

УДК: 519.8

## Анализ стохастических аттракторов квадратичной дискретной популяционной модели с запаздыванием

Е. Д. Екатеринчук<sup>а</sup>, Л. Б. Ряшко<sup>б</sup>

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина,  
620000, г. Екатеринбург, ул. Ленина, д. 51

E-mail: <sup>а</sup> Ek.Ekaterinchuk@urfu.ru, <sup>б</sup> Lev.Ryashko@urfu.ru

Получено 15 октября 2014 г.

В работе рассматривается квадратичная дискретная модель популяционной динамики с запаздыванием под воздействием случайных возмущений. Анализ стохастических аттракторов модели проводится с помощью методов прямого численного моделирования и техники функций стохастической чувствительности. Показана деформация вероятностных распределений случайных состояний вокруг устойчивых равновесий и циклов при изменении параметров. Продемонстрировано явление индуцированных шумом переходов в зоне дискретных циклов.

Ключевые слова: квадратичная дискретная популяционная модель с запаздыванием, функция стохастической чувствительности

### Analysis of stochastic attractors for time-delayed quadratic discrete model of population dynamics

E. D. Ekaterinchuk, L. B. Ryashko

Ural Federal University, 51 Lenin st., Ekaterinburg, 620000, Russia

**Abstract.** — We consider a time-delayed quadratic discrete model of population dynamics under the influence of random perturbations. Analysis of stochastic attractors of the model is performed using the methods of direct numerical simulation and the stochastic sensitivity function technique. A deformation of the probability distribution of random states around the stable equilibria and cycles is studied parametrically. The phenomenon of noise-induced transitions in the zone of discrete cycles is demonstrated.

Keywords: a time-delayed quadratic discrete model of population dynamics, stochastic sensitivity function

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 145–157 (Russian).

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00181), при финансовой поддержке УрФУ в рамках реализации Программы развития УрФУ для победителей конкурса «Молодые ученые УрФУ».

## Введение

Одной из наиболее известных моделей популяционной динамики является квадратичная дискретная модель, которая является дискретным аналогом модели Ферхюльста [May, 1976; Ризниченко, Рубин, 1993]. Эта модель учитывает ограниченность ресурсов (пищевых, территориальных) и, как следствие, внутривидовую конкуренцию.

Исследование этой модели сыграло важную роль в развитии представлений о механизмах перехода от регулярной к хаотической динамике, в разработке новых математических методов нелинейной динамики [Шустер, 1988; Неймарк, Ланда, 1987]. Данное уравнение носит принципиальный характер, и выявленные в нем сценарии были обнаружены в более сложных, многомерных моделях, задаваемых не только разностными, но и дифференциальными уравнениями. Разработка методов анализа стохастических эффектов в нелинейных системах также проводилась на базе этой модели [Crutchfield et al., 1981].

Исчерпывающее математическое описание стохастической динамики в дискретных системах со случайными возмущениями дается уравнением Перрона–Фробениуса [Аникин, Голубенцев, 2007]. Аналитическое решение этого функционального уравнения, даже в одномерном случае, возможно лишь для весьма частных, специально подобранных примеров, поэтому для исследования стохастических эффектов широко используется метод прямого численного моделирования. В параметрическом анализе этот метод является чрезвычайно затратным. Здесь конструктивной альтернативой является разработка асимптотик и аппроксимаций. Для аппроксимации вероятностных распределений стохастически возмущенных равновесий и циклов дискретных одномерных систем в работе [Башкирцева и др., 2009] был предложен подход, использующий технику функций стохастической чувствительности. Возможности этой техники были продемонстрированы на примере одномерной модели Ферхюльста. Наблюдаемые в этой модели обратные стохастические бифуркации были исследованы в [Башкирцева и др., 2010]. Техника функций стохастической чувствительности для многомерного случая представлена в работе [Bashkirtseva et al., 2010].

Квадратичная дискретная модель с запаздыванием впервые была рассмотрена в работе [Maynard Smith, 1968], где учитывалось влияние численности предыдущего поколения на репродукционные возможности популяции. Таким образом, фактор, регулирующий рост численности, содержит временную задержку по одному поколению. Математическое исследование возможных режимов динамики в этой детерминированной модели проводилось в [Pounder, Rogers, 1980; Rogers, Clarke, 1981; Aronson et al., 1982; May, 1987].

Функционирование сообществ живых организмов, как правило, сопровождается теми или иными случайными возмущениями, способными в значительной степени деформировать динамику численности. Случайными возмущениями могут моделироваться флуктуации внешних природных факторов, миграция особей. Исследование стохастических эффектов в нелинейных моделях популяционной динамики привлекает внимание многих исследователей [Scheffer et al., 2001; Rietkerk et al., 2004; Башкирцева, 2012].

Данная работа посвящена анализу аттракторов квадратичной дискретной популяционной модели с запаздыванием в присутствии случайных возмущений.

В параграфе 2 статьи дается краткий обзор динамических режимов и бифуркаций для детерминированной модели в зонах устойчивых равновесий, замкнутых инвариантных кривых и дискретных циклов.

В параграфе 3 исследуется воздействие случайных возмущений. На основе техники функций стохастической чувствительности проводится анализ разброса случайных состояний вокруг устойчивых равновесий и циклов.

В параграфе 4 обсуждаются индуцированные шумом переходы.

## Детерминированная модель

Рассмотрим дискретную модель динамики численности популяции с запаздыванием [Maynard Smith, 1968]:

$$x_{t+1} = \mu x_t (1 - x_{t-1}), \quad (1)$$

где  $x_t$  — численность популяции в момент времени  $t$ ,  $\mu$  — коэффициент прироста популяции.

С помощью замены  $y_t = x_{t-1}$  данное уравнение сводится к системе двух уравнений без запаздывания:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \mu x_t (1 - y_t), \\ y_{t+1} &= x_t. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) имеет два равновесия:  $M_0(0, 0)$  и  $M_1(\frac{\mu-1}{\mu}, \frac{\mu-1}{\mu})$ . Равновесие  $M_1$  лежит в первом квадранте (имеет биологический смысл) при  $\mu > 1$ .

Для исследования устойчивости равновесий запишем матрицу Якоби отображения (2)

$$F = \begin{bmatrix} \mu(1-y) & -\mu x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

В точках  $M_0$  и  $M_1$  эта матрица имеет вид

$$F_0 = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1-\mu \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Устойчивость равновесия  $M_0$  определяется собственными числами матрицы  $F_0$ :  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \mu$ . Равновесие  $M_0$  устойчиво на интервале  $0 < \mu < 1$ . Можно обратить внимание, что равновесие  $M_0$  теряет устойчивость в точке  $\mu = 1$  рождения равновесия  $M_1$ .

Собственные числа матрицы Якоби для равновесия  $M_1$  имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5-4\mu}}{2}.$$

Равновесие  $M_1$  устойчиво при  $1 < \mu < 2$ . Этот результат интересен уже тем, что в стандартной модели Ферхюльста без запаздывания нетривиальное равновесие устойчиво в более широком диапазоне  $1 < \mu < 3$ . Общая картина изменения характера динамики системы (2) в зависимости от параметра  $\mu$  представлена на бифуркационной диаграмме (рис. 1).

В данной работе исследуется динамика системы (2) на интервале  $0 < \mu < 2.2$ . Здесь можно выделить три зоны структурной устойчивости с различными типами аттракторов:  $0 < \mu < 2$  — зона равновесий,  $2 < \mu < 2.176$  — зона замкнутых инвариантных кривых,  $2.176 < \mu < 2.2$  — зона дискретных 7-циклов. Эти интервалы разделены двумя бифуркационными значениями:  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 2.176$ . При переходе параметра  $\mu$  через  $\mu_1$  слева направо равновесие  $M_1$  теряет устойчивость и в результате бифуркации Неймарка-Сакера [Sacker, 1964; Kuznetsov, 2004] рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая. При переходе через  $\mu_2 = 2.176$  инвариантная кривая разрушается и рождается новый аттрактор — дискретный 7-цикл, сохраняющий устойчивость на интервале  $\mu_2 < \mu < \mu_3 = 2.2$ . На рисунке 2 изображены аттракторы системы (2) для нескольких значений параметра  $\mu$ .

Изменения степени устойчивости аттракторов и точки бифуркаций хорошо видны на графике старшего показателя Ляпунова  $\Lambda(\mu)$  (рис. 3).

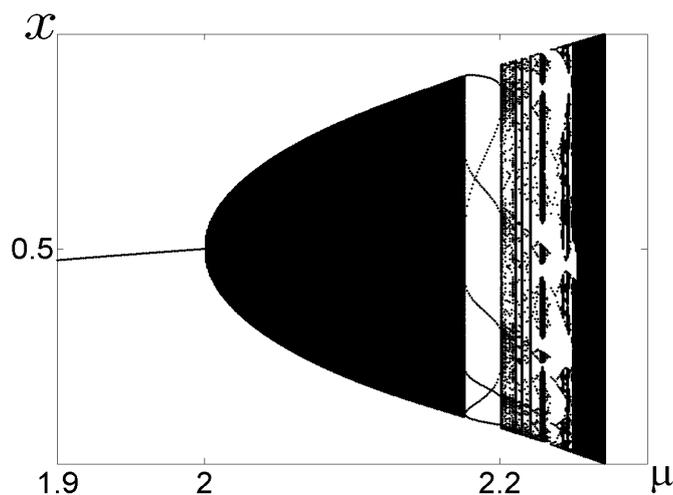


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма детерминированной квадратичной модели с запаздыванием

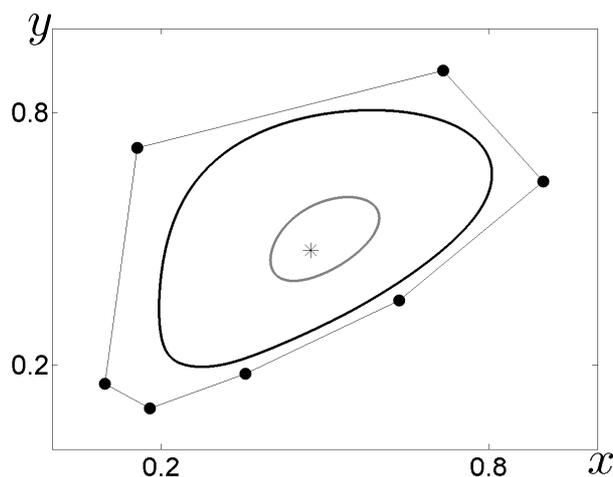


Рис. 2. Аттракторы системы (2): равновесие при  $\mu = 1.9$  (звездочка); замкнутые инвариантные кривые при  $\mu = 2.01$  (серая сплошная линия) и  $\mu = 2.1$  (черная сплошная линия); 7-цикл при  $\mu = 2.19$  (точки)

В бифуркационных точках и в зоне инвариантной замкнутой кривой старший показатель Ляпунова равен нулю. Равновесие  $M_0$  устойчиво при  $0 < \mu < 1$ , и степень его устойчивости уменьшается при приближении к  $\mu = 1$ . На промежутке  $1 < \mu < 2$  устойчивым является равновесие  $M_1$ , причем график  $\Lambda(\mu)$  не является монотонным.

При переходе через бифуркационное значение параметра  $\mu_2 = 2.176$  график показателя Ляпунова становится отрицательным и резко убывает, что соответствует росту степени устойчивости 7-цикла. Далее наблюдается интервал, где показатель Ляпунова практически не меняется. В зоне  $\mu > 2.2$  положительные значения  $\Lambda$  соответствуют хаотическим режимам.

Рассмотрим детали трансформации замкнутой инвариантной кривой в дискретный 7-цикл. На рисунке 4 представлен график функции  $\vartheta(\mu)$ , характеризующей зависимость числа вращения  $\vartheta$  от параметра  $\mu$ . В точке  $\mu_1$ , соответствующей бифуркации Неймарка–Сакера, число вращения  $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ . Такое число вращения соответствует 6-циклу. Таким образом, сразу за точ-

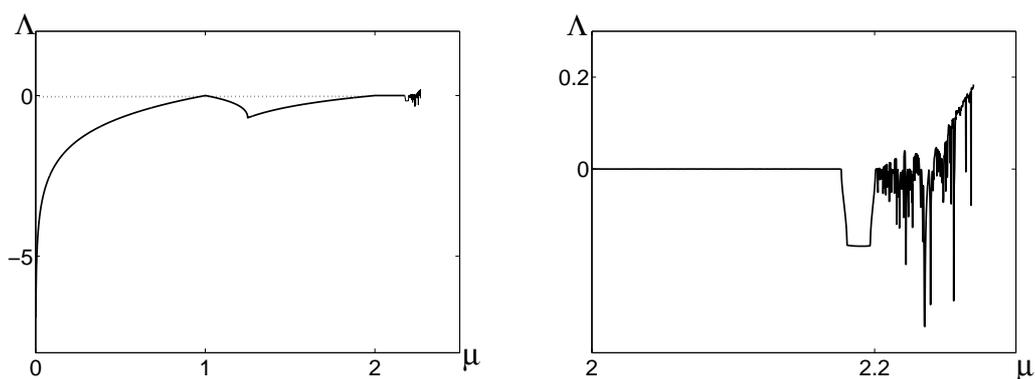


Рис. 3. Показатель Ляпунова. Справа представлен увеличенный фрагмент

кой бифуркации  $\mu_1 = 2$  замкнутые инвариантные кривые формируются движениями, близкими к 6-циклу.

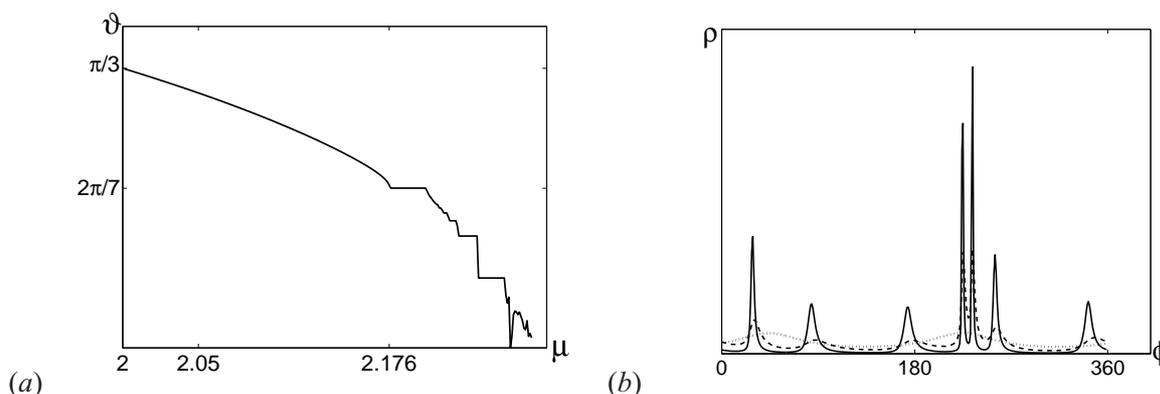


Рис. 4. Характеристики инвариантной кривой: (a) число вращения  $\vartheta(\mu)$ ; (b) секторное распределение при  $\mu = 2.0001$  (точки),  $\mu = 2.17$  (пунктир),  $\mu = 2.176$  (сплошная линия)

На интервале структурной устойчивости  $(\mu_1, \mu_2)$  функция  $\vartheta(\mu)$  монотонно убывает, достигает значения  $\vartheta(\mu_2) = \frac{2\pi}{7}$  и далее на  $(\mu_2, \mu_3)$  не меняется:  $\vartheta(\mu) \equiv \frac{2\pi}{7}$ . Такое постоянное значение числа вращения соответствует дискретному 7-циклу.

На рисунке 4b, для разных значений  $\mu$  представлены графики функции  $\rho(\varphi)$ , задающей плотность секторного распределения состояний системы (2) вдоль замкнутой инвариантной кривой. В качестве центральной выбрана точка  $(0.5, 0.5)$ , а угол  $\varphi$  меняется от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ .

Вблизи точки бифуркации  $\mu_1$  плотность распределения почти равномерна вдоль инвариантной замкнутой кривой. По мере увеличения параметра  $\mu$  у функции  $\rho(\varphi)$  появляются пики и распределение становится весьма неравномерным. Эта неравномерность усиливается по мере приближения к значению  $\mu_2$ . Вблизи  $\mu_2$  пики становятся узкими и локализируются в зонах, соответствующих местонахождению точек дискретного 7-цикла, появляющегося при переходе через  $\mu_2$ .

### Стохастическая модель

В любой реальной биологической системе всегда присутствуют случайные факторы, которые могут оказать существенное влияние на ее поведение. Наряду с детерминированной

системой (2) рассмотрим следующую систему со случайными возмущениями:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= \mu x_t(1 - y_t) + \varepsilon \xi_t, \\y_{t+1} &= x_t,\end{aligned}\quad (3)$$

где  $\xi_t$  — независимые гауссовские случайные величины с параметрами  $E\xi_t = 0$ ,  $E\xi_t^2 = 1$ , а величина  $\varepsilon$  характеризует интенсивность возмущений.

Под действием случайных возмущений стохастическая траектория покидает детерминированный аттрактор и образует вокруг него облако случайных состояний. На рисунке 5 представлены стохастические аттракторы системы (3) с шумами разной интенсивности  $\varepsilon = 0.0003$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

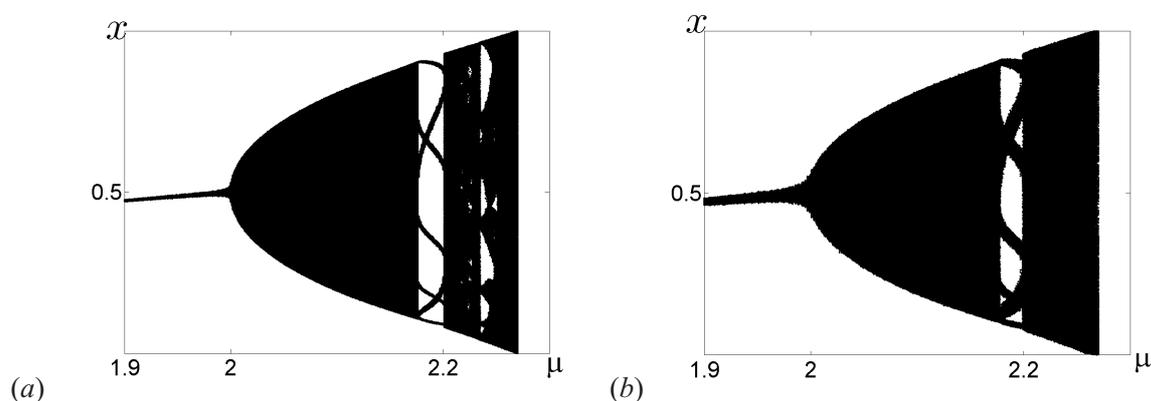


Рис. 5. Стохастические аттракторы системы (3) при интенсивности шума (a)  $\varepsilon = 0.0003$  и (b)  $\varepsilon = 0.001$

В присутствии шума тонкая структура детерминированного аттрактора размывается, а вблизи бифуркационных значений дисперсия отклонений резко увеличивается.

Рассмотрим более подробно влияние шума на стохастические аттракторы модели. Для конструктивного описания разброса случайных состояний системы вблизи аттрактора используется техника функции стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов (см. краткое описание в приложении).

### *Анализ стохастических равновесий*

Рассмотрим воздействие случайных возмущений на равновесия  $M_0$  и  $M_1$  в зоне  $0 < \mu < 2$ .

Для системы (3) матрицы стохастической чувствительности  $W_0$  и  $W_1$  равновесий  $M_0$  и  $M_1$  находятся из (7) аналитически:

$$W_0 = \frac{1}{1 - \mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{bmatrix}, \quad W_1 = \frac{1}{(\mu - 2)(1 - \mu^2)} \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Собственные векторы матриц задают главные направления отклонений, а собственные значения определяют размер отклонений в этих направлениях. Отметим, что собственные векторы матриц (4) одинаковы и не зависят от параметра  $\mu$ :  $u_1 = (-1, 1)^\top$ ,  $u_2 = (1, 1)^\top$ . Это значит, что при изменении параметра главные направления отклонений не меняются.

Собственные числа  $\eta_{0,1}, \eta_{0,2}$  матрицы  $W_0$  и  $\eta_{1,1}, \eta_{1,2}$  матрицы  $W_1$  соответственно равны

$$\eta_{0,1} = \frac{1}{1 + \mu}, \quad \eta_{0,2} = \frac{1}{1 - \mu}, \quad \eta_{1,1} = \frac{1}{(2 - \mu)(\mu + 1)}, \quad \eta_{1,2} = \frac{1}{(\mu - 2)(1 - \mu)}.$$

Эти собственные числа являются естественными скалярными характеристиками стохастической чувствительности равновесий  $M_0$  и  $M_1$ .

На рисунке 6 представлены графики зависимости собственных чисел  $\eta_{i,j}$  матриц  $W_i$  от параметра  $\mu$ .

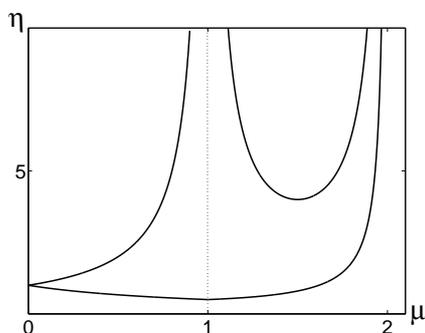


Рис. 6. Стохастическая чувствительность равновесий  $M_0$  и  $M_1$

При приближении параметра  $\mu$  к бифуркационным значениям  $\mu = 1$ ,  $\mu = 2$  стохастическая чувствительность неограниченно возрастает. Это связано с потерей устойчивости равновесий  $M_0$  и  $M_1$  в точках бифуркаций. Интересным является тот факт, что старший показатель чувствительности имеет разрыв в точке  $\mu = 1$ , в то время как младший показатель непрерывен на всем промежутке  $0 < \mu < 2$ .

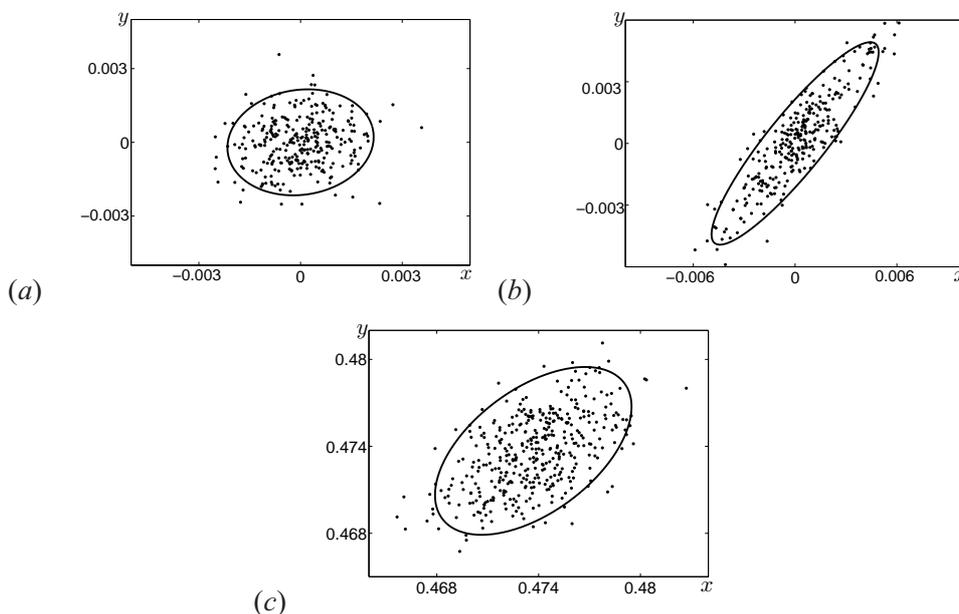


Рис. 7. Случайные состояния и эллипсы рассеивания для системы (3) при  $\varepsilon = 0.001$  и (a)  $\mu = 0.1$ , (b)  $\mu = 0.9$ , (c)  $\mu = 1.9$

Рассмотрим, как меняется разброс случайных состояний вокруг равновесий при изменении параметра  $\mu$ .

На рисунке 7 точками представлены случайные состояния системы (3) при фиксированном значении интенсивности шума  $\varepsilon = 0.001$  и трех значениях  $\mu = 0.1$ ,  $\mu = 0.9$  и  $\mu = 1.9$ .

Можно заметить что при изменении параметра  $\mu$  формируемое облако случайных состояний деформируется. Эта деформация связана с изменением стохастической чувствительности (рис. 6). Соответствующее изменение формы распределения можно наглядно проследить с помощью эллипсов рассеивания. На рисунке 7 наряду со случайными состояниями системы представлены эллипсы рассеивания. Как видно, доверительные эллипсы, полученные с помощью матриц стохастической чувствительности, адекватно отражают конфигурацию и размер облаков случайных состояний, найденных прямым численным моделированием.

При увеличении параметра  $\mu$  на интервале  $0 < \mu < 1$  различие между  $\eta_{0,1}$  и  $\eta_{0,2}$  увеличивается:  $\eta_{0,1}(\mu)$  убывает, а  $\eta_{0,2}(\mu)$  возрастает (см. рис. 6). В результате эллипс сжимается вдоль оси  $u_1$  и вытягивается вдоль оси  $u_2$ . Дальнейшее увеличение параметра  $\mu$ , уже на интервале  $1 < \mu < 2$ , сопровождается монотонным увеличением размера эллипса вдоль  $u_1$ . При этом в направлении  $u_2$  сначала он сжимается, а затем растягивается.

### Анализ стохастического 7-цикла

Рассмотрим воздействие шумов на 7-цикл системы (2) в зоне  $\mu_2 < \mu < \mu_3$ . На рисунке 8 звездочками представлены пронумерованные элементы детерминированного 7-цикла  $\{(\bar{x}_1, \bar{y}_1), \dots, (\bar{x}_7, \bar{y}_7)\}$  системы (2) при  $\mu = 2.18$  и точками — случайные состояния системы (3) для шума интенсивности  $\varepsilon = 0.001$ .

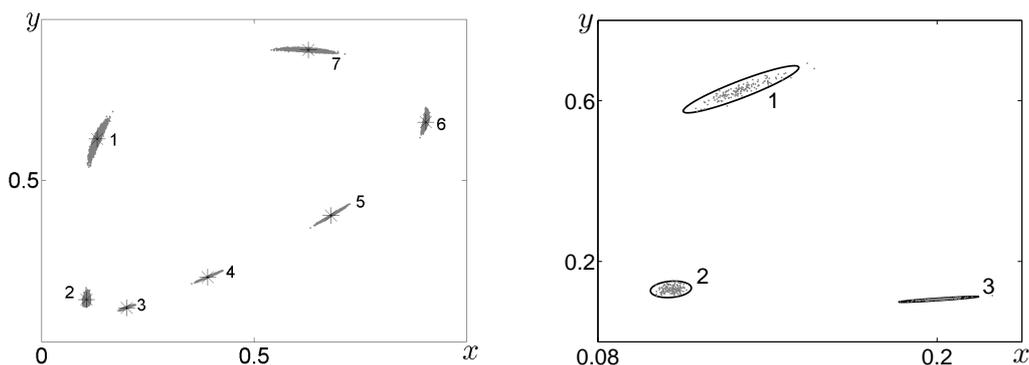


Рис. 8. Случайные состояния и эллипсы рассеивания для  $\mu = 2.18$  и интенсивности шума  $\varepsilon = 0.001$

Как можно заметить, для разных точек цикла разброс случайных состояний существенно отличается как по величине, так и по направлениям.

Рассмотрим, как эти особенности отражаются матрицами стохастической чувствительности. В таблице 1 для каждой точки детерминированного 7-цикла представлены элементы матрицы стохастической чувствительности и ее собственные числа.

Самый большой показатель чувствительности имеет первая точка цикла, что полностью соответствует представленным результатам моделирования. Достаточно малые показатели чувствительности имеют третья и четвертая точки. Можно отметить в таблице отрицательный элемент матрицы  $w_{12}$ , относящейся к седьмой точке дискретного цикла. Наклон облака рассеивания в этой точке, в отличие от других точек цикла, становится отрицательным.

На рисунке 8 (справа) представлен увеличенный фрагмент фазовой плоскости, где располагаются точки рассматриваемого 7-цикла с номерами 1, 2 и 3. Здесь наряду со случайными состояниями также изображены соответствующие доверительные эллипсы. Как видно, эти эллипсы хорошо передают конфигурацию и размер облаков случайных состояний.

Таблица 1. Элементы матрицы стохастической чувствительности и соответствующие собственные значения для точек дискретного 7-цикла

$N$	$w_{11}$	$w_{12}$	$w_{22}$	$\eta_1$	$\eta_2$
1	45.371	119.864	372.453	6.149	411.676
2	5.676	2.619	45.371	5.504	45.543
3	21.512	10.153	5.676	0.718	26.470
4	66.519	37.494	21.512	0.286	87.745
5	107.276	83.971	66.519	0.489	173.307
6	5.665	17.702	107.276	2.669	110.272
7	372.453	-30.976	5.665	3.067	375.051

Рассмотрим зависимость собственных значений матриц стохастической чувствительности элементов 1, 2, 3 от параметра  $\mu$ . Соответствующие значения для младших (слева) и старших (справа) собственных значений представлены на рисунке 9.

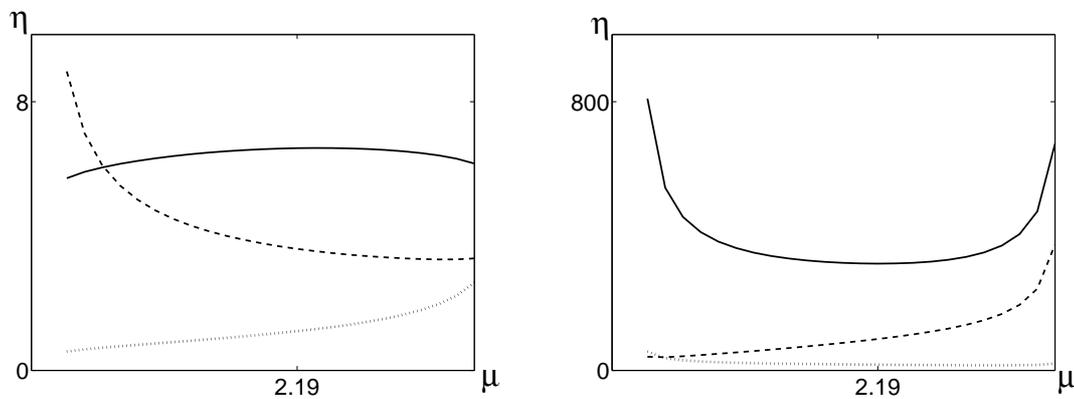


Рис. 9. Младшие (слева) и старшие (справа) собственные значения матриц стохастической чувствительности для элементов 7-цикла: 1 — сплошная, 2 — пунктир, 3 — точки

На данном рисунке хорошо видно различие в зависимости чувствительности точек цикла от параметра  $\mu$ . У одной точки чувствительность к случайным возмущениям с увеличением параметра увеличивается, у другой уменьшается. Интересно отметить, что чувствительность точки с номером 3 сохраняется маленькой на всем промежутке существования дискретного цикла.

## Индукцированные шумом переходы

Рассмотрим, как меняется распределение случайных состояний для стохастически возмущенного 7-цикла при увеличении шума.

Как уже отмечалось, при малом шуме вокруг точек детерминированного цикла формируются хорошо локализованные, весьма узкие, облака случайных состояний (см. рис. 8 для  $\mu = 2.18$  и  $\varepsilon = 0.001$ ). Это подтверждают и эллипсы рассеивания, имеющие значительный эксцентриситет. Эти узкие эллипсы вытянуты вдоль некоторой кривой, близкой по форме к замкнутой инвариантной кривой детерминированной системы (2) при значении  $\mu$ , лежащем чуть левее  $\mu_c$ .

При увеличении интенсивности шума разброс случайных состояний вдоль цикла увеличивается, облака случайных состояний начинают пересекаться и происходит индуцированное шумом перемешивание. На рисунке 10 (слева) представлены случайные состояния для  $\varepsilon = 0.002$  (а) и  $\varepsilon = 0.01$  (б).

Подробности такого перемешивания хорошо видны на графиках секторного распределения (см. рис. 10 (справа)). Как видно из этого рисунка, при  $\varepsilon = 0.002$  пики плотности распределения еще хорошо отделены друг от друга. При увеличении шума до  $\varepsilon = 0.01$  участки между точками цикла заполняются случайными состояниями, близкие пики сливаются, плотность распределения сглаживается, но при этом остается один ярко выраженный пик в районе третьей точки детерминированного цикла.

Отметим, что форма плотности распределения стохастического 7-цикла при  $\mu = 2.18$  и  $\varepsilon = 0.002$  практически совпадает с формой плотности распределения детерминированной замкнутой инвариантной кривой (см. рис. 4 для  $\mu = 2.176$ ).

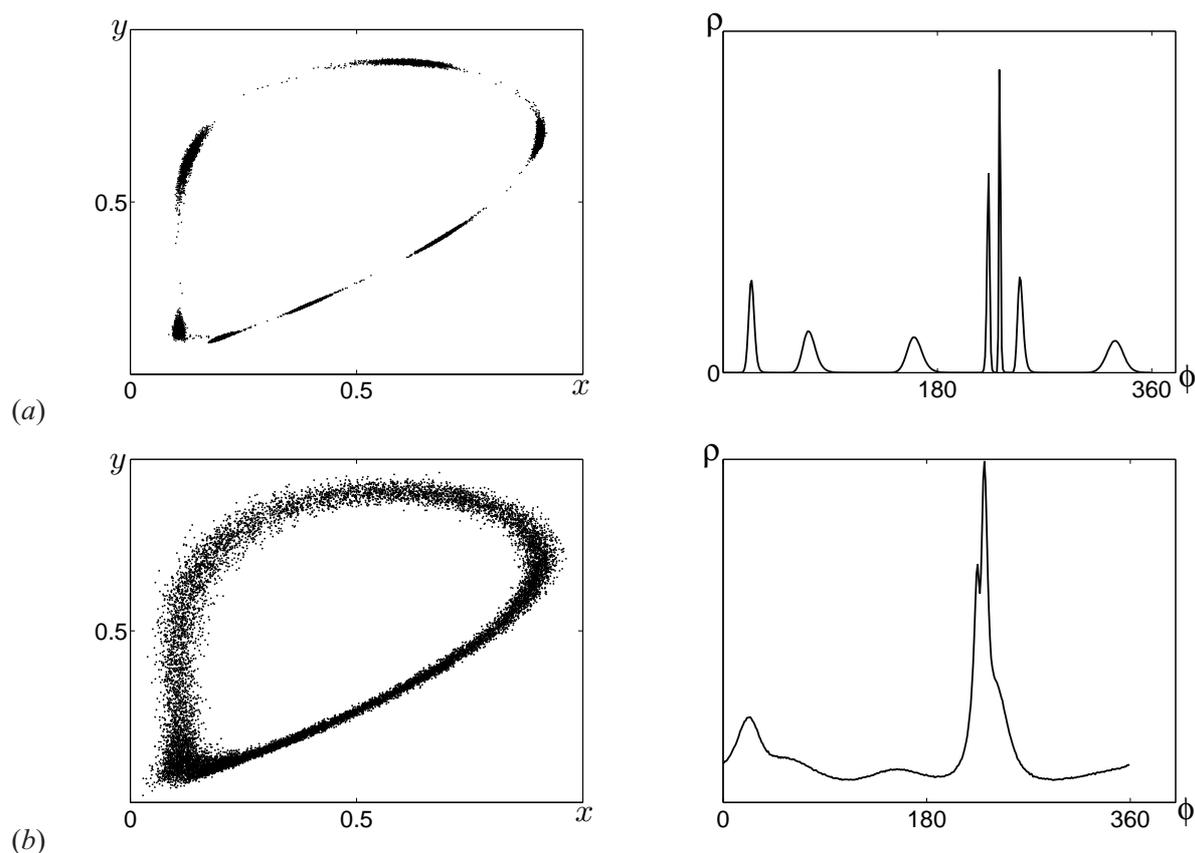


Рис. 10. Случайные состояния (слева) и их секторные распределения (справа) системы (3) при  $\mu = 2.18$  для  $\varepsilon = 0.002$  (сверху) и  $\varepsilon = 0.01$  (снизу)

Такое совпадение можно трактовать как индуцированную шумом обратную бифуркацию «7-цикл  $\rightarrow$  замкнутая инвариантная кривая».

## Заключение

В работе рассматривается квадратичная дискретная популяционная модель с запаздыванием в зоне перехода от равновесий к инвариантным кривым, появляющимся в результате бифуркации Неймарка–Сакера, и в зоне трансформации инвариантной кривой в дискретный 7-цикл. Под воздействием случайных возмущений траектория покидает детерминированный аттрактор и формирует вокруг него вероятностное распределение. Для анализа этого распределения использованы техника функций стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов. Проведено исследование деформации вероятностных распределений случайных состояний вокруг

устойчивых равновесий и циклов при изменении параметров. Продемонстрировано, как индуцированные шумом переходы в зоне дискретных циклов приводят к обратной стохастической бифуркации.

## Приложение

Рассмотрим дискретную динамическую систему в общем виде:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (5)$$

где  $x$  —  $n$ -вектор,  $f(x)$  — достаточно гладкая функция.

Будем считать, что на каждом шаге в систему вносятся случайные возмущения, при этом стохастическая система будет иметь вид

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (6)$$

где  $\sigma(x)$  —  $n \times m$ -матрица,  $\xi_t$  —  $m$ -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами  $E\xi_t = 0$ ,  $E\xi_t \xi_t^\top = I$ ,  $E\xi_t \xi_k^\top = 0 (t \neq k)$ , где  $I$  — единичная  $m \times m$ -матрица, скалярный параметр  $\varepsilon$  задает интенсивность шума.

Под действием случайных возмущений, вокруг аттракторов детерминированной системы (5) формируется стационарное вероятностное распределение  $p(x, \varepsilon)$  решений системы (6). При малых шумах, для аппроксимации этого распределения вблизи равновесий и циклов, в работе [Bashkirtseva et al., 2010] предложен метод функции стохастической чувствительности.

### Стохастическая чувствительность равновесия

Пусть система (5) имеет экспоненциально устойчивое равновесие  $\bar{x} = f(\bar{x})$ .

Тогда для отыскания матрицы  $W$  стохастической чувствительности равновесия  $\bar{x}$  необходимо решить следующее матричное уравнение [Bashkirtseva et al., 2010]:

$$W = FWF^\top + Q, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad Q = \sigma(\bar{x})\sigma^\top(\bar{x}). \quad (7)$$

С помощью матрицы  $W$  можно записать следующую аппроксимацию:

$$p(x, \varepsilon) \approx K \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{\varepsilon^2}\right).$$

Матрица  $W$  характеризует реакцию системы на малые случайные возмущения и играет роль коэффициента стохастической чувствительности равновесия  $\bar{x}$ .

### Стохастическая чувствительность цикла

Пусть детерминированная система (5) имеет экспоненциально устойчивый  $k$ -цикл  $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ . Элементы цикла связаны соотношениями

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, k-1), \quad f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

В данном случае стохастическая чувствительность цикла  $\Gamma$  в системе (6) задается последовательностью матриц  $W_1, \dots, W_k$ , где  $W_i$  — стохастическая чувствительность элемента  $\bar{x}_i$ .

Множество матриц  $W_1, \dots, W_k$  характеризует реакцию точек  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$  цикла  $\Gamma$  на малые случайные возмущения.

Матрица  $W_1$  находится из уравнения [Bashkirtseva et al., 2010]

$$W_1 = BW_1B^T + Q, \quad (8)$$

а остальные матрицы  $W_2, \dots, W_k$  — из рекуррентного соотношения

$$W_{i+1} = F_i W_i F_i^T + Q_i, \quad i = 1, \dots, k-1. \quad (9)$$

Здесь

$$F_i = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i), \quad Q_i = \sigma(\bar{x}_i)\sigma^T(\bar{x}_i), \quad B = F_k \cdot \dots \cdot F_2 F_1,$$

$$Q = Q_k + F_k Q_{k-1} F_k^T + \dots + F_k \cdot \dots \cdot F_2 Q_1 F_2^T \cdot \dots \cdot F_k^T.$$

### Доверительные эллипсы

С помощью матриц стохастической чувствительности можно получить простое вероятностное описание разброса случайных состояний вокруг равновесий и точек дискретных циклов в форме доверительных эллипсов. Этот аппарат является удобным средством наглядной визуализации стохастических аттракторов.

Для  $n = 2$  матрица стохастической чувствительности  $W$  имеет собственные значения  $\eta_1, \eta_2 > 0$  и соответствующие собственные векторы  $u_1, u_2$ . Значения  $\eta_1$  и  $\eta_2$  являются естественными скалярными характеристиками стохастической чувствительности и задают величины разброса случайных состояний системы в направлении собственных векторов  $u_1$  и  $u_2$ .

Эллипс рассеивания вокруг равновесия  $\bar{x}$  задается уравнением

$$(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})) = 2q^2 \varepsilon^2,$$

где  $q^2 = -\ln(1 - P)$ ,  $P$  — заданная доверительная вероятность. Для координат  $z_1 = (x - \bar{x}, u_1)$ ,  $z_2 = (x - \bar{x}, u_2)$  уравнение доверительного эллипса может быть записано в стандартной форме:

$$\frac{z_1^2}{\eta_1} + \frac{z_2^2}{\eta_2} = 2q^2 \varepsilon^2.$$

Аналогичная формула используется для описания эллипсов рассеивания вокруг точек  $k$ -цикла.

### Список литературы

- Аникин В. М., Голубенцев А. Ф. Аналитические модели детерминированного хаоса. — М.: Физматлит, 2007. — 328 с.
- Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б., Цветков И. Н. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2009. — Т. 17, № 6. — С. 74–85.
- Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б., Федотов С. В., Цветков И. Н. Обратные стохастические бифуркации циклов дискретных систем // Нелинейная динамика. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 737–753.
- Башкирцева И. А. Анализ стохастически возмущенных равновесий и индуцированных шумом переходов в нелинейных дискретных системах // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5. — С. 559–571.
- Неймарк Ю. И., Ланда П. С. Стохастические и хаотические колебания. — М.: Наука, 1987. — 422 с.
- Ризниченко Г. Ю., Рубин А. Б. Математические модели биологических продукционных процессов. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 302 с.

- Шустер Г.* Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
- Aronson D. G., Chory M. A., Hall G. R., McGehee R. P.* Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study // *Communications in Mathematical Physics*. — 1982. — Vol. 83. — P. 303–354.
- Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I.* Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*. — 2010. — Vol. 17. — P. 501–515.
- Crutchfield J. P., Farmer J., Huberman B. A.* Fluctuation and simple chaotic dynamics // *Phys. Rep.* — 1982. — Vol. 92. — P. 45–82.
- Kuznetsov Yu. A.* *Elements of Applied Bifurcation Theory*. — Springer, 2004.
- May R.* Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature*. — 1976. — Vol. 261. — P. 459–467.
- May R. M.* Chaos and the dynamics of biological populations // *Proc. R. Soc. Lond. A*. — 1987. — Vol. 413. — P. 27–44.
- Maynard Smith J.* *Mathematical Ideas in Biology*. — Cambridge University Press, 1968. — 160 p.
- Pounder J. R., Rogers T. D.* The geometry of chaos: Dynamics of a nonlinear second-order difference equation // *Bulletin of Mathematical Biology*. — 1980. — Vol. 42. — P. 551–597.
- Rietkerk M., Dekker S. C., de Ruiter P. C., van de Koppel J.* Self-organized patchiness and catastrophic shifts in ecosystems // *Science*. — 2004. — Vol. 305. — P. 1926–1929.
- Rogers T. D., Clarke B. L.* A continuous planar map with many periodic points // *Journal Applied Mathematics and Computation*. — 1981. — Vol. 8. — P. 17–33.
- Sacker R.* On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations // *Report IMM-NYU 333, New York University, 1964*.
- Scheffer M., Carpenter S., Foley J. A., Folke C., Walker B.* Catastrophic shifts in ecosystems // *Nature*. — 2001. — Vol. 413. — P. 591–596.