**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 1 С. 51−59**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.7

Формирование оптимального управления нелинейным динамическим объектом на основе модели Такаги–Сугено

С. Н. Чуканов[1,a], Е. Л. Першина[2]

[1] ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН», Омский филиал,
Россия, 644043, г. Омск, ул. Певцова, д. 13

[2] ФГБОУ «Сибирская автомобильно-дорожная академия»,
Россия, 644080, г. Омск, проспект Мира, д. 5

E-mail: [a] ch_sn@mail.ru, [b] pershina_el53@mail.ru

*Получено 26 августа 2014 г.,
после доработки 10 ноября 2014 г.*

В работе рассмотрен алгоритм нечеткой системы управления существенно нелинейным динамическим объектом. Для решения нелинейной задачи оптимального управления предлагается использовать линейно-квадратичное регулирование (LQR — linear quadratic regulator) с моделью Такаги–Сугено (Takagi–Sugeno). Алгоритм может быть использован для проектирования систем оптимального управления детерминированными нелинейными объектами. Предложено использование алгоритма функционирования оптимальной системы управления для управления вращательным движением летательного аппарата.

Ключевые слова: система управления, вращательное движение твердого тела, модель Такаги–Сугено, нечеткая система управления

Formation of optimal control of nonlinear dynamic object based on Takagi–Sugeno model

S. N. Chukanov[1], **E. L. Pershina**[2]

[1] Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Omsk Branch, 13 Pevtsova st., Omsk, 644043, Russia
[2] Siberian State Automobile and Highway Academy, 5 Mira ave., Omsk, 644080, Russia

Abstract. — The algorithm of fuzzy control system essentially nonlinear dynamic object is considered in this article. For solving nonlinear optimal control problem is proposed to use the method of linear quadratic regulation (LQR) with fuzzy Takagi–Sugeno model. The algorithm can be used for the design of deterministic optimal control of nonlinear objects. The algorithm of optimal control for controlling the rotational motion of a space vehicle is proposed.

Keywords: control system, rotational motion of a space vehicle, Takagi–Sugeno model, fuzzy control system

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 51−59 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 14-07-00272 и № 14-08-01132).

Введение

Системы управления, основанные на нечеткой модели Takagi–Sugeno (TS), активно исследуются и применяются в последние годы. Модель T–S формируется с использованием базы нечетких правил, которые представляют собой нелинейную систему в виде совокупности локальных линейных моделей, объединенных функциями принадлежности. Методы идентификации T–S-моделей основаны на линеаризации исходной нелинейной системы в различных рабочих точках (при известной модели системы) и на оценивании входных/выходных данных нелинейной системы (при неизвестной модели).

В работе рассмотрен алгоритм нечеткой системы управления нелинейным динамическим объектом — летательным аппаратом, предназначенный для минимизации квадратичного функционала по вектору состояния и вектору управления системы. Для линейных систем традиционно проектируются линейные системы управления с обратной связью: линейно-квадратичные регуляторы (LQR — linear quadratic regulator) [Geering, 2007; Sage, 1977]. Для существенно нелинейных систем линеаризация уравнений состояния динамической системы относительно не является достаточной, так как при различных значениях вектора состояния мы получим различные линеаризованные уравнения. Для решения нелинейной задачи оптимального управления предлагается использовать метод LQR с нечетким алгоритмом Такаги–Сугено (T–S — Takagi–Sugeno) [Takagi, Sugeno, 1985]. Алгоритм T–S позволяет декомпозировать множество вектора состояния системы на подмножества и формировать базу правил для каждого подмножества; LQR используется для получения оптимального решения на каждом подмножестве вектора состояния. Управление формируется на основе регулирования параметров LQR в каждом правиле.

В работе предполагается, что динамическая модель объекта известна. Алгоритм T–S применяется не для управления объектом с нечеткой моделью, а для проектирования систем оптимального управления детерминированными нелинейными объектами на основе дефаззификации следствий базы правил. В каждом правиле базы правил содержится LQR-алгоритм управления линеаризованной нелинейной системы в заданной рабочей области.

Предложено использование алгоритма функционирования оптимальной системы управления для управления вращательным движением летательного аппарата, который рассматривается как твердое тело. Динамические уравнения Л. Эйлера вращательного движение твердого тела являются существенно нелинейными [Лурье, 1961; Murray, Li, Sastry, 1994] и не могут быть линеаризованы в пространстве всех значений компонент вектора угловой скорости. Кинематические уравнения вращательного движение твердого тела могут быть представлены в различной форме (матрицами направляющих косинусов, углами Эйлера, углами Крылова, кватернионами Гамильтона, элементами групп $SO(3), SE(3)$, матрицами Паули, параметрами Клиффорда и т. д.); они также являются существенно нелинейными. В настоящей работе рассматриваются кинематические соотношения для параметров Родрига–Гамильтона [Лурье, 1961; Murray, Li, Sastry, 1994], так как в этих соотношениях используются только три параметра, соотношения не содержат критических значений параметров, отсутствует необходимость контроля интегралов движения (например, суммы квадратов компонент кватерниона) и количество вычислительных операций минимально.

Рассмотрим методы построения оптимального регулятора на основе метода T–S и использования принципа максимума.

Проектирование нечеткого оптимального регулятора

Для проектирования нечеткого оптимального регулятора может быть использован метод LQR [Geering, 2007; Sage, 1977]. Система представляется в пространстве состояний:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ — вектор управляющих воздействий системы; $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица, определяющая динамику системы; $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица, определяющая воздействие вектора $\mathbf{u}$ на систему.

Целью является нахождение такого вектора управления $\mathbf{u}(t)$, который переводит систему из начального состояния $\mathbf{x}(t_0)$ в конечное $\mathbf{x}(t_1)$, минимизируя квадратичный функционал:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \right) dt, \tag{2}$$

где $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ — симметричные положительно определенные матрицы. Закон оптимального управления:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{L}\mathbf{x}(t), \tag{3}$$

где $\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{L}$ — матрица усиления обратной связи по состоянию, матрица $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — решение уравнения Риккати [Geering, 2007; Sage, 1977]:

$$-\mathbf{L}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{L} - \mathbf{Q} + \mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{L} = 0.$$

В случае представления системы в форме

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

модель T–S может быть выражена в форме [Lilly, 2010; Al-Hadithi, Barragan et al., 2012; Luo, Hu et al., 2006]

$$S^{(i_1,\ldots,i_n)}: \text{ if } x_1 \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and } \ldots \text{and } x_n \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then } \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{(i_1,\ldots,i_n)}\mathbf{x} + \mathbf{B}^{(i_1,\ldots,i_n)}\mathbf{u}, \tag{4}$$

где $M_j^{i_j}; j = 1,\ldots,n; i_j = 1,\ldots,l$ — нечеткое множество квазитреугольного *LR*-типа с функцией принадлежности $\mu_j^{i_j} = 1$ при $x_j = \overline{x}_j^{i_j}$. Матрицы $\mathbf{A}^{(i_1,\ldots,i_n)}, \mathbf{B}^{(i_1,\ldots,i_n)}$ идентифицируются для каждой совокупности множеств $M_1^{i_j},\ldots,M_n^{i_j}$. Принцип проектирования LQR применяется к каждой системы и решаются уравнения Риккати для каждой системы:

$$-\mathbf{L}^{(i_1,\ldots,i_n)}\mathbf{A}^{(i_1,\ldots,i_n)} - \left[\mathbf{A}^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^T \mathbf{L}^{(i_1,\ldots,i_n)} - \mathbf{Q} + \mathbf{L}^{(i_1,\ldots,i_n)}\mathbf{B}^{(i_1,\ldots,i_n)}\mathbf{R}^{-1}\left[\mathbf{B}^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^T \mathbf{L}^{(i_1,\ldots,i_n)} = 0,$$

откуда находятся матрицы усиления обратной связи $\mathbf{K}^{(i_1,\ldots,i_n)} = \mathbf{R}^{-1}\left[\mathbf{B}^{(i_1,\ldots,i_n)}\right]^T \mathbf{L}^{(i_1,\ldots,i_n)}$, и правила определения матрицы усиления имеют вид

$$C^{(i_1,\ldots,i_n)}: \text{ if } x_1 \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and} \ldots \text{and } x_n \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then } \mathbf{u} = -\mathbf{K}^{(i_1,\ldots,i_n)}\mathbf{x}.$$

Проектирование оптимального дискретного управления

Рассмотрим проектирование оптимального управления для динамической системы, дискретная модель которой имеет вид

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Для каждой совокупности множеств $M_1^{i_1},\ldots,M_n^{i_n}$, то есть n^l множеств, проведем линеаризацию $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k,\mathbf{u}_k)$ относительно точек — центров этих множеств $\overline{x}_j^{i_j}$:

$$\mathbf{f}^{(i_1\ldots i_n)}(\mathbf{x},\mathbf{u})=\mathbf{a}^{(i_1\ldots i_n)}+\mathbf{A}^{(i_1\ldots i_n)}\begin{pmatrix}x_1-x_1^{i_1}\\ \ldots\\ x_n-x_n^{i_n}\end{pmatrix}+\mathbf{B}^{(i_1\ldots i_n)}\begin{pmatrix}u_1\\ \ldots\\ u_m\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{a}^{(i_1\ldots i_n)}=\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(i_1\ldots i_n)},\mathbf{0}^{m\times 1}\right)$; $\mathbf{A}^{(i_1\ldots i_n)}=\left.\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(i_1\ldots i_n)};\mathbf{u}=\mathbf{0}^{m\times 1}}$; $\mathbf{B}^{(i_1\ldots i_n)}=\left.\dfrac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(i_1\ldots i_n)};\mathbf{u}=\mathbf{0}^{m\times 1}}$.

Представим модель T–S для целей управления следующим образом:

$$S^{(i_1\ldots i_n)}:\ \text{if } x_{k1} \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and ... and } x_{kn} \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then } \mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{a}^{(i_1\ldots i_n)}+\mathbf{A}^{(i_1\ldots i_n)}\mathbf{x}_k+\mathbf{B}^{(i_1\ldots i_n)}\mathbf{u}_k, \tag{7}$$

где $\mathbf{a}^{(i_1\ldots i_n)}\in\mathbb{R}^n$; $\mathbf{A}^{(i_1\ldots i_n)}\in\mathbb{R}^{n\times n}$; $\mathbf{B}^{(i_1\ldots i_n)}\in\mathbb{R}^{n\times m}$.

После дефаззификации нечеткая система будет иметь вид

$$\mathbf{x}_{k+1}=\left(\sum_{i_1=1}^{r_1}\ldots\sum_{i_n=1}^{r_n}\mu^{(i_1\ldots i_n)}\right)^{-1}\sum_{i_1=1}^{r_1}\ldots\sum_{i_n=1}^{r_n}\mu^{(i_1\ldots i_n)}\left(\mathbf{a}^{(i_1\ldots i_n)}+\mathbf{A}^{(i_1\ldots i_n)}\mathbf{x}_k+\mathbf{B}^{(i_1\ldots i_n)}\mathbf{u}_k\right), \tag{8}$$

где $\mu^{(i_1\ldots i_n)}$ — функции принадлежности консеквентов (следствий) правил (7).

Соотношения (7) эквивалентны системе

$$\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{a}(\mathbf{x}_k)+\mathbf{A}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k+\mathbf{B}(\mathbf{x}_k)\mathbf{u}_k,$$

где матрицы $\mathbf{a},\mathbf{A},\mathbf{B}$ определены в соответствии с выражениями базы правил:

$$S1^{(i_1\ldots i_n)}:\ \text{if } x_{k1} \text{ is } M_1^{i_1} \text{ and ... and } x_{kn} \text{ is } M_n^{i_n} \text{ then } \mathbf{a}=\mathbf{a}^{(i_1\ldots i_n)} \text{ and } \mathbf{A}=\mathbf{A}^{(i_1\ldots i_n)} \text{ and } \mathbf{B}=\mathbf{B}^{(i_1\ldots i_n)}.$$

Используем метод LQR для формирования закона управления. Цель управления состоит в нахождении управления $\mathbf{u}_k$ для перевода системы из начального состояния $\mathbf{x}_{k_0}$ до терминального $\mathbf{x}_{k_1}=0$ в минимизируемом функционале:

$$J=\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\left(\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_{k+1}+\mathbf{u}_k^T\mathbf{R}\mathbf{u}_k\right),$$

где $\mathbf{Q}$ — неотрицательно определенная матрица, $\mathbf{R}$ — положительно определенная матрица.

Предлагается на каждом шаге k минимизировать функционал:

$$J_k=\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_{k+1}+\mathbf{u}_k^T\mathbf{R}\mathbf{u}_k. \tag{9}$$

Подставляя линеаризованное представление, $\mathbf{x}_{k+1}=\mathbf{a}+\mathbf{A}\mathbf{x}_k+\mathbf{B}\mathbf{u}_k$ и приравнивая нулю градиент,

$$\partial J_k/\partial\mathbf{u}_k=2\mathbf{x}_{k+1}^T\mathbf{Q}\mathbf{B}(\mathbf{x}_k)+2\mathbf{u}_k^T\mathbf{R}=0,$$

с учетом того, что для симметричных матриц $\mathbf{R}$ выполняется, $(\mathbf{R}\cdot\mathbf{u})^T=\mathbf{u}^T\cdot\mathbf{R}$, получим оптимальное управление в форме

$$\mathbf{u}_k=-\left(\mathbf{R}+\mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{B}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}\left(\mathbf{a}_k+\mathbf{A}_k\mathbf{x}_k\right), \tag{10}$$

где $\mathbf{a}_k=\mathbf{a}(x_k)$; $\mathbf{A}_k=\mathbf{A}(x_k)$; $\mathbf{B}_k=\mathbf{B}(x_k)$. Следует отметить, что для формирования данного дискретного нечеткого оптимального управления отсутствует необходимость решения уравнения Риккати.

Рассмотрим некоторые конкретные модели механических систем [Fantoni, Lozano, 2002].

Модель оптимального управления вращательным движением твердого тела

Рассмотрим применение алгоритма на примере оптимального управления вращательным движением твердого тела, динамические уравнения которого являются существенно нелинейными [Лурье, 1961; Murray, Li, Sastry, 1994]:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})+\left[\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})\right]=\mathbf{M}, \tag{11}$$

или в покомпонентной форме:

$$\begin{aligned} J_x\dot{\omega}_x+\left(J_z-J_y\right)\omega_y\omega_z&=M_x;\\ J_y\dot{\omega}_y+\left(J_x-J_z\right)\omega_x\omega_z&=M_y;\\ J_z\dot{\omega}_z+\left(J_y-J_x\right)\omega_x\omega_y&=M_z,\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega}=\begin{pmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{pmatrix}^T$ — вектор угловой скорости твердого тела относительно связанной системы координат (ССК); $\mathbf{J}=\operatorname{diag}\begin{pmatrix}J_x & J_y & J_z\end{pmatrix}$ — тензор инерции твердого тела относительно ССК; $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}M_x & M_y & M_z\end{pmatrix}^T$ — вектор момента внешних сил относительно ССК.

Примем в качестве центров множеств $M^{(ijk)}=\begin{pmatrix}M_1^{i_1} & M_2^{i_2} & M_3^{i_3}\end{pmatrix}^T$; $i_1,i_2,i_3=0{,}1$, следующие значения векторов угловой скорости твердого тела:

$$\boldsymbol{\omega}^{(000)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1};\ \boldsymbol{\omega}^{(001)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.01\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1};\ \boldsymbol{\omega}^{(010)}=\begin{pmatrix}0 & 0.01 & 0\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1};$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(011)}=\begin{pmatrix}0 & 0.01 & 0{,}01\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1};\ \boldsymbol{\omega}^{(100)}=\begin{pmatrix}0.01 & 0 & 0\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1};\ \boldsymbol{\omega}^{(101)}=\begin{pmatrix}0.01 & 0 & 0{,}01\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1};$$

$$\boldsymbol{\omega}^{(110)}=\begin{pmatrix}0.01 & 0.01 & 0\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1};\ \boldsymbol{\omega}^{(111)}=\begin{pmatrix}0.01 & 0.01 & 0.01\end{pmatrix}^T \text{с}^{-1}.$$

Составим базы правил в виде:

$$S^{(ijk)}:\ \text{if }\ \boldsymbol{\omega}^{(ijk)}\ \text{ is }\mathbf{M}^{(ijk)}\ \text{ then }\boldsymbol{\omega}_{k+1}=\mathbf{a}^{(ijk)}+\mathbf{A}^{(ijk)}\boldsymbol{\omega}_k+\mathbf{B}^{(ijk)}\mathbf{M}_k; \tag{12}$$

$$S1^{(ijk)}:\ \text{if }\ \boldsymbol{\omega}^{(ijk)}\ \text{ is }\mathbf{M}^{(ijk)}\ \text{ then }\mathbf{M}_k=-\mathbf{K}_k\left(\mathbf{a}_k+\mathbf{A}_k\boldsymbol{\omega}_k\right);i,j,k=0{,}1,$$

где $\mathbf{a}^{(ijk)}\in\mathbb{R}^3$; $\mathbf{A}^{(ijk)}\in\mathbb{R}^{3\times3}$; $\mathbf{B}^{(ijk)}\in\mathbb{R}^{3\times3}$; $\mathbf{K}_k=\left(\mathbf{R}+\mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{B}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}$ с последующей идентификацией $\mathbf{a}^{(ijk)},\mathbf{A}^{(ijk)},\mathbf{B}^{(ijk)}$. Примем конкретные значения: $J_x=100$ кг×м^2; $J_y=80$ кг×м^2; $J_z=60$ кг×м^2; $\Delta t=0{,}1$ с; $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0.1\end{pmatrix}$; $\mathbf{R}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Запишем, например, следствие правила $S^{(111)}$:

$$\boldsymbol{\omega}_{k+1}=\boldsymbol{\omega}_k-\begin{pmatrix}\alpha_x s_y s_z\omega_y^1\omega_z^1\\ \alpha_y s_x s_z\omega_x^1\omega_z^1\\ \alpha_z s_x s_y\omega_x^1\omega_y^1\end{pmatrix}\cdot\Delta t+\begin{pmatrix}0 & \alpha_x s_z\omega_z^1 & \alpha_x s_y\omega_y^1\\ \alpha_y s_z\omega_z^1 & 0 & \alpha_y s_x\omega_x^1\\ \alpha_z s_y\omega_y^1 & \alpha_z s_x\omega_x^1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_k\cdot\Delta t+\operatorname{diag}\begin{pmatrix}J_x^{-1} & J_y^{-1} & J_z^{-1}\end{pmatrix}\mathbf{M}_k\cdot\Delta t,$$

где $s_x = \operatorname{sign}(\omega_x)$; $s_y = \operatorname{sign}(\omega_y)$; $s_z = \operatorname{sign}(\omega_z)$; $\alpha_x = (J_y - J_z)J_x^{-1} = 0{,}2$; $\alpha_y = (J_z - J_x)J_y^{-1} = -0.5$; $\alpha_z = (J_x - J_y)J_z^{-1} = 1/3$.

Получим базу правил динамических уравнений движения твердого тела:

$$S^{(000)}: \text{ if } \boldsymbol{\omega}^{(000)} \text{ is } M^{(000)} \text{ then } \mathbf{a}^{(000)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(000)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$S^{(001)}: \text{ if } \boldsymbol{\omega}^{(001)} \text{ is } M^{(001)} \text{ then } \mathbf{a}^{(001)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(001)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 10^{-4} s_z & 0 \\ -5\cdot 10^{-4} s_z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\cdots$$

$$S^{(110)}: \text{ if } \boldsymbol{\omega}^{(110)} \text{ is } M^{(110)} \text{ then } \mathbf{a}^{(110)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.33\cdot 10^{-6} s_x s_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(110)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\cdot 10^{-4} s_y \\ 0 & 1 & -5\cdot 10^{-4} s_x \\ 3.33\cdot 10^{-4} s_y & 3.33\cdot 10^{-4} s_x & 1 \end{pmatrix};$$

$$S^{(111)}: \text{ if } \boldsymbol{\omega}^{(111)} \text{ is } M^{(111)} \text{ then } \mathbf{a}^{(111)} = \begin{pmatrix} -2\cdot 10^{-6} s_y s_z \\ 5\cdot 10^{-6} s_x s_z \\ -3.33\cdot 10^{-6} s_x s_y \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(111)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 10^{-4} s_z & 2\cdot 10^{-4} s_y \\ -5\cdot 10^{-4} s_z & 1 & -5\cdot 10^{-4} s_x \\ 3.33\cdot 10^{-4} s_y & 3.33\cdot 10^{-4} s_x & 1 \end{pmatrix},$$

для всех правил:

$$\mathbf{B}^{(ijk)} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0167 \end{pmatrix}; \; \mathbf{K}^{(ijk)} = \begin{pmatrix} -1\cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -1.25\cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.67\cdot 10^{-3} \end{pmatrix}; \quad \forall i,j,k = 1,2 .$$

В качестве примера найдем оптимальное управление для вектора угловой скорости: $\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0.005 & 0.005 \end{pmatrix}^T$ с$^{-1}$. При этом

$$\mu^{(000)} = \mu^{(001)} = \cdots = \mu^{(110)} = \mu^{(111)} = 0.125; \; \sum_{i,j,k=1,2} \mu^{(ijk)} = 1;$$

$$\mathbf{a} = \sum_{ijk} \mu^{(ijk)} \mathbf{a}^{(ijk)} = \begin{pmatrix} -0.5\cdot 10^{-6} \\ 1.25\cdot 10^{-6} \\ -0.833\cdot 10^{-6} \end{pmatrix}; \; \mathbf{A} = \sum_{ijk} \mu^{(ijk)} \mathbf{A}^{(ijk)} = \begin{pmatrix} 1 & 1\cdot 10^{-4} & 1\cdot 10^{-4} \\ -2.5\cdot 10^{-4} & 1 & -2.5\cdot 10^{-4} \\ 1.66\cdot 10^{-4} & 1.66\cdot 10^{-4} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0167 \end{pmatrix}; \; \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1\cdot 10^{-3} & 0 & 0 \\ 0 & -1.25\cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 1.67\cdot 10^{-3} \end{pmatrix},$$

откуда получим вектор управляющего момента сил:

$$\mathbf{M}_k = -\mathbf{K}_k \left(\mathbf{a}_k + \mathbf{A}_k \boldsymbol{\omega}_k \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.25\cdot 10^{-6} \\ -8.33\cdot 10^{-6} \end{pmatrix} \text{ Н} \cdot \text{м} .$$

Модель кинематического управления вращательным движением твердого тела

Рассмотрим применение алгоритма на примере кинематического управления вращательным движением твердого тела в форме Родрига–Гамильтона [Лурье, 1961; Бранец, Шмыглевский, 1992]:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\theta}] + \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{\theta}^T\boldsymbol{\theta}\right) \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{13}$$

или в покомпонентной форме:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_x &= \left(1 + 0,25\theta^2\right) \cdot \omega_x + 0,5 \cdot \left(\theta_z\omega_y - \theta_y\omega_z\right), \\
\dot{\theta}_y &= \left(1 + 0,25\theta^2\right) \cdot \omega_y + 0,5 \cdot \left(\theta_x\omega_z - \theta_z\omega_x\right), \\
\dot{\theta}_z &= \left(1 + 0,25\theta^2\right) \cdot \omega_z + 0,5 \cdot \left(\theta_y\omega_x - \theta_x\omega_y\right),
\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{pmatrix}^T$ — вектор угловой скорости твердого тела относительно связанной системы координат (ССК); $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix}\theta_x & \theta_y & \theta_z\end{pmatrix}^T$ — вектор параметров Родрига–Гамильтона, определяющих ориентацию твердого тела относительно инерциальной системы координат [Лурье, 1961; Бранец, Шмыглевский, 1992].

Примем в качестве центров множеств $M^{(ijk)} = \begin{pmatrix}M_1^{i_1} & M_2^{i_2} & M_3^{i_3}\end{pmatrix}^T; i_1, i_2, i_3 = 0,1,$ следующие значения векторов Родрига–Гамильтона:

$$\boldsymbol{\theta}^{(000)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T;\ \boldsymbol{\theta}^{(001)} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0,52\end{pmatrix}^T;\ \boldsymbol{\theta}^{(010)} = \begin{pmatrix}0 & 0,52 & 0\end{pmatrix}^T;$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(011)} = \begin{pmatrix}0 & 0,52 & 0,52\end{pmatrix}^T;\ \boldsymbol{\theta}^{(100)} = \begin{pmatrix}0,52 & 0 & 0\end{pmatrix}^T;\ \boldsymbol{\theta}^{(101)} = \begin{pmatrix}0,52 & 0 & 0,52\end{pmatrix}^T;$$

$$\boldsymbol{\theta}^{(110)} = \begin{pmatrix}0,52 & 0,52 & 0\end{pmatrix}^T;\ \boldsymbol{\theta}^{(111)} = \begin{pmatrix}0,52 & 0,52 & 0,52\end{pmatrix}^T.$$

Составим базу правил для формирования кинематических уравнений движения твердого тела:

$$S^{(ijk)}: \text{ if } \boldsymbol{\theta}^{(ijk)} \text{ is } M^{(ijk)} \text{ then } \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \mathbf{A}^{(ijk)}\boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{B}^{(ijk)}\boldsymbol{\omega}_k;\ \boldsymbol{\omega}_k = -\left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{B}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}_k = -\mathbf{K}^{(ijk)}\boldsymbol{\theta}_k, \tag{14}$$

где $\mathbf{a}^{(ijk)} \in \mathbb{R}^3$; $\mathbf{A}^{(ijk)} \in \mathbb{R}^{3\times3}$; $\mathbf{B}^{(ijk)} \in \mathbb{R}^{3\times3}$; $i, j, k = 0,1$; $\mathbf{K}^{(ijk)} = \left(\mathbf{R} + \mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}\mathbf{B}_k\right)^{-1}\mathbf{B}_k^T\mathbf{Q}\boldsymbol{\theta}_k$. Примем, например, конкретные значения: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.1 & 0\\ 0 & 0 & 0.1\end{pmatrix}$; $\mathbf{R} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $\Delta t = 0,1$; тогда следствия базы правил (14) будут иметь вид

$$S^{(ijk)}: \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \begin{pmatrix}1 + 0.25\theta^2 & 0.5 \cdot s_z \cdot \theta_z^k & -0.5 \cdot s_y \cdot \theta_y^j\\ -0.5 \cdot s_z \cdot \theta_z^k & 1 + 0.25\theta^2 & 0.5 \cdot s_x \cdot \theta_x^i\\ 0.5 \cdot s_y \cdot \theta_y^j & -0.5 \cdot s_x \cdot \theta_x^i & 1 + 0.25\theta^2\end{pmatrix}\boldsymbol{\omega}_k \cdot \Delta t_k,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad \forall i, j, k = 0,1;\ \mathbf{B}^{(ijk)} = \begin{pmatrix}1 + 0.25\theta^2 & 0.5 \cdot s_z \cdot \theta_z^k & -0.5 \cdot s_y \cdot \theta_y^j\\ -0.5 \cdot s_z \cdot \theta_z^k & 1 + 0.25\theta^2 & 0.5 \cdot s_x \cdot \theta_x^i\\ 0.5 \cdot s_y \cdot \theta_y^j & -0.5 \cdot s_x \cdot \theta_x^i & 1 + 0.25\theta^2\end{pmatrix} \cdot \Delta t,$$

где $s_x = \operatorname{sign}(\theta_x)$; $s_y = \operatorname{sign}(\theta_y)$; $s_z = \operatorname{sign}(\theta_z)$; $\theta^2 = \theta_x^i \theta_x^i + \theta_y^j \theta_y^j + \theta_z^k \theta_z^k$. Получим следующую базу правил для конкретных комбинаций (ijk):

$$S^{(000)}: \text{ if } \boldsymbol{\theta}^{(000)} \text{ is } M^{(000)} \text{ then } \mathbf{B}^{(000)} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}^{(000)} = \begin{pmatrix} 1\cdot 10^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1\cdot 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1\cdot 10^{-2} \end{pmatrix};$$

$$S^{(001)}: \text{ if } \boldsymbol{\theta}^{(001)} \text{ is } M^{(001)}$$

$$\text{then } B^{(001)} = \begin{pmatrix} 0.107 & 0.026 s_z & 0 \\ -0.026 s_z & 0.107 & 0 \\ 0 & 0 & 0.107 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}^{(001)} = \begin{pmatrix} 0.011 & 0.0026 s_z & 0 \\ -0.0026 s_z & 0.011 & 0 \\ 0 & 0 & 0.011 \end{pmatrix};$$

$$\ldots$$

$$S^{(110)}: \text{ if } \boldsymbol{\theta}^{(110)} \text{ is } M^{(110)}$$

$$\text{then } \mathbf{B}^{(110)} = \begin{pmatrix} 0.114 & 0 & -0.026 s_y \\ 0 & 0.114 & 0.026 s_x \\ 0.026 s_y & -0.026 s_x & 0.114 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}^{(110)} = \begin{pmatrix} 0.012 & 0 & -0.0026 s_y \\ 0 & 0.012 & 0.0026 s_x \\ 0.0026 s_y & -0.0026 s_x & 0.012 \end{pmatrix};$$

$$S^{(111)}: \text{ if } \boldsymbol{\theta}^{(111)} \text{ is } M^{(111)}$$

$$\text{then } \mathbf{B}^{(111)} = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.026 s_z & -0.026 s_y \\ -0.026 s_z & 0.12 & 0.026 s_x \\ 0.026 s_y & -0.026 s_x & 0.12 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K}^{(111)} = \begin{pmatrix} 0.012 & 0.0026 s_z & -0.0026 s_y \\ -0.0026 s_z & 0.012 & 0.0026 s_x \\ 0.0026 s_y & -0.0026 s_x & 0.012 \end{pmatrix}.$$

Найдем оптимальное управление для вектора Родрига–Гамильтона: $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0.26 & 0.26 \end{pmatrix}^T$; при этом: $\mu^{(000)} = \mu^{(001)} = \mu^{(010)} = \mu^{(011)} = \mu^{(100)} = \mu^{(101)} = \mu^{(110)} = \mu^{(111)} = 0{,}125$; $\sum_{ijk} \mu^{(ijk)} = 1$;

$$\mathbf{B} = \sum_{ijk} \mu^{(ijk)} \mathbf{B}^{(ijk)} = \begin{pmatrix} 0.11 & 0.013 & -0.013 \\ -0.013 & 0.11 & 0.013 \\ 0.013 & -0.013 & 0.11 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{K} = \sum_{ijk} \mu^{(ijk)} \mathbf{K}^{(ijk)} = \begin{pmatrix} 0.011 & 0.0013 & -0.0013 \\ -0.0013 & 0.011 & 0.0013 \\ 0.0013 & -0.013 & 0.0011 \end{pmatrix},$$

откуда получим управляющий вектор угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega}_k = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} = -\begin{pmatrix} 0.011 & 0.0013 & -0.0013 \\ -0.0013 & 0.011 & 0.0013 \\ 0.0013 & -0.013 & 0.0011 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0.26 \\ 0.26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3.2\cdot 10^{-3} \\ -2.5\cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ c}^{-1}.$$

Заключение

В работе рассмотрен алгоритм функционирования оптимальной системы управления существенно нелинейным динамическим объектом — летательным аппаратом, который представлен моделью вращательного движения твердого тела. Для решения нелинейной задачи оптимального управления предлагается использовать метод LQR с алгоритмом Такаги–Сугено (Takagi–Sugeno), который позволяет декомпозировать множество вектора состояния системы на подмножества и формировать базу правил для каждого подмножества. Управление формируется на основе регулирования параметров LQR в каждом правиле. Алгоритм может быть использован для проектирования систем оптимального управления детерминированными нелинейными объектами. Предложено использование алгоритма функционирования оптимальной системы управления для управления вращательным движением летательного аппарата. Предполагается использование алгоритма для управления существенно нелинейными динамическими объектами [Fantoni, Lozano, 2002].

Список литературы

Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. — М.: Наука, 1992. — 280 с.

Лурье А. И. Аналитическая механика. — М.: ГИФМЛ, 1961. — 824 с.

Al-Hadithi B. M., Barragan A. J., Andujar A. J., Jimenez A. Fuzzy Optimal Control for Double Inverted Pendulum // Industrial Electronics and Applications (ICIEA), 2012 7th IEEE conference. — 2012. — P. 1–5.

Fantoni I., Lozano R. Non-linear Control for Underactuated Mechanical Systems. — London: Springer-Verlag, 2002. — 295 p.

Geering H. P. Optimal Control with Engineering Applications. — Berlin: Springer-Verlag, 2007. — 134 p.

Lilly J. H. Fuzzy control and identification. — New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2010. — 231 p.

Luo C., Hu D., Pang Y., Zhu X., Dong G. Fuzzy control of a quintuple inverted pendulum with the LQR method and 2-ary fuzzy piecewise interpolation function // Proceedings of the 5th IEEE Conference on Decision & Control FrlP9.6 Manchester Grand Hyatt Hotel San Diego, CA, USA, December 2006. — P. 13–15.

Murray R., Li Z., Sastry S. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation. — CRC Press. — 1994. — 456 p.

Sage A. P., White C. C. Optimal systems control. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall. — 1977. — 395 p.

Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vok.SMC-15, No.1 — 1985. — P. 116–132.