**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 2 С. 205–219**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9

Квазиклассическое приближение для многомерного нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова

Е. А. Левченко[1,a], А. Ю. Трифонов[1,b], А. В. Шаповалов[2,c]

[1]Лаборатория математической физики Физико-технического института
Национального исследовательского Томского политехнического университета,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30
[2]Физический факультет
Национального исследовательского Томского государственного университета,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36

E-mail: [a] Levchenkoea@tpu.ru, [b] atrifonov@tpu.ru, [c] shpv@phys.tsu.ru

Получено 27 января 2015 г.

Для многомерного нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова в классе траекторно-сосредоточенных функций построены квазиклассические асимптотики с точностью $O(D^{N/2})$, $N \geq 3$. С помощью операторов симметрии получен счетный набор асимптотических решений исходного уравнения с точностью $O(D^{3/2})$. В явном виде построены асимптотические решения двумерного уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова.

Ключевые слова: нелокальное уравнение Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова, асимптотическое решение, система Эйнштейна–Эренфеста

Semiclassical approximation for the nonlocal multidimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation

E. A. Levchenko[1], A. Yu. Trifonov[1], A. V. Shapovalov[2]

[1]Laboratory of Mathematical Physics of Mathematical Physics Department, Tomsk Polytechnical University, 30 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia
[2]Theoretical Physics Department, Tomsk State University, 36 Lenin ave., Tomsk, 634050, Russia

Abstract. — Semiclassical asymptotic solutions with accuracy $O(D^{N/2})$, $N \geq 3$ are constructed for the multidimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation in the class of trajectory-concentrated functions. Using the symmetry operators a countable set of asymptotic solutions with accuracy $O(D^{3/2})$ is obtained. Asymptotic solutions of two-dimensional Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation are found in explicit form.

Keywords: nonlocal Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation, asymptotic solution, Einstein–Ehrenfest system

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 205–219 (Russian).

Работа частично поддержана Программой повышения конкурентоспособности ТГУ среди ведущих мировых научно-образовательных центров; программой «Наука», контракт № 1.676.2014/K; ФЦП ИР, контракт №14.578.21.0082 (уникальный идентификатор прикладных научных исследований и экспериментальных разработок RFMEFI57814X0082).

Введение

Эволюция популяций микроорганизмов одного вида с эффектами дальнодействия между индивидами моделируется нелокальными обобщениями классического уравнения Фишера [Fisher, 1937] и Колмогорова–Петровского–Пискунова [Колмогоров и др., 1937] (ФКПП) (см., например, [Fuentes et al., 2003; da Cunha et al., 2009; Ei, 1986]), которое в общем виде запишем как

$$u_t = D\Delta u - \left\langle \nabla, u[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}]\right\rangle + a(\vec{x},t)u - \varkappa u \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}, \tag{1}$$

$$u(\vec{x},t)|_{t=0} = \gamma(\vec{x}). \tag{2}$$

Здесь D — постоянный коэффициент диффузии; процесс производства популяции происходит с постоянным темпом роста a; нелокальные потери контролируются функцией влияния $b(\vec{x},\vec{y},t)$. Векторы-градиенты $V_{\vec{x}} = \nabla_x V(\vec{x},t)$ и $W_{\vec{x}} = \nabla_x W(\vec{x},\vec{y},t)$ в уравнении (1) описывают локальные и нелокальные средние конвективные скорости соответственно. Функция $u(\vec{x},t)$ является гладкой функцией, принадлежащей пространству Шварца $\mathcal{S}$ по пространственной переменной $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ в каждый момент времени t; $\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a}\rangle$.

Применение точных методов аналитического интегрирования к нелокальному уравнению ФКПП сдерживается принципиальными трудностями, поэтому для аналитического исследования возможно использовать асимптотические методы, позволяющие находить приближенные решения данного уравнения. Одним из таких методов, доказавшим свою эффективность, является метод квазиклассических асимптотик [Белов, Доброхотов, 1988; Маслов, 1973; Маслов, 1977]. Отметим, что в данном случае малым параметром будем считать коэффициент диффузии D. Также данное предположение можно объяснить и с физической точки зрения: образование структур в популяциях микроорганизмов возможно лишь при малых коэффициентах диффузии [Kenkre, 2004].

Ранее квазиклассические асимптотики были построены для задачи Коши [Трифонов, Шаповалов, 2009], для краевой задачи [Левченко и др., 2013] и для многокомпонентного [Левченко и др., 2010] одномерного уравнения ФКПП. Для одномерного нелокального уравнения ФКПП была проведена оценка точности [Левченко и др., 2012].

Опишем кратко метод квазиклассического приближения для решения нелокального уравнения ФКПП. Ключевым элементом квазиклассического подхода к построению асимптотических решений является выбор класса функций, сингулярно зависящих от малого асимптотического параметра, в котором строятся квазиклассические асимптотики. Следующим важным шагом является построение динамической системы Эйнштейна–Эренфеста (ЭЭ), описывающей эволюцию моментов искомой функции. Затем нелокальному уравнению ФКПП сопоставляется вспомогательное семейство ассоциированных линейных уравнений. Ключевая идея предлагаемого метода построения решения задачи Коши для нелинейного уравнения состоит в следующем: решения задачи Коши для ассоциированного линейного уравнения при определенном выборе параметров семейства являются приближенными решениями нелинейного уравнения. В результате удается получить формальное асимптотическое решение задачи Коши исходного нелинейного уравнения в классе траекторно-сосредоточенных функций с любой точностью по $O(D^{N/2})$, $N \geq 3$.

Работа имеет следующую структуру. В первом разделе описывается класс траекторно-сосредоточенных функций и строится динамическая система ЭЭ. Во втором разделе найдены решения ассоциированного линейного уравнения с точностью $O(D^{3/2})$, а также приближенные с точностью $O(D^{3/2})$ функция Грина и оператор эволюции. В третьем разделе построены высшие асимптотики уравнения ФКПП. В последнем разделе разработанный метод проиллюстрирован примером решения двумерного уравнения ФКПП.

Класс траекторно-сосредоточенных функций и динамическая система Эйнштейна–Эренфеста

В качестве класса функций, сингулярно зависящих от малого параметра, выберем класс траекторно-сосредоточенных функций (ТСФ) [Bagrov et al., 1996; Багров и др., 1996]

$$\mathcal{P}_t^D(\vec{X}(t,D),S(t,D)) = \left\{\Phi\middle|\Phi(\vec{x},t,D) = \varphi\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}},t,D\right)\exp\left[\frac{1}{D}S(t,D)\right]\right\}. \tag{3}$$

Здесь вещественная функция $\varphi(\vec{\eta},t,D)$ принадлежит пространству Шварца $\mathcal{S}$ по переменной $\vec{\eta}\in\mathbb{R}^n$, гладким образом зависит от t и регулярно зависит от $\sqrt{D}$ при $D\to 0$, $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t,D)$, а вещественные функции $S(t,D)$ (аналог классического действия в линейном случае при $\varkappa = 0$) и $\vec{X}(t,D)$, характеризующие класс $\mathcal{P}_t^D = \mathcal{P}_t^D(\vec{X}(t,D),S(t,D))$, регулярно зависят от $\sqrt{D}$ в окрестности $D = 0$ и подлежат определению.

Предположим, что для нелинейного уравнения (1) существуют точные (или отличающиеся от них на величину $O(D^\infty)$) решения $u(\vec{x},t)$ в классе ТСФ с начальным условием $u(\vec{x},0) = \varphi(\vec{x}) \in \mathcal{P}_t^D$. Обозначим

$$m_u(t,D) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x},t,D)d\vec{x}, \tag{4}$$

$$\vec{x}_u(t,D) = \frac{1}{m_u(t,D)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \vec{x}u(\vec{x},t,D)d\vec{x}, \tag{5}$$

$$\alpha_u^{(\sigma)}(t,D) = \frac{1}{m_u(t,D)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}[\vec{x}-\vec{x}_u(t,D)]^\sigma u(\vec{x},t,D)d\vec{x}, \tag{6}$$

$$\Theta_u(t,D) = \left(m_u(t,D),\vec{x}_u(t,D),\alpha_u^{(\sigma)}(t,D)\right). \tag{7}$$

Функция $m_u(t)$ — момент нулевого порядка; $\vec{x}_u(t)$ — первый начальный нормированный, а $\alpha_u^{(\sigma)}(t)$ — высшие центральные нормированные моменты функции $u(\vec{x},t)$. Здесь $\sigma\in\mathbb{Z}^n{}_+$ — мультииндекс:

$$\vec{a}^\sigma = a_1^{\sigma_1}a_2^{\sigma_2}\cdots a_n^{\sigma_n},\quad |\sigma| = \sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_n,\quad \sigma! = \sigma_1!\sigma_2!\cdots\sigma_n!,\quad \alpha^{(\sigma)} = \alpha^{(\sigma_1,\ldots,\sigma_2)}. \tag{8}$$

Положим в (3) $\vec{X}(t) = \vec{x}_u(t)$. Тогда на функциях класса $\mathcal{P}_t^D$ справедливы асимптотические оценки [Bagrov et al., 1996; Багров и др., 1996]:

$$\frac{||\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}(t,D)\Phi||}{||\Phi||} = O(D^{(|\alpha|+|\beta|)/2}),\quad \frac{||[D\partial_t + \langle\dot{\vec{x}}(t),\hat{\vec{\pi}}\rangle - \dot{S}(t)]\Phi||}{||\Phi||} = O(D),\quad \alpha_u^{(\sigma)}(t) = O(D^{|\sigma|/2}), \tag{9}$$

где через $||\ldots||$ обозначена норма в пространстве L_2, $\hat{\vec{\pi}} = D\partial_{\vec{x}}$, $\Delta\vec{x} = \vec{x}-\vec{x}_u$, а $\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}(t,D)$ — оператор с вейлевским символом $\Delta_{\alpha,\beta}(\vec{\pi},\vec{x},t,D) = \vec{\pi}^\alpha(\Delta\vec{x})^\beta$ и $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ — мультииндексы.

Динамическая система Эйнштейна–Эренфеста, описывающая эволюцию моментов (4)–(6), может быть представлена в виде (см. приложение, система (89))

$$\dot{\Theta}(t,D) = \Gamma(\Theta(t,D),t;D),\quad \Theta(t) = (m(t),\vec{x}(t),\alpha^{(M)}(t)), \tag{10}$$

где $\Gamma(\Theta(t,D),t;D)$ представляет собой вектор, состоящий из правых частей системы (89) при $m(t),\vec{x}(t),\alpha^{(M)}(t)$ соответственно.

Систему уравнений (10) будем называть *системой уравнений* ЭЭ порядка M для уравнения (1), или системой ЭЭ типа $(0, M)$.

Начальные условия для системы (10) определим соотношениями

$$\begin{gathered} m|_{t=0} = m_\gamma = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \vec{x}|_{t=0} = \vec{x}_\gamma = \frac{1}{m_\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \vec{x}\gamma(\vec{x}) d\vec{x}, \\ \alpha^{(\sigma)}|_{t=0} = \alpha^{(\sigma)}_\gamma = \frac{1}{m_\gamma} \int_{\mathbb{R}^n} (\vec{x} - \vec{x}_\gamma)^\sigma \gamma(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \Theta_\gamma = (m_\gamma, \vec{x}_\gamma, \alpha^{(\sigma)}_\gamma), \quad \gamma(\vec{x}) \in \mathcal{P}^D_0. \end{gathered} \tag{11}$$

Решения системы (10) с начальными условиями (11) будем обозначать как

$$\mathfrak{g}^{(M)}[\gamma](t) = (m^{(M)}[\gamma](t), \vec{x}^{(M)}[\gamma](t), \alpha^{(\sigma,M)}[\gamma](t)), \quad |\sigma| = \overline{2, M}, \tag{12}$$

а общее решение системы (10), —

$$\mathfrak{g}^{(M)}(t, \mathbf{C}) = (m^{(M)}(t, \mathbf{C}), \vec{x}^{(M)}(t, \mathbf{C}), \alpha^{(\sigma,M)}(t, \mathbf{C})), \quad |\sigma| = \overline{2, M}, \tag{13}$$

где $\mathbf{C}$ — набор постоянных интегрирования. С учетом оценок (9) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Решения* $m^{(M)}[\gamma](t)$, $\vec{x}^{(M)}[\gamma](t)$ *и* $\alpha^{(\sigma,M)}[\gamma](t)$ *системы Эйнштейна–Эренфеста порядка* M *и средние* (4)–(6) *связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} m_u(t) &= m^{(M)}[\gamma](t) + O(D^{(M+1)/2}), \\ \vec{x}_u(t) &= \vec{x}^{(M)}[\gamma](t) + O(D^{(M+1)/2}), \\ \alpha^{(\sigma)}_u(t) &= \alpha^{(\sigma,M)}[\gamma](t) + O(D^{(M+1)/2}), \quad |\sigma| = \overline{2, M}, \end{aligned} \tag{14}$$

причем $u(\vec{x}, 0) = \gamma(\vec{x}) \in \mathcal{P}^D_0$.

Структура решения нелинейного уравнения ФКПП в классе траекторно-сосредоточенных функций

Решение уравнения (1) будем искать в классе функций $\mathcal{P}^D_t$ (3). Разложим функции $W_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}, t)$ и $b(\vec{x}, \vec{y}, t)$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\vec{y} = \vec{y} - \vec{x}_u(t)$. С учетом оценок (9) перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{gathered} D\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} = \langle \hat{\vec{\pi}}, \hat{\vec{\pi}} \rangle u(\vec{x}, t) - \Big\langle \hat{\vec{\pi}}, \Big[V_{\vec{x}}(\vec{x}, t) u(\vec{x}, t) + \varkappa m_u u(\vec{x}, t) \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y, \vec{x}_u(t)} [W_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}, t)] \Big] \Big\rangle + \\ + Da(\vec{x}, t) u(\vec{x}, t) - D\varkappa m_u u(\vec{x}, t) \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y, \vec{x}_u(t)} [b(\vec{x}, \vec{y}, t)] + O(D^{(M+1)/2}). \end{gathered} \tag{15}$$

Запишем вспомогательное уравнение, которое получается из (15) формальной заменой средних $m_u(t)$, $\vec{x}_u(t)$ и $\alpha^{(\nu)}_u(t)$ общим решением (13) системы Эйнштейна–Эренфеста порядка M (10):

$$D\frac{\partial v(\vec{x}, t, \mathbf{C})}{\partial t} = \Big\{ \langle \hat{\vec{\pi}}, \hat{\vec{\pi}} \rangle - \langle \hat{\vec{\pi}}, \vec{B}^{(M)}(\vec{x}, t, \mathbf{C}) \rangle + DA^{(M)}(\vec{x}, t, \mathbf{C}) \Big\} v(\vec{x}, t, \mathbf{C}) + O(D^{(M+1)/2}), \tag{16}$$

где

$$A^{(M)}(\vec{x}, t, \mathbf{C}) = a(\vec{x}, t) - \varkappa m(t, \mathbf{C}) \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y, \vec{x}(t, \mathbf{C})} [b(\vec{x}, \vec{y}, t)], \tag{17}$$

$$\vec{B}^{(M)}(\vec{x}, t, \mathbf{C}) = V_{\vec{x}}(\vec{x}, t) + \varkappa m(t, \mathbf{C}) \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y, \vec{x}(t, \mathbf{C})} [W_{\vec{x}}(\vec{x}, \vec{y}, t)]. \tag{18}$$

Здесь параметрами семейства уравнений (16) являются постоянные $\mathbf{C}$. Отметим, что (16) не является линеаризацией уравнения (15), а привлекается в качестве вспомогательной линейной задачи для решения уравнения (15).

Теорема 2. *Если траекторно-сосредоточенные решения уравнений* (15) *и* (16) *удовлетворяют одному и тому же начальному условию*

$$u(\vec{x},0)=v(\vec{x},0,\mathbf{C})=\gamma(\vec{x}),\quad \gamma(\vec{x})\in\mathcal{P}_0^D, \tag{19}$$

то решения уравнений (15) *и* (16) *связаны соотношением*

$$u^{(M)}(\vec{x},t)=v^{(M)}(\vec{x},t,\mathbf{C})\Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[\gamma]}+O(D^{(M+1)/2}). \tag{20}$$

Уравнение (16) назовем ассоциированным линейным уравнением ФКПП порядка M. Разложим функции $A^{(M)}(\vec{x},t,\mathbf{C})$ и $\vec{B}^{(M)}(\vec{x},t,\mathbf{C})$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{x}^{(M)}(t,\mathbf{C})$, где $\vec{x}^{(M)}(t,\mathbf{C})$ — главный член решения системы Эйнштейна–Эренфеста (10):

$$A^{(M)}(\vec{x},t,\mathbf{C})=\sum_{|\mu|=0}^{M}\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{|\mu|}A^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial\vec{x}^{\mu}}\Delta\vec{x}^{\mu},\quad \vec{B}^{(M)}(\vec{x},t,\mathbf{C})=\sum_{|\mu|=0}^{M}\frac{1}{\mu!}\frac{\partial^{|\mu|}\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial\vec{x}^{\mu}}\Delta\vec{x}^{\mu}. \tag{21}$$

Представим уравнение (16) в виде

$$\hat{L}(t,\mathbf{C})v=[\hat{L}_0^{(M)}(t,\mathbf{C})+\sqrt{D}\hat{L}_1^{(M)}(t,\mathbf{C})+D\hat{L}_2^{(M)}(t,\mathbf{C})+\ldots]v(\vec{x},t,\mathbf{C})=0, \tag{22}$$

где

$$\hat{L}_0^{(M)}(t,\mathbf{C})=D\partial_t-\langle\hat{\vec{\pi}},\hat{\vec{\pi}}\rangle+\Big\langle\hat{\vec{\pi}},\Big[\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})+\frac{\partial\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial x_n}\Delta x_n\Big]\Big\rangle-DA^{(M)}(t,\mathbf{C})=$$
$$=D\partial_t+\langle\dot{\vec{x}}^{(M)}(t,\mathbf{C}),\hat{\vec{\pi}}\rangle-\langle\hat{\vec{\pi}},\hat{\vec{\pi}}\rangle+\Big\langle\hat{\vec{\pi}},\Big[\frac{\partial\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial x_n}\Delta x_n\Big]\Big\rangle-DA^{(M)}(t,\mathbf{C}),$$

. . . .

Траекторно-сосредоточенные решения $v(\vec{x},t,\mathbf{C})\in\mathcal{P}_t^D$ уравнения (22) будем искать в виде регулярного разложения по степеням $\sqrt{D}$:

$$v(\vec{x},t,\mathbf{C})=v^{(0)}(\vec{x},t,\mathbf{C})+\sqrt{D}v^{(1)}(\vec{x},t,\mathbf{C})+Dv^{(2)}(\vec{x},t,\mathbf{C})+\ldots. \tag{23}$$

Здесь $v^{(k)}(\vec{x},t,\mathbf{C})\in\mathcal{P}_t^D$.

Для нахождения функции $v_0(\vec{x},t,\mathbf{C})$ получим уравнение

$$\hat{L}_0^{(M)}(t,\mathbf{C})v^{(0)}=0. \tag{24}$$

Уравнение (24) является линейным уравнением ФКПП с квадратичным по производным и линейным по координатам оператором, который мы запишем в симметризованном виде:

$$\Big\{D\partial_t-\langle\hat{\vec{\pi}},\hat{\vec{\pi}}\rangle+\frac{D}{2}\mathrm{Sp}\Omega+\frac{1}{2}\Big[\Big\langle\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial x_i}\Delta x_i,\hat{\vec{\pi}}\Big\rangle+$$
$$+\Big\langle\hat{\vec{\pi}},\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{B}^{(M)}(t,\mathbf{C})}{\partial x_i}\Delta x_i\Big\rangle\Big]+\langle\dot{\vec{x}}^{(M)}(t,\mathbf{C}),\hat{\vec{\pi}}\rangle-DA^{(M)}(t,\mathbf{C})\Big\}v_0=0,$$
$$v_0=v_0^{(0)}(\vec{x},t,\mathbf{C}),\quad \Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{x}^{(M)}(t,\mathbf{C}),\quad \Omega(t)=V_{xx}(t,\mathbf{C})+\varkappa m(t,\mathbf{C})W_{xx}(t,\mathbf{C}). \tag{25}$$

Частное решение уравнения (25) будем искать в виде

$$v_0(\vec{x},t,\mathbf{C})=N_Dm(t,\mathbf{C})\exp\Big\{\frac{1}{D}\Big[S_0(t)+DS_1(t)+\frac{1}{2}\langle\Delta\vec{x},Q(t)\Delta\vec{x}\rangle\Big]\Big\}, \tag{26}$$

где $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}^{(M)}(t,\mathbf{C})$; N_D — нормировочная константа, а функции $S_0(t), S_1(t)$ и симметричная отрицательно-определенная матрица $Q(t)$ подлежат определению. Подставив (26) в уравнение (25) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\Delta\vec{x}$, получим следующую систему уравнений:

$$\dot{S}_0(t) = 0, \tag{27}$$

$$\dot{S}_1(t) - \mathrm{Sp}[-\Omega(t) + Q(t)] = 0, \tag{28}$$

$$\dot{Q}(t) + Q(t)\Omega(t) + \Omega^{\intercal}(t)Q(t) - 2Q^2(t) = 0. \tag{29}$$

Уравнение (29) является матричным уравнением типа Риккати.

Уравнения типа (25) допускают операторы симметрии с общей структурой вида

$$\hat{a}(t,\mathbf{C}) = N_a[\langle\vec{\mathcal{Z}}(t), D\partial_{\vec{x}}\rangle - \langle\vec{\mathcal{W}}(t), \Delta\vec{x}\rangle], \tag{30}$$

где N_a — постоянный множитель. Операторы вида (30) являются линейными по производным и координатам. Функции $\vec{\mathcal{Z}}(t)$ и $\vec{\mathcal{W}}(t)$ определяются из условия равенства нулю коммутатора

$$[\hat{L}_0^{(M)}(t,\mathbf{C}), \hat{a}(t,\mathbf{C})] = 0. \tag{31}$$

Соотношение (31) будет выполнено, если векторы $\vec{\mathcal{Z}}(t)$, $\vec{\mathcal{W}}(t)$ являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathcal{W}}}(t) = -\Omega^{\intercal}(t)\vec{\mathcal{W}}(t), \\ \dot{\vec{\mathcal{Z}}}(t) = -2\vec{\mathcal{W}}(t) + \Omega(t)\vec{\mathcal{Z}}(t), \end{cases} \tag{32}$$

которую мы назовем системой в вариациях в векторной форме.

Обозначим через $B(t)$ и $C(t)$ матрицы размера $n\times n$, элементами которых являются частные решения системы в вариациях

$$B(t) = (\vec{\mathcal{W}}_1(t), \ldots, \vec{\mathcal{W}}_n(t)), \quad C(t) = (\vec{\mathcal{Z}}_1(t), \ldots, \vec{\mathcal{Z}}_n(t)). \tag{33}$$

Тогда матрицы (33) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{B}(t) = -\Omega^{\intercal}(t)B(t), \\ \dot{C}(t) = -2B(t) + \Omega(t)C(t), \end{cases} \tag{34}$$

которую назовем системой в вариациях в матричной форме. Справедливы следующие соотношения [Bagrov et al., 1996]:

$$Q(t) = B(t)(C(t))^{-1}, \quad \exp\left[\int\limits_0^t \mathrm{Sp}[-\Omega(\tau) + 2Q(\tau)]d\tau\right] = \frac{\det C(0)}{\det C(t)},$$

$$\exp\Big[-\int\limits_0^t \mathrm{Sp}Q(\tau)d\tau\Big] = \sqrt{\frac{\det B(t)\det C(t)}{\det B(0)\det C(0)}}. \tag{35}$$

Выделим из общего решения системы уравнений (32) $2n$ частных решений, удовлетворяющих начальным условиям

$$B^{(\pm)}(0) = \mathrm{diag}(\pm b_1, \ldots, \pm b_n), \quad b_i > 0, \quad C^{(\pm)}(0) = \mathbb{I}_{n\times n}. \tag{36}$$

Эти решения обозначим как

$$a_j^{(\pm)}(t,\mathbf{C}) = (\vec{\mathcal{W}}_j^{(\pm)}(t), \vec{\mathcal{Z}}_j^{(\pm)}(t)) = (\mathcal{W}_{1j}^{(\pm)}(t), \ldots, \mathcal{W}_{nj}^{(\pm)}(t), \mathcal{Z}_{1j}^{(\pm)}(t), \ldots, \mathcal{Z}_{nj}^{(\pm)}(t))^{\intercal}, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{37}$$

Заметим, что на решениях системы в вариациях сохраняется кососкалярное произведение:

$$\langle \vec{\mathcal{Z}}_i^{(-)}(t), \vec{\mathcal{W}}_j^{(+)}(t)\rangle - \langle \vec{\mathcal{W}}_j^{(-)}(t), \vec{\mathcal{Z}}_i^{(+)}(t)\rangle = 2b_j\delta_{ij}. \tag{38}$$

Назовем операторы $\hat{\vec{a}}^{(-)}(t,\mathbf{C})$ и $\hat{\vec{a}}^{(+)}(t,\mathbf{C})$ операторами «уничтожения» и «рождения» соответственно для функции

$$v_0(\vec{x},t,\mathbf{C}) = m(t,\mathbf{C})\sqrt{\frac{\det B^{(-)}(t)}{(-2\pi D)^n \det C^{(-)}(t)}}\exp\left(\frac{1}{2D}\langle\Delta\vec{x}, Q^{(-)}(t)\Delta\vec{x}\rangle\right). \tag{39}$$

Будем предполагать, что матрицы $B^{(-)}(t)$ и $C^{(-)}(t)$ таковы, что интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_0(\vec{x},t,\mathbf{C})d\vec{x} \tag{40}$$

сходится. Сходимость интеграла (40) можно объяснить тем, что матрица $Q^{(-)}(t)$ отрицательно-определенная. В этом случае подкоренное выражение в предэкспоненте автоматически будет положительным. Отметим, что интеграл (40) равен $m(t,\mathbf{C})$.

Выберем операторы симметрии (30) в виде

$$\hat{a}_j^{(-)}(t,\mathbf{C}) = -\frac{1}{\sqrt{2Db_j}}[\langle\vec{\mathcal{Z}}_j^{(-)}(t), D\partial_{\vec{x}}\rangle - \langle\vec{\mathcal{W}}_j^{(-)}(t),\Delta\vec{x}\rangle], \tag{41}$$

$$\hat{a}_j^{(+)}(t,\mathbf{C}) = \frac{1}{\sqrt{2Db_j}}[\langle\vec{\mathcal{Z}}_j^{(+)}(t), D\partial_{\vec{x}}\rangle - \langle\vec{\mathcal{W}}_j^{(+)}(t),\Delta\vec{x}\rangle]. \tag{42}$$

Тогда выполняется следующее условие:

$$[\hat{a}_j^{(-)}(t,\mathbf{C}), \hat{a}_k^{(+)}(t,\mathbf{C})] = \delta_{jk}. \tag{43}$$

Функция (39) является вакуумным состоянием для оператора $\hat{\vec{a}}^{(-)}(t,\mathbf{C})$, т. е.

$$\hat{\vec{a}}^{(-)}(t,\mathbf{C})v_0(\vec{x},t,\mathbf{C}) = 0. \tag{44}$$

Набор функций $v_\nu(\vec{x},t,\mathbf{C})$ определим как результат действия оператора $\hat{\vec{a}}^{(+)}(t,\mathbf{C}) = (\hat{a}_1^{(+)}(t,\mathbf{C}),\ldots,\hat{a}_n^{(+)}(t,\mathbf{C}))$ на решение (39):

$$v_\nu = v_\nu(\vec{x},t,\mathbf{C}) = \frac{1}{\sqrt{\nu!}}(\hat{\vec{a}}^{(+)}(t,\mathbf{C}))^\nu v_0(\vec{x},t,\mathbf{C}). \tag{45}$$

Так как $\hat{\vec{a}}^{(+)}(t,\mathbf{C})$ — операторы симметрии уравнения (25), а функция $v_0(\vec{x},t,\mathbf{C})$ является его решением, то функции (45) также являются решением уравнения (25).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Функции* $u_\nu(\vec{x},t) = v_\nu(\vec{x},t,\mathbf{C}_\nu)$ *являются асимптотическими решениями уравнения* (1) *с точностью* $O(D^{3/2})$*, если удовлетворяют начальному условию*

$$u(\vec{x},t)\Big|_{t=0} = v_\nu(\vec{x},0,\mathbf{C}_\nu) = \gamma(\vec{x}), \tag{46}$$

где $\mathbf{C}_\nu$ *определяются из условия* $\mathfrak{g}^{(M)}(t,\mathbf{C}_\nu) = \mathfrak{g}^{(M)}[\gamma](t)$.

Определим вспомогательную систему функций

$$w_\mu(\vec{x},t,\mathbf{C}) = \frac{1}{\sqrt{\mu!}}(\hat{\vec{b}}^{(+)}(t,\mathbf{C}))^\mu w_0(\vec{x},t,\mathbf{C}), \quad \mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{Z}_+{}^n, \tag{47}$$

где

$$w_0(\vec{x},t,\mathbf{C}) = \frac{1}{m(t,\mathbf{C})}\sqrt{\frac{(-1)^n(b_1\cdots b_n)}{\det[B^{(+)}(t)C^{(+)}(t)]}}\exp\Big[-\frac{1}{2D}\langle\Delta\vec{x},Q^{(+)}(t)\Delta\vec{x}\rangle\Big], \tag{48}$$

$$\hat{\vec{b}}^{(+)}(t) = (\hat{b}_1^{(+)}(t),\ldots,\hat{b}_n^{(+)}(t)), \quad \hat{b}_j^{(+)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2Db_j}}(\langle\vec{\mathcal{Z}}_j^{(-)},D\partial_{\vec{x}}\rangle + \langle\vec{\mathcal{W}}_j^{(-)},\Delta\vec{x}\rangle). \tag{49}$$

Теорема 4. 1. *Система функций* $\{v_\nu\}_{|\nu|=0}^\infty, \{w_\mu\}_{|\mu|=0}^\infty$ *биортогональна:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} v_\nu(\vec{x},t,\mathbf{C})w_\mu(\vec{x},t,\mathbf{C})d\vec{x} = \delta_{\mu\nu}, \tag{50}$$

удовлетворяет условию полноты

$$\sum_{|\nu|=0}^\infty v_\nu(\vec{x},t,\mathbf{C})w_\nu(\vec{y},t,\mathbf{C}) = \delta(\vec{x}-\vec{y}). \tag{51}$$

Функция Грина уравнения (25) определяется соотношением (детали вычислений для одномерного случая подробно приведены в [Трифонов, Шаповалов, 2009])

$$G_0(\vec{x},\vec{y},t,s,\mathrm{g}^{(M)}(t,\mathbf{C})) = \sum_{|\nu|=0}^\infty v_\nu(\vec{x},t,\mathbf{C})w_\nu(\vec{y},s,\mathbf{C}) = \frac{m[\gamma](t,\mathbf{C})}{m[\gamma](s,\mathbf{C})}\sqrt{\frac{1}{(2\pi D)^n}\frac{\det M_1(t,s)}{\det M_2(t,s)}}\times$$

$$\times\exp\Big\{\frac{1}{2D}\langle\Delta\vec{x}-M_3^\intercal(t,s)(\vec{y}-\vec{X}(s,\mathbf{C})),M_1(t,s)(M_2(t,s))^{-1}(\Delta\vec{x}-M_3^\intercal(t,s)(\vec{y}-\vec{X}(s,\mathbf{C})))\rangle\Big\}, \tag{52}$$

а оператор эволюции уравнения уравнения (25) можно представить в виде

$$\hat{U}_0(t,s,\gamma)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_0(\vec{x},\vec{y},t,s,\mathrm{g}^{(M)}(t,\mathbf{C}))\Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[\gamma]}\gamma(\vec{y})d\vec{y}, \tag{53}$$

где $M_1(t,s)$, $M_2(t,s)$, $M_3(t,s)$ — матриканты системы в вариациях (32):

$$M = \begin{pmatrix} M_1(t,s) & 0 \\ M_2(t,s) & M_3(t,s)\end{pmatrix}, \quad M|_{t=s} = \mathbb{I}. \tag{54}$$

Оператор эволюции (53) является приближенным с точностью до $O(D^{3/2})$ оператором эволюции уравнения (1). Если уравнение (1) является уравнением с квадратичным оператором, оператор (53) является *точным* оператором эволюции.

Квазиклассические асимптотики нелокального уравнения ФКПП с точностью $O(D^{N/2})$

Подставим (23) в (22) и приравняем слагаемые, имеющие одинаковую по D оценку в смысле (9). Получим рекуррентную систему уравнений:

$$\hat{L}_0^{(M)}(t,\mathbf{C})v^{(0)} = 0, \tag{55}$$

$$\hat{L}_0^{(M)}(t,\mathbf{C})v^{(1)} + \hat{L}_1^{(M)}(t,\mathbf{C})v^{(0)} = 0, \tag{56}$$

$$\hat{L}_0^{(M)}(t,\mathbf{C})v^{(2)} + \hat{L}_1^{(M)}(t,\mathbf{C})v^{(1)} + \hat{L}_2^{(M)}(t,\mathbf{C})v^{(0)} = 0. \tag{57}$$

. . . .

Из (55)–(57) найдем

$$v^{(1)}(\vec{x},t,\mathbf{C}) = \int\limits_s^t d\tau \hat{U}_0(t,\tau)\hat{L}_1^{(M)}(\tau,\mathbf{C})v^{(0)}, \tag{58}$$

$$v^{(2)}(\vec{x},t,\mathbf{C}) = \int\limits_s^t d\tau \hat{U}_0(t,\tau)\hat{L}_2^{(M)}(\tau,\mathbf{C})v^{(0)}+$$

$$+\int\limits_s^t d\tau_1 \int\limits_s^{\tau_1} d\tau \hat{U}_0(t,\tau_1)\hat{L}_1^{(M)}(\tau,\mathbf{C})\hat{U}_0(\tau_1,\tau)\hat{L}_1^{(M)}(\tau_1,\mathbf{C})v^{(0)}, \tag{59}$$

. . . .

Функция

$$v_2^{(2)}(\vec{x},t,\mathbf{C}) = v^{(0)}(\vec{x},t,\mathbf{C}) + \sqrt{D}v^{(1)}(\vec{x},t,\mathbf{C}) + Dv^{(2)}(\vec{x},t,\mathbf{C})$$

является формальным асимптотическим решением ассоциированного уравнения ФКПП (22) с точностью $O(D^{5/2})$. Функция

$$u^{(2)}(\vec{x},t) = v^{(2)}(\vec{x},t,\mathbf{C})\Big|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[\gamma]}$$

является формальным асимптотическим с точностью $O(D^{5/2})$ решением задачи Коши $u(\vec{x},t)|_{t=s} = \gamma(\vec{x})$ для уравнения (1).

Формулы (58), (59) могут быть легко обобщены на случай построения асимптотического решения $u^{(N)}(\vec{x},t)$ уравнения (1) с любой точностью по $O(D^{N/2})$.

Пример решения двумерного уравнения ФКПП

В качестве примера рассмотрим двумерное ($\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^2$) обобщенное нелокальное уравнение ФКПП вида (1) при следующих функциях, входящих в уравнение, и начальном условии соответственно:

$$V(\vec{x},t) = \frac{k\vec{x}^2}{2}, \quad W(\vec{x},\vec{y},t) = w_0 \exp\Big(-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{2\gamma_1^2}\Big), \quad a(\vec{x},t) = a, \quad b(\vec{x},\vec{y},t) = b_0 \exp\Big(-\frac{(\vec{x}-\vec{y})^2}{2\gamma_2^2}\Big),$$

$$u|_{t=0} = \gamma(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi D}\exp\Big(-\frac{\vec{x}^2}{2D}\Big). \tag{60}$$

Здесь $k, w_0, a, b_0, \gamma_1, \gamma_2$ — вещественные параметры. Функции (60) используются при моделировании процессов популяционной динамики (см., например, [da Cunha et al., 2009; Murray, 2001]).

Система ЭЭ вида (10) для функций $m(t)$, $\vec{x}(t)$ и $\alpha^{(2,0)}(t)$, $\alpha^{(1,1)}(t)$, $\alpha^{(0,2)}(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{m} = am - \varkappa b_0 m^2, \quad \dot{\vec{x}} = k\vec{x},\\
&\dot{\alpha}^{(2,0)}(t) = 2D + 2k\alpha^{(2,0)} - \frac{2\varkappa w_0}{\gamma_1^2}m\alpha^{(2,0)},\\
&\dot{\alpha}^{(1,1)}(t) = 2k\alpha^{(1,1)} - \frac{2\varkappa w_0}{\gamma_1^2}m\alpha^{(1,1)},\\
&\dot{\alpha}^{(0,2)}(t) = 2D + 2k\alpha^{(0,2)} - \frac{2\varkappa w_0}{\gamma_1^2}m\alpha^{(0,2)}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Решение задачи Коши для системы (61) с начальными условиями

$$m_\gamma = 1, \quad \vec{x}_\gamma = 0, \quad \alpha_\gamma^{(2,0)} = D, \quad \alpha_\gamma^{(1,1)} = 0, \quad \alpha_\gamma^{(0,2)} = D \tag{62}$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} &m(t) = \frac{am_\gamma e^{at}}{a + m_\gamma \varkappa b_0(e^{at}-1)} = \frac{ae^{at}}{a + \varkappa b_0(e^{at}-1)}, \quad \vec{x}(t) = \vec{x}_\gamma e^{kt} = 0, \quad \alpha^{(1,1)}(t) = \alpha_\gamma^{(1,1)}\varphi(t) = 0,\\ &\alpha^{(2,0)}(t) = \varphi(t)\Big(2D\int\limits_0^t \varphi^{-1}(\tau)d\tau + \alpha_\gamma^{(2,0)}\Big) = D\varphi(t)\Big(2\int\limits_0^t \varphi^{-1}(\tau)d\tau + 1\Big),\\ &\alpha^{(0,2)}(t) = \varphi(t)\Big(2D\int\limits_0^t \varphi^{-1}(\tau)d\tau + \alpha_\gamma^{(0,2)}\Big) = D\varphi(t)\Big(2\int\limits_0^t \varphi^{-1}(\tau)d\tau + 1\Big), \end{aligned} \tag{63}$$

где

$$\varphi(t) = e^{2kt}\left[1 + \frac{\varkappa b_0 m_\gamma}{a}(e^{at}-1)\right]^{-2w_0/b_0\gamma_1^2}.$$

Решение уравнения (1) с точностью до $O(D^{3/2})$ находим с помощью решений ассоциированного линейного уравнения вида (24)

$$\hat{L}_0(t,\mathbf{C})v^{(0)}(\vec{x},t,\mathbf{C}) = 0, \tag{64}$$

где

$$\begin{aligned} &\hat{L}_0(t,\mathbf{C}) = D\partial_t + \langle\dot{\vec{x}}(t,\mathbf{C}),\hat{\vec{\pi}}\rangle - DA(t,\mathbf{C}) + \Big\langle\hat{\vec{\pi}},\Big[\frac{\partial\vec{B}(t,\mathbf{C})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial\vec{B}(t,\mathbf{C})}{\partial x_2}\Delta x_2\Big]\Big\rangle - \langle\hat{\vec{\pi}},\hat{\vec{\pi}}\rangle,\\ &\vec{B} = \vec{B}(t,\mathbf{C}) = k\vec{x} - \frac{\varkappa w_0}{\gamma_1^2}m(t)\Delta\vec{x}, \quad A = A(t,\mathbf{C}) = a - \varkappa b_0 m(t). \end{aligned} \tag{65}$$

Уравнение (64) параметрически зависит от набора констант $\mathbf{C}$. Для построения решений уравнения (64) введем матрицы

$$B(t,\mathbf{C}) = (\vec{\mathcal{W}}_1(t,\mathbf{C}),\vec{\mathcal{W}}_2(t,\mathbf{C}))^\intercal, \quad C(t,\mathbf{C}) = (\vec{\mathcal{Z}}_1(t,\mathbf{C}),\vec{\mathcal{Z}}_2(t,\mathbf{C}))^\intercal,$$

которые определяются из системы в вариациях вида (32):

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathcal{W}}} = -B_x\vec{\mathcal{W}},\\ \dot{\vec{\mathcal{Z}}} = -2\vec{\mathcal{W}} + B_x\vec{\mathcal{W}}. \end{cases} \tag{66}$$

Решение системы в вариациях с начальными условиями (36) представим в матричном виде (33):

$$B^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \pm b_1\varphi^{-1/2}(t) & 0\\ 0 & \pm b_2\varphi^{-1/2}(t)\end{pmatrix}, \quad C^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \varphi^{1/2}(t)\psi_1^{(\mp)}(t) & 0\\ 0 & \varphi^{1/2}(t)\psi_2^{(\mp)}(t)\end{pmatrix}, \tag{67}$$

где

$$\psi_k^{(\pm)}(t) = \pm 2b_k\int_0^t \varphi^{-1}(\tau)d\tau + 1, \quad k = 1,2. \tag{68}$$

Тогда решение ассоциированного линейного уравнения $v_0(\vec{x},t,\mathbf{C})$ (39) представим в виде

$$\begin{aligned} v_0(\vec{x},t,\mathbf{C}) &= \frac{m(t,\mathbf{C})}{2\pi D}\sqrt{\frac{\det B^{(-)}(t)}{\det C^{(-)}(t)}}\exp\Big(\frac{1}{2D}\langle\Delta\vec{x},Q^{(-)}(t)\Delta\vec{x}\rangle\Big) =\\ &= \frac{m(t,\mathbf{C})}{2\pi D\varphi(t)}\sqrt{\frac{b_1b_2}{\psi_1^{(+)}(t)\psi_2^{(+)}(t)}}\exp\left\{\frac{-1}{2D\varphi(t)\psi_1^{(+)}(t)\psi_2^{(+)}(t)}\Big\langle\Delta\vec{x},\begin{pmatrix} b_1\psi_2^{(+)}(t) & 0\\ 0 & b_2\psi_1^{(+)}(t)\end{pmatrix},\Delta\vec{x}\Big\rangle\right\}. \end{aligned} \tag{69}$$

Чтобы функция $v_0(\vec{x}, t, \mathbf{C})$ удовлетворяла начальному условию (60), положим $b_1 = b_2 = 1$. Тогда решение исходного уравнения (1) имеет вид

$$u_0(\vec{x}, t) = v_0(\vec{x}, t, \mathbf{C})|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[u_0]}. \tag{70}$$

С помощью соотношения (45) построим систему функций — решений ассоциированного линейного уравнения

$$v_\nu(\vec{x}, t, \mathbf{C}) = \frac{1}{\sqrt{\nu!}}(\hat{\vec{a}}_1^{(+)}(t, \mathbf{C}))^{\nu_1}(\hat{\vec{a}}_2^{(+)}(t, \mathbf{C}))^{\nu_2} v_0(\vec{x}, t, \mathbf{C}), \quad \nu = \nu_1 + \nu_2. \tag{71}$$

Асимптотические решения $u_\nu(\vec{x}, t)$ исходного уравнения (1) с точностью до $O(D^{3/2})$ имеют вид

$$u_\nu(\vec{x}, t) = v_\nu(\vec{x}, t, \mathbf{C})|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[u_\nu]}. \tag{72}$$

В качестве примера запишем в явном виде решения

$$v_{(2,0)} = (\hat{\vec{a}}_1^{(+)})^2 v_0, \quad v_{(1,1)} = \hat{\vec{a}}_1^{(+)}\hat{\vec{a}}_2^{(+)} v_0. \tag{73}$$

Для (73) получим

$$\begin{aligned} v_{(2,0)} = {} & \frac{m(t, \mathbf{C})}{4\sqrt{2}\pi D^2 \varphi(t)}\sqrt{\frac{1}{\psi_1^{(+)}(t)\psi_2^{(+)}(t)}}\Big[-D\langle\vec{\mathcal{Z}}_1, Q(t)\vec{\mathcal{Z}}_1\rangle - D\langle\vec{\mathcal{Z}}_1, \vec{\mathcal{W}}_1\rangle + (\langle\vec{\mathcal{Z}}_1, Q(t)\Delta\vec{x}\rangle)^2 + \\ & + 2\langle\vec{\mathcal{Z}}_1, Q(t)\Delta\vec{x}\rangle\langle\vec{\mathcal{W}}_1, \Delta\vec{x}\rangle + (\langle\vec{\mathcal{W}}_1, \Delta\vec{x}\rangle)^2\Big]\exp\left\{\frac{-1}{2D}\Big\langle\Delta\vec{x}, Q(t)\Delta\vec{x}\Big\rangle\right\}, \\ v_{(1,1)} = {} & \frac{m(t, \mathbf{C})}{4\pi D^2 \varphi(t)}\sqrt{\frac{1}{\psi_1^{(+)}(t)\psi_2^{(+)}(t)}}\Big[\langle\vec{\mathcal{Z}}_1, Q(t)\Delta\vec{x}\rangle\langle\vec{\mathcal{Z}}_2, Q(t)\Delta\vec{x}\rangle + \langle\vec{\mathcal{Z}}_2, Q(t)\Delta\vec{x}\rangle\langle\vec{\mathcal{W}}_1, \Delta\vec{x}\rangle + \\ & + \langle\vec{\mathcal{Z}}_1, Q(t)\Delta\vec{x}\rangle\langle\vec{\mathcal{W}}_2, \Delta\vec{x}\rangle + \langle\vec{\mathcal{W}}_1, \Delta\vec{x}\rangle\langle\vec{\mathcal{W}}_2, \Delta\vec{x}\rangle\Big]\exp\left\{\frac{-1}{2D}\Big\langle\Delta\vec{x}, Q(t)\Delta\vec{x}\Big\rangle\right\}, \end{aligned} \tag{74}$$

где согласно (69)

$$Q(t) = \frac{1}{\varphi(t)\psi_1^{(+)}(t)\psi_2^{(+)}(t)}\begin{pmatrix}\psi_2^{(+)}(t) & 0 \\ 0 & \psi_1^{(+)}(t)\end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{Z}}_j = \vec{\mathcal{Z}}_j^{(+)}, \quad \vec{\mathcal{W}}_j = \vec{\mathcal{W}}_j^{(+)}, \quad j = 1, 2.$$

Начальные условия для системы ЭЭ (61) примут вид

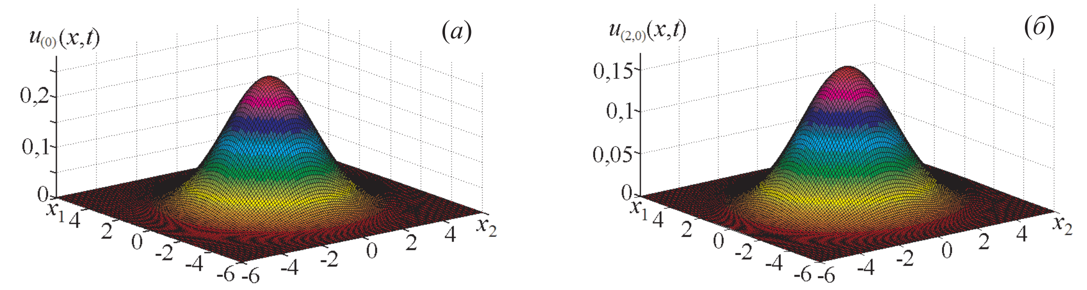
$$m_{(2,0)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad m_{(1,1)} = \frac{1}{2D}, \quad \vec{x}_{(2,0)} = 0, \quad \vec{x}_{(1,1)} = 0. \tag{75}$$

Тогда решения $u_{(2,0)}(\vec{x}, t)$ и $u_{(1,1)}(\vec{x}, t)$ соответственно вычисляются по формулам

$$u_{(2,0)}(\vec{x}, t) = v_{(2,0)}(\vec{x}, t, \mathbf{C})|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[u_{(2,0)}]}, \quad u_{(1,1)}(\vec{x}, t) = v_{(1,1)}(\vec{x}, t, \mathbf{C})|_{\mathbf{C}=\mathbf{C}[u_{(1,1)}]}. \tag{76}$$

На рисунке 1 изображены графики функций $u_0(\vec{x}, t)$, $u_{(2,0)}(\vec{x}, t)$, $u_{(1,1)}(\vec{x}, t)$ в момент времени $t = 5$ при $\varkappa = 1$, $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 2$, $k = 1$, $w_0 = 1$, $a = 5$, $b_0 = 1$, $D = 0.8$.

Отметим, что только решение $u_0(\vec{x}, t)$ можно интерпретировать в качестве популяционной плотности, а решения, полученные с помощью операторов симметрии, такой интерпретации не допускают. Рисунки 1, *б, в* иллюстрируют тот факт, что для разных решений, построенных с помощью операторов симметрии с одинаковым модулем мультииндекса ($|\sigma| = 2$), получаются различные решения.



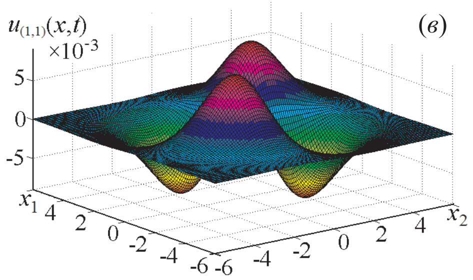


Рис. 1. Графики функций $u_0(\vec{x},t)$ (*а*), $u_{(2,0)}(\vec{x},t)$ (*б*), $u_{(1,1)}(\vec{x},t)$ (*в*)

Заключение

В работе найдены асимптотические решения задачи Коши для многомерного нелокального уравнения ФКПП в классе траекторно-сосредоточенных функций. Метод квазиклассических асимптотик позволяет находить асимптотические решения исходного уравнения с заданной точностью $O(D^{N/2})$, $N \geq 3$. Ключевым моментом развитого формализма является динамическая система Эйнштейна–Эренфеста, описывающая эволюцию моментов, т. к. общее решение системы Эйнштейна–Эренфеста, с одной стороны, позволяет связать ассоциированное линейное уравнение ФКПП с исходным уравнением ФКПП, а с другой — сформулировать алгебраические условия для постоянных интегрирования. В статье наибольшее внимание уделено построению главного члена асимптотики, т. к. для его нахождения необходимо решать нелинейное уравнение. Старшие члены асимптотического ряда находятся из линейных уравнений. Отметим, что построенные квазиклассические асимптотики действительны в течение конечного интервала времени $[0,T]$. Оценка этого интервала выходит за рамки квазиклассического метода и требует дополнительного изучения.

Приложение

В приложении получим динамическую систему ЭЭ, описывающую эволюцию моментов (4)–(6). Для этого продифференцируем соотношения (4)–(6) по t и подставим в полученные выражения производную u_t из (1). В результате запишем

$$\frac{d}{dt}m_u = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_t d\vec{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big[a(\vec{x},t) - \varkappa\int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}\Big]u(\vec{x},t,D)d\vec{x}, \tag{77}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{x}_u = \frac{1}{m_u}\Big[&\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \varkappa\int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}\Big)u(\vec{x},t,D)d\vec{x} + \\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\vec{x}\Big[a(\vec{x},t) - \varkappa\int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y}\Big]u(\vec{x},t,D)d\vec{x} - \dot{m}_u\vec{x}_u\Big],\end{aligned} \tag{78}$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_u^{(\sigma)} = \frac{1}{m_u}\Big\{ - m_u \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \alpha_u^{(\sigma_1-\delta_{1i},\ldots,\sigma_n-\delta_{ni})} \frac{d}{dt}(x_u)_i + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \prod_{j=1}^{n} (x_j - (x_u)_j)^{\sigma_j-\delta_{ji}} \times$$
$$\times \Big(V_{x_i}(\vec{x},t) + \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{x_i}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t,D)d\vec{y}\Big)u(\vec{x},t,D)d\vec{x} + D\int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} \sigma_i(\sigma_i-1)(x_j - x_{u_j})^{(\sigma_j-2\delta_{ji})} \times$$
$$\times u(\vec{x},t,D)d\vec{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\vec{x}-\vec{x}_u)^{\sigma}\Big[a(\vec{x},t) - \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} b(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t,D)d\vec{y}\Big]u(\vec{x},t,D)d\vec{x} - \dot{m}_u\alpha_u^{(\sigma)}\Big\}, \sigma \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (79)$$

Разложив функции $V_{\vec{x}}(\vec{x},t)$, $W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)$, $a(\vec{x},t)$, $b(\vec{x},\vec{y},t)$ в ряд Тейлора по степеням $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_u$ и $\Delta\vec{y} = \vec{y} - \vec{x}_u$, получим

$$\dot{m}_u = \sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}a(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha_u^{(\nu)}m_u - \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}b(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\nu)}\alpha_u^{(\mu)}m_u^2\Big], \quad (80)$$

$$(\dot{x}_u)_j = \sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}V_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha_u^{(\nu)} + \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}W_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\nu)}\alpha_u^{(\mu)}m_u\Big] +$$
$$+ \sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}a(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha_u^{(\nu_1+\delta_{j1},\ldots,\nu_n+\delta_{jn})} - \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}b(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\nu_1+\delta_{j1},\ldots,\nu_n+\delta_{jn})}\alpha_u^{(\mu)}m_u\Big], \quad (81)$$

$$\dot{\alpha}_u^{(\sigma)} = \sum_{j=1}^{n}\sigma_j\Big\{\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}V_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}} + \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}W_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\mu)}m_u\Big]\alpha_u^{(\sigma_1+\nu_1-\delta_{j1},\ldots,\sigma_n+\nu_n-\delta_{jn})} +$$
$$+ D(\sigma_j-1)\alpha_u^{(\sigma_1-2\delta_{j1},\ldots,\sigma_n-2\delta_{jn})} - \Big(\sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}V_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha_u^{(\nu)} + \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}W_{x_j}(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\nu)}\alpha_u^{(\mu)}m_u\Big] +$$
$$+ \sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}a(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha_u^{(\nu_1+\delta_{j1},\ldots,\nu_n+\delta_{jn})} - \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}b(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\nu_1+\delta_{j1},\ldots,\nu_n+\delta_{jn})}\alpha_u^{(\mu)}m_u\Big]\Big) \times$$
$$\times \alpha_u^{(\sigma_1-\delta_{j1},\ldots,\sigma_n-\delta_{jn})}\Big\} + \sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}a(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}} - \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}b(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\mu)}m_u\Big] \times$$
$$\times \alpha_u^{(\sigma_1+\nu_1,\ldots,\sigma_n+\nu_n)} - \sum_{|\nu|=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^{|\nu|}a(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}}\alpha_u^{(\nu)} - \varkappa\sum_{|\mu|=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!\mu!}\frac{\partial^{|\nu|+|\mu|}b(t)}{\partial\vec{x}^{\nu}\partial\vec{y}^{\mu}}\alpha_u^{(\nu)}\alpha_u^{(\mu)}m_u\Big]\alpha_u^{(\sigma)}, \quad \sigma \in \mathbb{Z}_+^n. \quad (82)$$

Соотношение (9) связывает асимптотические оценки центральных моментов в классе траекторно-сосредоточенных функций с их порядком. Правая часть системы (80)–(82) регулярно зависит от моментов, поэтому задача построения решений системы (80)–(82) с точностью до $O(D^{(M+1)/2})$ эквивалентна отбрасыванию моментов, порядок которых выше M. Таким образом, с точностью до моментов порядка M система (80)–(82) становится конечной и замкнутой.

Введем оператор, который каждой мультииндексной функции $\varphi^{(\sigma)}$, $\sigma \in \mathbb{Z}_+{}^n$, сопоставляет вектор

$$\hat{\vec{\mathcal{D}}}^{\pm}(\sigma)\varphi^{(\sigma)} = \big(\hat{\mathcal{D}}_1^{\pm}(\sigma)\varphi^{(\sigma)},\ldots,\hat{\mathcal{D}}_n^{\pm}(\sigma)\varphi^{(\sigma)}\big), \quad \hat{\mathcal{D}}_k^{+}(\sigma)\varphi^{(\sigma)} = \frac{1}{\sigma_k+1}\varphi^{(\partial_k^{+}\sigma)},$$
$$\hat{\mathcal{D}}_k^{-}(\sigma)\varphi^{(\sigma)} = \sigma_k\varphi^{(\partial_k^{-}\sigma)}, \quad \partial_k^{\pm}\sigma = (\sigma_1 \pm \delta_{k1},\ldots,\sigma_n \pm \delta_{kn}). \quad (83)$$

По аналогии с оператором Лапласа обозначим

$$\square(\sigma) = \sum_{l=1}^{n}\hat{\mathcal{D}}_l^{-}(\partial_l^{-}\sigma)\hat{\mathcal{D}}_l^{-}(\sigma). \quad (84)$$

Также введем набор операторов

$$\hat{\Gamma}^{(\sigma,M)}_{x,\vec{x}(t)}[\varphi(\vec{x},\vec{y},t)](t) = \sum_{|\nu|=0}^{M} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^{|\nu|}\varphi(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial \vec{x}^{\nu}} \alpha^{(\sigma_1+\nu_1,\dots,\sigma_n+\nu_n)}(t)\Big|_{\vec{x}=\vec{x}(t)}. \tag{85}$$

Тогда с учетом обозначений (83)–(85) систему (80)–(82) можно представить в виде

$$\dot{m}_u = m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}_u(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]] + O(D^{(M+1)/2}), \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_u &= \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}_u(t)}[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)]] + \\ &+ \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{+}(\sigma)\hat{\Gamma}^{(\sigma,M-1)}_{x,\vec{x}_u(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]]\Big|_{\sigma=0} + O(D^{(M+1)/2}),\end{aligned} \tag{87}$$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^{(\sigma)}_u &= \langle \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{-}(\sigma), \hat{\Gamma}^{(\sigma,M-|\sigma|+1)}_{x,\vec{x}_u(t)}[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)]]\rangle + D\square\alpha^{(\sigma)}_u - \\ &- \Big\langle \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}_u(t)}[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)]] + \\ &+ \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{+}(\sigma)\hat{\Gamma}^{(\sigma,M-1)}_{x,\vec{x}_u(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]]\Big|_{\sigma=0}, \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{-}(\sigma)\alpha^{(\sigma)}_u\Big\rangle + \\ &+ \hat{\Gamma}^{(\sigma,M-|\sigma|)}_{x,\vec{x}_u(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]] - \\ &- \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}_u(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m_u\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}_u(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]]\alpha^{(\sigma)}_u + O(D^{(M+1)/2}).\end{aligned} \tag{88}$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных m, $\vec{x}$ и $\alpha^{(\sigma)}, |\sigma| = \overline{2, M}$:

$$\begin{cases}\dot{m} = m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]], \\ \dot{\vec{x}} = \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}(t)}[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)]] + \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{+}(\sigma)\hat{\Gamma}^{(\sigma,M-1)}_{x,\vec{x}(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]]\Big|_{\sigma=0}, \\ \dot{\alpha}^{(\sigma)} = \langle \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{-}(\sigma), \hat{\Gamma}^{(\sigma,M-|\sigma|+1)}_{x,\vec{x}(t)}[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)]]\rangle + D\square\alpha^{(\sigma)} - \Big\langle \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}(t)}[V_{\vec{x}}(\vec{x},t) + \\ \quad + \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)]] + \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{+}(\sigma)\hat{\Gamma}^{(\sigma,M-1)}_{x,\vec{x}(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]]\Big|_{\sigma=0}, \hat{\vec{\mathcal{D}}}^{-}(\sigma)\alpha^{(\sigma)}\Big\rangle + \\ \quad + \hat{\Gamma}^{(\sigma,M-|\sigma|)}_{x,\vec{x}(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]] - \hat{\Gamma}^{(0,M)}_{x,\vec{x}(t)}[a(\vec{x},t) - \varkappa m\hat{\Gamma}^{(0,M)}_{y,\vec{x}(t)}[b(\vec{x},\vec{y},t)]]\alpha^{(\sigma)}.\end{cases} \tag{89}$$

Список литературы

Багров В. Г., Белов В. В., Трифонов А. Ю. Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнения Шрёдингера // Лекционные заметки по теоретической и математической физике. — Казань. — 1996. — Т. 1, ч. 1. — С. 15–136.

Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. матем. физика. — 1988. — Т. 92, № 2. — С. 215–254.

Колмогоров А. Н., Петровский Н. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–16.

Левченко Е. А., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Квазиклассическое приближение для одномерного двухкомпонентного реакционно-диффузионного уравнения с нелокальной нелинейностью // Вест. Адыгейского гос. ун-та. Серия: Естественно-математические и технические науки. — 2010. — Т. 61, № 2. — С. 64–74.

Левченко Е. А., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Оценка точности решения нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова // Изв. высших учебных заведений. Физика. — 2012. — Т. 55, № 12. — С. 47–53.

Левченко Е. А., Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Асимптотические решения нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова на больших временах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 4. — С. 543–558.

Маслов В. П. Операторные методы. — М.: Наука, 1973. — 544 с.

Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.

Трифонов А. Ю., Шаповалов А. В. Одномерное уравнение Фишера–Колмогорова с нелокальной нелинейностью в квазиклассическом приближении // Изв. вузов. Физика. — 2009. — Т. 52, № 9. — С. 14–23.

Bagrov V. G., Belov V. V., Trifonov A. Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrödinger type // Ann. of Phys. (NY). — 1996. — Vol. 246, No. 2. — P. 231–80.

da Cunha J. A. R., Penna A. L. A., Vainstein M. H., Morgado R., Oliveira F. A. Self-organization analysis for a nonlocal convective Fisher equation // Phys. Lett. A. — 2009. — Vol. 373. P. 661–667.

Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes // Annual Eugenics. — 1937. — Vol. 7. — P. 255–369.

Fuentes M. A., Kuperman M. N., Kenkre V. M. Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91. — P. 158104.

Kenkre V. M. Results from variants of the Fisher equation in the study of epidemics and bacteria // Physica A. — 2004. — Vol. 342. — P. 242–248.

Shin-Ichiro Ei. The effect of nonlocal convection on reaction-diffusion equations // Hiroshima Math. J. — 1987. — Vol. 17, No. 2. — P. 281–307.

Murray J. D. Mathematical Biology. I. An Introduction. Third edition. — N. Y.–Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.