. — Vol. 43. — P. 2257–2266.

Sharma A. K., Velusamy K., Balaji C. Turbulent natural convection of sodium in a cylindrical enclosure with multiple internal heat sources: A conjugate heat transfer study // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2009. — Vol. 52. — P. 2858–2870.

Sudhakar T. V. V. Balaji C., Venkateshan S. P. A heuristic approach to optimal arrangement of multiple heat sources under conjugate natural convection // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2010. — Vol. 53. — P. 431–444.

Yesiloz G., Aydin O. Laminar natural convection in right-angled triangular enclosures heated and cooled on adjacent walls // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2013. — Vol. 60. — P. 365–374.