КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 2 С. 221–226

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.217

Представление инвариантной меры неприводимой цепи Маркова с дискретным временем и конечным пространством состояний множеством обратно ориентированных деревьев

А. Л. Круглый

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН,
Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский пр-т, д. 36, к. 1

E-mail: akrugly@mail.ru

Получено 06 июля 2014 г.,
после доработки 20 февраля 2015 г.

Рассмотрена задача нахождения инвариантной меры неприводимой цепи Маркова с дискретным временем и конечным пространством состояний. Для такой цепи Маркова существует и единственна инвариантная мера, определенная с точностью до умножения на константу. Для каждого состояния эта инвариантная мера получена в виде суммы n^{n-2} неотрицательных слагаемых, где n — число состояний. Каждое слагаемое является произведением $n - 1$ условных вероятностей перехода. В стандартном представлении цепи Маркова ориентированным графом каждому состоянию ставится в соответствие вершина графа, а условной вероятности перехода — ориентированное ребро. В этом представлении каждое слагаемое в рассматриваемом выражении для инвариантной меры некоторого состояния взаимно-однозначно соответствует обратно ориентированному дереву с корнем в вершине, являющейся образом рассматриваемого состояния. Ребра ориентированы по направлению к корню. Дерево включает все вершины — образы состояний. Каждое слагаемое является произведением всех тех и только тех условных вероятностей перехода, образами которых являются ориентированные ребра соответствующего дерева.

Ключевые слова: цепь Маркова, инвариантная мера, ориентированное дерево

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 2 С. 221–226

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Representation of an invariant measure of irreducible discrete-time Markov chain with a finite state space by a set of opposite directed trees

A. L. Krugly

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Science, 36, k. 1, Nahimovskiy pr., Moscow, 117218, Russia

Abstract. — A problem of finding of an invariant measure of irreducible discrete-time Markov chain with a finite state space is considered. There is a unique invariant measure for such Markov chain that can be multiplied by an arbitrary constant. A representation of a Markov chain by a directed graph is considered. Each state is represented by a vertex, and each conditional transition probability is represented by a directed edge. It is proved that an invariant measure for each state is a sum of n^{n-2} non-negative summands, where n is a cardinality of state space. Each summand is a product of $n-1$ conditional transition probabilities and is represented by an opposite directed tree that includes all vertices. The root represents the considered state. The edges are directed to the root. This result leads to methods of analyses and calculation of an invariant measure that is based on a graph theory.

Keywords: Markov chain, invariant measure, directed tree

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 221–226 (Russian).

Введение

Одной из традиционных задач теории цепей Маркова является нахождение инвариантной меры. В настоящей статье показано, что инвариантная мера неприводимой цепи Маркова с дискретным временем и конечным пространством состояний может быть представлена множеством обратно ориентированных деревьев специального вида. В результате нахождение инвариантной меры сводится к перебору указанных деревьев.

Рассмотрим постановку задачи, термины, определения и известные факты теории цепей Маркова, которые будут использоваться далее (более подробно см., например, в [Кельберт, Сухов, 2009]). Для удобства читателя все обозначения в настоящей статье унифицированы с указанным кембриджским курсом.

Рассмотрим конечное пространство состояний I, состоящее из n элементов. Пронумеруем состояния от 1 до n и будем обозначать состояния и их номера строчными латинскими индексами. Система может находиться в некотором состоянии $i \in I$ с вероятностью λ_i. Вероятностная мера λ на I удовлетворяет следующим условиям:

$$\lambda_i \geq 0, \tag{1}$$

$$\sum \lambda_i = 1. \tag{2}$$

В дискретные моменты времени система совершает переходы с условными вероятностями p_{ij} перейти в состояние $j \in I$, если система перед этим находилась в состоянии $i \in I$. Вероятности p_{ij} образуют матрицу перехода P. Матрица P является стохастической, то есть ее элементы удовлетворяют условиям

$$1 \geq p_{ij} \geq 0, \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{4}$$

Пространство состояний I разбивается на сообщающиеся классы. Обозначим через P^n n-ую степень матрицы P, а через $p_{ij}^{(n)}$ — ее элементы. Состояния i и j принадлежат одному сообщающемуся классу, если $p_{ij}^{(m)} > 0$ и $p_{ji}^{(k)} > 0$ для некоторых $m > 0$ и $k > 0$. Сообщающийся класс C называется замкнутым, если для любых таких $i \in C$ и $j \in I$ из $p_{ij}^{(m)} > 0$ для некоторого $m > 0$ следует, что $j \in C$. Цепь Маркова называется неприводимой, если все ее состояния принадлежат одному сообщающемуся классу, который, очевидно, замкнут. Неприводимой называется и ее стохастическая матрица.

Рассмотрим инвариантный вектор μ матрицы P, то есть собственный вектор, соответствующий собственному значению 1:

$$\mu P = \mu, \tag{5}$$

где компоненты μ_i удовлетворяют условию (1). Вектор μ называется инвариантной мерой. Если μ_i также удовлетворяют и условию (2), то μ называется стационарным распределением, которое будем обозначать π.

Задача состоит в нахождении вектора μ, определенного с точностью до умножения на число, или множества векторов, если решение не единственно.

Инвариантная мера на состояниях, не принадлежащих замкнутым сообщающимся классам, равна 0. Такие состояния называются несущественными и могут быть исключены из рассмотрения. Если пространство состояний I состоит из K замкнутых классов C_k, то имеется

K линейно независимых инвариантных векторов. При этом вектор номер k можно выбрать таким образом, что $\mu_i > 0$ для $i \in C_k$ и $\mu_j = 0$ для $j \notin C_k$. Таким образом, задача сводится к нахождению инвариантной меры на множестве состояний, образующих один замкнутый класс, то есть для неприводимой цепи Маркова. Эта мера единственна с точностью до умножения на константу.

Мы имеем элементарную задачу нахождения нетривиального решения конечной системы однородных линейных уравнений (5). Оно имеет вид

$$\frac{\mu_i}{\mu_n} = -\frac{M(in)}{M}, \tag{6}$$

где M есть базисный минор матрицы $P - E$, который считается расположенным в левом верхнем углу, E — единичная матрица и $M(in)$ есть базисный минор, в котором столбец номер i заменен на столбец номер n (см., например, [Ильин, Позняк, 1978]).

μ_i представлено суммой $(n-1)!$ слагаемых разного знака. Такая форма решения не учитывает, что матрица P является стохастической. Ниже будет показано, что с учетом этого факта μ_i может быть представлено конечной суммой неотрицательных слагаемых. Наиболее просто этот результат формулируется, если цепь Маркова стандартным образом представить ориентированным графом.

Поставим во взаимно-однозначное соответствие матрицу P и множество ребер ориентированного графа G, в котором каждое ребро имеет вес. Для этого поставим в соответствие состоянию s вершину номер s. Условной вероятности p_{rs} поставим в соответствие ориентированное ребро от вершины номер r к вершине номер s. p_{rs} является весом этого ребра.

Состояния i и j принадлежат одному сообщающемуся классу, если в G имеются ориентированный маршрут (из ребер с ненулевым весом) из вершины i в вершину j и ориентированный маршрут (из ребер с ненулевым весом) из вершины j в вершину i. Таким образом, в графе, представляющем неприводимую цепь Маркова, имеется ориентированный маршрут из ребер с ненулевым весом из любой вершины в любую другую вершину.

Представление инвариантной меры множеством обратно ориентированных деревьев

В теории графов ориентированное дерево — ациклический ориентированный граф, в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода (в нее не ведут ориентированные ребра), а все остальные вершины имеют степень захода 1 (в них ведет ровно по одному ориентированному ребру). Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одно ориентированное ребро) называются концевыми вершинами или листьями. Аналогично можно определить обратно ориентированное дерево. Для этого у ориентированного дерева сменим ориентацию всех ребер на противоположную, то есть зададим ориентацию всех ребер дерева в направлении от листьев к корню.

По теореме Кэли, на n пронумерованных вершинах существует n^{n-2}, где $n \geq 2$, различных (неориентированных) деревьев (см., например, [Свами, Тхуласираман, 1984, с. 117]). Зафиксируем одну из вершин в качестве корня. Очевидно, что имеется то же число обратно ориентированных деревьев с фиксированным корнем. Таким образом, на n пронумерованных вершинах существует n^{n-2} различных ориентированных деревьев с фиксированным корнем.

Теорема. *Пусть имеется система $n < \infty$ однородных линейных уравнений* (5)*, где P — стохастическая неприводимая матрица. Элементам матрицы P стандартным образом поставлены во взаимно-однозначное соответствие ориентированные ребра графа на n пронумерованных вершинах. Тогда нетривиальное решение этой системы для переменной μ_i*

может быть представлено суммой n^{n-2} неотрицательных слагаемых. Существует взаимно-однозначное отображение, которое ставит в соответствие каждому слагаемому обратно ориентированное дерево на указанных n пронумерованных вершинах с корнем — вершиной номер i, при этом соответствии слагаемое равно произведению всех тех и только тех $n-1$ элементов матрицы P, образами которых являются ориентированные ребра соответствующего дерева.

Доказательство. Доказательство выполним непосредственной подстановкой решения в систему уравнений (5). Запишем уравнение этой системы в следующей форме:

$$\mu_i = \mu_i p_{ii} + \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \mu_j p_{ji}. \tag{7}$$

Из условия нормировки (4) имеем

$$p_{ii} = 1 - \sum_{r=1,\ r\neq i}^{n} p_{ir}. \tag{8}$$

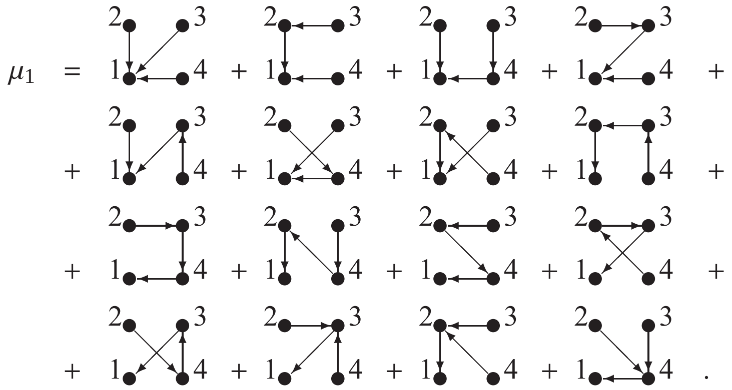
Подставляя (8) в (7), получаем

$$\mu_i \sum_{r=1,\ r\neq i}^{n} p_{ir} = \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} \mu_j p_{ji}. \tag{9}$$

Надо показать, что в уравнении вида (9) после подстановки решения справа и слева стоят одинаковые суммы. Покажем, что суммы содержат одинаковое число слагаемых. Каждая величина μ_i представлена множеством из n^{n-2} различных обратно ориентированных деревьев, а значит, суммой n^{n-2} слагаемых. Справа мы берем $n-1$ таких сумм, умноженных на дополнительный множитель. Слева величина μ_i умножается на сумму $n-1$ членов. Итого и справа, и слева стоит сумма $(n-1)n^{n-2}$ слагаемых. Очевидно, что все слагаемые слева различны, так как представляющие их графы получаются из различных обратно ориентированных деревьев с одним и тем же корнем, дополненных ориентированным ребром, ведущим из корня в различные вершины. Степень исхода каждой вершины такого графа равна 1. Покажем, что каждому слагаемому слева найдется равное ему слагаемое справа. Рассмотрим произвольное слагаемое слева. В представлении этого слагаемого из корня номер i ведет единственное ориентированное ребро в некоторую вершину номер a, а из вершины номер a ведет единственный ориентированный маршрут в вершину номер i. На этом маршруте предыдущей перед вершиной номер i является некоторая вершина номер b. Удалим ориентированное ребро (bi). Мы получили обратно ориентированное дерево с корнем номер b. Выберем справа $j = b$. В сумме, представляющей μ_b, имеется слагаемое, чьим представлением является это ориентированное дерево. В сумме справа это слагаемое умножается на p_{bi}, то есть рассматриваемое дерево дополняется ребром (bi). Мы получили граф, представляющий член суммы справа, совпадающий с графом, представляющим произвольный член суммы слева. Таким образом, после подстановки решения в (9) суммы справа и слева почленно совпадают.

Осталось показать, что это нетривиальное решение. Так как по построению полученное решение для каждой величины μ_i состоит из суммы неотрицательных слагаемых, то для этого достаточно показать, что сумма хотя бы для одной величины μ_i содержит хотя бы один ненулевой член. Это означает, что имеется обратно ориентированное дерево на n рассматриваемых вершинах, у которого все ребра имеют ненулевой вес. Это непосредственно следует из того, что матрица P неприводимая. Из каждой вершины имеется хотя бы один ориентированный маршрут (из ребер с ненулевым весом) в вершину номер i. Возьмем по одному такому маршруту для каждой вершины. Их объединение и дает искомое обратно ориентированное дерево с корнем в вершине номер i. □

В качестве примера приведем представление обратно ориентированными деревьями инвариантной меры состояния номер 1, когда всего имеется 4 состояния.



(10)

Стационарное распределение π получается нормировкой:

$$\pi_i = \frac{\mu_i}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j}. \tag{11}$$

Заключение

Полученный результат имеет своим следствием метод нахождения инвариантной меры цепи Маркова с конечным пространством состояний. Этот метод может быть использован для аналитического исследования свойств инвариантной меры различных частных видов цепей Маркова с конечным пространством состояний, что является предметом дальнейших исследований автора. Возможно, он может оказаться эффективным в некоторых случаях при численных расчетах.

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Коганову за многочисленные плодотворные дискуссии.

Список литературы

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. Изд. 2-е. — М.: Наука, 1978. — 304 с.

Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. — М.: МЦНМО., 2009. — 588 с.

Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984. — 454 с.