

УДК: 519.632.4:532.516.4

## Неявный итерационный полинейный рекуррентный метод в применении к решению задач динамики несжимаемой вязкой жидкости

А. А. Фомин<sup>1,a</sup>, Л. Н. Фомина<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>Кузбасский государственный технический университет имени Т. Ф. Горбачева,  
Россия, 650000, г. Кемерово, ул. Весенняя, 28

<sup>2</sup>Кемеровский государственный университет,  
Россия, 650043, г. Кемерово, ул. Красная, 6

E-mail: <sup>a</sup> fomin\_aa@mail.ru, <sup>b</sup> lubafomina@mail.ru

Получено 08 ноября 2014 г.

В работе рассматриваются результаты применения неявного итерационного полинейного рекуррентного метода решения систем разностных эллиптических уравнений, возникающих при численном моделировании динамики несжимаемой вязкой жидкости. Исследование проводится на примере решения задачи о стационарном течении в плоской каверне с подвижной крышкой, сформулированной в естественных переменных  $(u, v, p)$  при больших значениях чисел  $Re$  (до 20 000) и сеточных разрешений (до  $2049 \times 2049$ ). Демонстрируется высокая эффективность метода при расчете полей поправки давления. Анализируются проблемы решения задачи при больших числах  $Re$ .

Ключевые слова: течение в каверне, уравнения Навье–Стокса, численные методы решения СЛАУ

## The implicit line-by-line recurrence method in application to the solution of problems of incompressible viscous fluid dynamics

A. A. Fomin<sup>1</sup>, L. N. Fomina<sup>2</sup>

<sup>1</sup>T. F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, 28 Vesennaya st., Kemerovo, 650000, Russia

<sup>2</sup>Kemerovo State University, 6 Krasnaya st., Kemerovo, 650043, Russia

**Abstract.** — In the paper the results of applying the implicit line-by-line recurrence method for solving of systems of elliptic difference equations, arising, in particular, at numerical simulation of dynamics of incompressible viscous fluid are considered. Research is conducted on the example of the problem about a steady-state two-dimensional lid-driven cavity flow formulated in primitive variables  $(u, v, p)$  for large  $Re$  (up to 20 000) and grids (up to  $2049 \times 2049$ ). High efficiency of the method at calculation of a pressure correction fields is demonstrated. The difficulties of constructing a solution of the problem for large  $Re$  are analyzed.

Keywords: a lid-driven cavity flow, Navier–Stokes equations, numerical methods for SLAE solving

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 35–50 (Russian).

## Введение

Численное моделирование течений несжимаемой вязкой жидкости на основе уравнений Навье–Стокса связано с получением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с разреженными матрицами, имеющими ленточную структуру [Роуч, 1980]. В зависимости от исходной постановки задачи и выбранного алгоритма решения такие СЛАУ бывают как легко разрешимы, так и наоборот. В частности, матрицы систем уравнений, возникающих при разностной аппроксимации задачи Неймана для уравнения Пуассона для поправки давления, несмотря на использование процедур выделения единственного решения [Кузнецов, Стрелец, 1983], характеризуются очень высокими значениями чисел обусловленности, что объясняет серьезные трудности решения подобных систем. Разработанный авторами неявный итерационный полилинейный рекуррентный метод [Фомина, 2009] позволил успешно находить решения СЛАУ, матрицы которых характеризуются числами обусловленности по первой норме вплоть до  $10^{10}$ . Возможности данного метода иллюстрировались на многочисленных примерах решения тестовых краевых задач, вообще говоря, не содержащих в своей основе описания каких-либо физических явлений. Соответственно целью настоящей работы является исследование эффективности этого метода при построении решения задачи, связанной с моделированием физических процессов.

В данной ситуации удобно рассмотреть классическую задачу о течении несжимаемой вязкой жидкости в плоской квадратной каверне с движущейся с постоянной скоростью крышкой. Ее привлекательность заключается в том, что, несмотря на свою относительную простоту, как геометрическую, так и зависимость решения всего лишь от одного параметра, она отражает практически все основные особенности, которыми характеризуется класс течений несжимаемых вязких жидкостей. Во-первых, область решения отчетливо делится на две части: центральную подобласть практически безвихревого течения, в которой завихренность  $\omega$  — проекция  $\text{rot } \mathbf{V}$  на ось, перпендикулярную плоскости течения, является практически постоянной малой величиной и пристенно-угловые подобласти, в которых вследствие вязких свойств жидкости формируются многочисленные вихри различной интенсивности. Здесь и далее под вихрями понимается движение частиц жидкости по замкнутым контурам. Во-вторых, в верхних углах каверны имеют место разрывы первого рода скорости и, вообще говоря, давления, а также разрывы второго рода завихренности течения, что создает дополнительные трудности по корректному разрешению данных особенностей. В-третьих, теоретически бесконечные цепочки вихрей в нижних углах каверны при достаточно подробном сеточном разрешении позволяют сравнить численные решения с аналитическими [Moffatt, 1964].

Многочисленные публикации на тему данной задачи позволяют с высокой точностью проверить полученные результаты на достоверность практически по всем параметрам течения (см., например, [Ghia, Ghia, Shin, 1982; Rogers, Kwak, 1991; Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Kumar, Kumar, Kumar, 2009; Mishra, Sanyasiraju, 2012] и цитируемую литературу). Абсолютное большинство авторов приводят результаты исследований для чисел Рейнольдса  $Re \leq 10\,000$ . В работах [Bruneau, Saad, 2006; Kumar, Kumar, Kumar, 2009] на основе анализа устойчивости и численных экспериментов был сделан вывод о потере устойчивости решения при  $Re$  в диапазоне  $7\,000 \div 9\,000$  и, соответственно, об отсутствии стационарного решения при  $Re \geq 10\,000$ . Частично этот вывод подтверждается результатами работы [Barragy, Carey, 1997], в которой стационарное решение было получено для чисел  $Re$  вплоть до  $12\,500$ , а при  $Re = 16\,000$  наблюдались явные признаки неустойчивости. Однако в работах [Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Erturk, 2009] с помощью применения компактных разностных схем второго — четвертого порядков точности и процедуры экстраполяции Ричардсона до шестого порядка точности были получены решения для чисел  $Re$  вплоть до  $21\,000$ . Соответственно, если еще десять лет назад под большими числами Рейнольдса понимались числа  $Re > 1\,000$ , то в настоящее время к таковым, по-видимому, следует относить числа  $Re > 10\,000$ .

Еще одной особенностью современных исследований на данную тему является ставка авторов на высокоточные схемы порядка  $O(h^3) \div O(h^4)$  [Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Bruneau, Saad, 2006; Erturk, 2009; Исаев, Шапеев, 2010; Mishra, Sanyasiraju, 2012], где  $h$  — пространственный сеточный шаг; а также, за редким исключением [Исаев, Шапеев, 2010], отказ от неравномерных сеток, широко применявшихся в конце прошлого столетия [Rogers, Kwak, 1991; Barragy, Carey, 1997; Botella, Peyret, 1998]. Понятно, что при прочих равных условиях использование неравномерных сеток приводит к определенной потере точности результатов в центральной области карверны, в силу того, что сгущение производится ближе к стенкам. Однако неравномерные сетки позволяют «проявлять» такие малые структуры течения, как вихри четвертого уровня в нижних углах при  $Re \geq 2500 \div 7500$  или левый верхний пристенный вихрь второго уровня при  $Re = 12500$  [Barragy, Carey, 1997], что не удается сделать на применяемых в настоящее время равномерных сетках (вплоть до  $2048 \times 2048$ ) для нижних вихрей четвертого уровня и не всегда — для левого верхнего второго уровня, несмотря на значения чисел  $Re$  от 5000 до 21000 [Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Bruneau, Saad, 2006; Erturk, 2009].

Соответственно, еще одной целью настоящего исследования является построение стационарных решений задачи для больших  $Re$  на неравномерных сетках высокого разрешения за счет использования высокоэффективного метода решения разностных СЛАУ.

## Постановка задачи и алгоритм решения

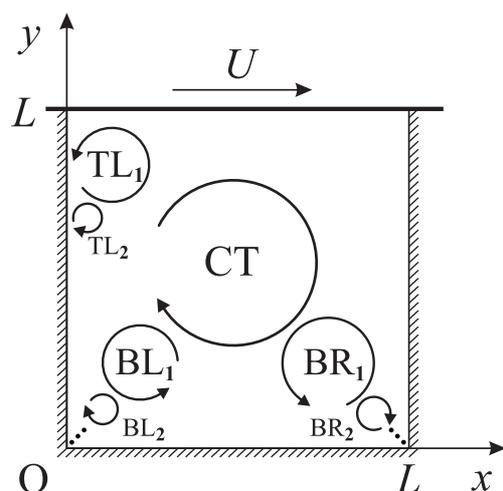


Рис. 1. Схема течения в области решения задачи

Область решения представляет собой квадрат  $\{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L\}$  с движущейся с постоянной скоростью верхней границей (крышкой). Общая схема течения с возможными вихрями рассматриваемой задачи изображена на рисунке 1. Обозначения угловых и пристенных вихрей включают в себя нижние индексы, указывающие на уровень иерархии вихрей: чем больше значение индекса, тем глубже в углу (ближе к стенке) они располагаются.

Считается, что плотность и вязкость жидкости постоянны, а течение, вообще говоря, нестационарное, инициированное первоначальным разгоном крышки на конечном отрезке времени. В этом случае безразмерная математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Re^{-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-1} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

На верхней границе области решения:

$$v = 0, \quad u = \begin{cases} 0.5 \{ \sin [0.5\pi (2t/t_1 - 1)] + 1 \}, & 0 \leq t \leq t_1; \\ 1, & t > t_1. \end{cases} \quad (4)$$

Во всех расчетах  $t_1$  — время разгона крышки — принималось равным единице. На остальных границах области решения

$$v = 0, u = 0. \quad (5)$$

В начальный момент времени жидкость покоится:

$$u = v = 0. \quad (6)$$

Здесь  $t$  — время,  $x, y$  — соответственно горизонтальная и вертикальная координаты;  $u, v$  — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$ ;  $p$  — давление;  $Re = UL/\nu$  — число Рейнольдса, где  $U$  — постоянная скорость движения крышки,  $L$  — размер стороны каверны,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости. В общем случае постановка (1)–(6) позволяет рассматривать нестационарные процессы, однако в данном исследовании методом установления определялись только стационарные решения задачи. Предпочтительность такого подхода достаточно подробно обсуждается в [Роуч, 1980; Erturk, 2009].

Алгоритм решения задачи, включающий в себя классическую трехшаговую схему построения решения на каждом слое по времени [Белоцерковский, Гушин, Щенников, 1975], представлен ниже (верхний индекс  $n$  — номер слоя по времени)

1. Задание начальных значений  $u^0 = v^0 = 0$ ; а также, как следствие,  $p^0 = 0$ .
2. Для  $n = 1, 2, 3, \dots$
3. Определение вектора «предварительной» скорости  $\mathbf{V}^*$  из задачи:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{n-1} - \tau \left\{ (\mathbf{V}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{V}^* - Re^{-1} \Delta \mathbf{V}^* + \nabla p^{n-1} \right\}, \quad (7)$$

плюс условия (4), (5) с учетом замены  $u \rightarrow u^*, v \rightarrow v^*$ .

- 3.1. Составление СЛАУ для  $u^*$  и  $v^*$  на основе задачи (7).
- 3.2. Решение СЛАУ для  $u^*$  и  $v^*$  выбранным итерационным методом с точностью  $\xi_v$ .
4. Определение поправки давления  $p'$  из задачи Неймана:

$$\Delta p' = \tau^{-1} \nabla \mathbf{V}^*, \quad (8)$$

с учетом условия  $\partial p' / \partial n = 0$  на границах области, где  $\partial / \partial n$  означает производную по нормали к границе.

- 4.1. Составление СЛАУ для  $p'$  на основе задачи (8).
- 4.2. Решение СЛАУ для  $p'$  выбранным итерационным методом с точностью  $\xi_p$ .
5. Коррекция полей скорости и давления

$$u^n = u^* - \tau \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad (9)$$

$$v^n = v^* - \tau \frac{\partial p'}{\partial y}; \quad (10)$$

$$p^n = p^{n-1} + \sigma p'. \quad (11)$$

6. Проверка на установление решения из условия выполнения неравенства

$$D_V = \frac{\|u^n - u^{n-1}\|_1 + \|v^n - v^{n-1}\|_1}{\|\mathbf{V}^n\|_1 \tau} < \epsilon. \quad (12)$$

7. В случае невыполнения (12) — переход на п. 2, иначе — завершение вычислений.

Здесь  $\tau$  — шаг по времени,  $D_V$  — темп изменения (сходимости) поля скорости течения,  $\sigma$  — итерационный параметр, путем численных экспериментов определен как 1.8. В отличие от [Белоцерковский, Гущин, Щенников, 1975] уравнение (7) записано в неявном виде, что позволило использовать шаги по времени, отвечающие числам Куранта  $C \gg 1$ . В качестве условия сходимости решения СЛАУ в п. 3.2 и п. 4.2 используется соотношение

$$\|\Phi^{k+1} - \Phi^k\|_1 < \xi_\Phi \|\Phi^k\|_1, \quad (13)$$

при одновременном контроле относительного уменьшения первой нормы невязки решения соответствующей СЛАУ. Здесь  $k$  — номер итерационного приближения решения СЛАУ;  $\Phi$  имеет смысл  $u^*$ ,  $v^*$  или  $p'$ , а  $\xi_\Phi$  — смысл  $\xi_v$  или  $\xi_p$ . Удобство использования условия (13) связано с простотой определения необходимого количества верных знаков в искомом решении системы линейных уравнений. Как показали расчеты, отношение  $\|\mathbf{R}_\Phi^k\|_1 / \|\mathbf{R}_\Phi^0\|_1$  при выполнении условия (13) всегда было как минимум на порядок меньше соответствующего заданного значения  $\xi_\Phi$ , где  $\mathbf{R}_\Phi$  — вектор невязки обобщенного решения  $\Phi$  системы линейных уравнений.

Проверка полной аппроксимации уравнения движения путем подстановки (9)–(11) в (7) (при  $\sigma = 1$ ) приводит к следующей цепочке преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^n &= \mathbf{V}^{n-1} - \tau \{ (\mathbf{V}^{n-1} \cdot \nabla)(\mathbf{V}^n + \tau \nabla p') - \text{Re}^{-1} \Delta(\mathbf{V}^n + \tau \nabla p') + \nabla p^n - \nabla p' \} = \\ &= \mathbf{V}^{n-1} - \tau \{ (\mathbf{V}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{V}^n - \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{V}^n + \nabla p^n \} + \tau \nabla p' - \tau^2 \{ (\mathbf{V}^{n-1} \cdot \nabla) \nabla p' - \text{Re}^{-1} \Delta \nabla p' \} = \\ &= \mathbf{V}^{n-1} - \tau \{ (\mathbf{V}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{V}^n - \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{V}^n + \nabla p^n \} + O(\nabla p'). \end{aligned}$$

В рамках естественного предположения о гладкости  $p'$  видно, что при  $p' \rightarrow 0$  имеет место  $\nabla p' \rightarrow 0$  и алгоритм п. 3–п. 5 неявным образом аппроксимирует уравнение движения с первым порядком по  $\tau$ .

Если записать схему (7) в явном виде, то нетрудно установить корреляционную зависимость между величинами  $D_V$  и  $\|\text{div} \mathbf{V}^*\|_1$ , а именно: при стремлении  $D_V \rightarrow 0$  значение  $\|\text{div} \mathbf{V}^*\|_1$  также стремится к нулю. При этом обратное неверно хотя бы потому, что при решении нестационарной задачи малость величины  $\|\text{div} \mathbf{V}^*\|_1$  должна иметь место на каждом слое по времени, начиная с самых первых слоев. В то время как достижение установления поля скорости (малости значения  $D_V$ ) происходит через большое количество шагов по времени. С другой стороны, желателен контроль значения величины  $\|\text{div} \mathbf{V}^*\|_1$ , во-первых, как индикатора «напряженности» процесса установления решения (чем больше  $\|\text{div} \mathbf{V}^*\|_1$  на каком-либо слое по времени, тем больше итераций требуется на этом слое для сходимости решений соответствующих СЛАУ), а во-вторых, как показателя близости полей  $\mathbf{V}^*$  и  $\mathbf{V}^n$  и, соответственно, степени удовлетворения поля  $\mathbf{V}^n$  уравнению движения, а поля  $\mathbf{V}^*$  — условию соленидальности.

Значения точностей  $\epsilon$ ,  $\xi_v$  и  $\xi_p$  определяются из следующих оценок: пусть пространственный сеточный шаг  $h \sim 10^{-3}$ ,  $\text{Re} \sim 10^3$ ,  $C \sim 10 \div 100$ ,  $\psi_{\min} \sim 10^{-11} \div 10^{-12}$  (литературные данные). Тогда, с учетом  $\|\mathbf{V}^n\|_1 = 1$ ,  $\xi_v \sim \psi_{\min}/h \sim 10^{-8} \div 10^{-9}$ . А поскольку  $\tau \sim C \min(h, \text{Re} h^2) \sim 0.01 \div 0.1$ , то  $\epsilon \sim \xi_v/\tau \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$ . С другой стороны, из (9) и (10) следует, что  $\xi_p \|p'\|_1 \sim \xi_v h/\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-11}$ , при этом грубая оценка  $\|p'\|_1$  в предположении внезапного начала движения крышки дает величину  $\|p'\|_1 \sim h/\tau \sim 0.1 \div 0.01$ .

Практика вычислений показала, что величина  $\|p'\|_1$  в начале расчета варианта повышается до значения  $\sim 10^{-2}$ , а потом понижается вплоть до  $\sim 10^{-7} \div 10^{-8}$  на момент установления решения. Соответственно, даже если принять  $\|p'\|_1 = 0.01$ , то оценка для  $\xi_p$  составит  $\sim 10^{-7} \div 10^{-9}$ . Из этих же расчетов также следует, что при разумных изменениях  $h$  и  $\tau$  варьирование значений  $\xi_v$  и, соответственно,  $\xi_p$  как минимум в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^{-10}$  не оказывает существенного влияния на собственно процесс установления решения (лишь может его несколько замедлить за счет

увеличения количества итераций при решении соответствующих СЛАУ), а также практически не сказывается на конечном результате. Также путем численных экспериментов было определено, что оценка для  $\epsilon$  явно завышена. Уже при значениях  $\epsilon \sim 10^{-4} \div 10^{-5}$  при условии выбора  $\xi_v$  и  $\xi_p$  из указанных выше диапазонов решение надежно устанавливается в широких пределах изменения сеточных разбиений ( $65 \times 65 \div 2\,049 \times 2\,049$ ) и чисел Re ( $100 \div 20\,000$ ). В итоге все приведенные далее результаты были получены при  $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$ ,  $\xi_v = 10^{-7}$  и  $\xi_p = 10^{-8}$ .

Изложенный выше алгоритм содержит два проблемных момента: во-первых, на каждом шаге по времени приходится решать задачу Неймана для  $p'$  (п. 4); во-вторых, имеет место медленная общая поточечная сходимости решения. Первую проблему можно снять путем использования эффективного метода, ориентированного на решение СЛАУ, матрицы которых характеризуются сверхвысокими числами обусловленности. Вторая проблема является неотъемлемой особенностью используемого алгоритма, причем литературные данные говорят о том, что и другие алгоритмы также не отличаются особым быстродействием [Kumar, Kumar, Kumar, 2009; Деги, Старченко, 2012; Wright, 1988].

Разностная аппроксимация исходных уравнений п. 3.1 и п. 4.1 выполнена методом контрольного объема со вторым порядком точности по пространству и первым по времени [Патанкар, 1984]. Для совпадения с многочисленными результатами последнего времени, полученными с применением высокоточных аппроксимаций порядка  $O(h^3) \div O(h^4)$ , в настоящей работе использованы подробные разностные сетки для компенсации относительно невысокого уровня точности аппроксимации исходной задачи. И если для первого этапа применяемой трехшаговой схемы (п. 3.2) даже максимальное разрешение  $2\,049 \times 2\,049$  не вызывает каких-либо проблем в решении соответствующих СЛАУ (числа обусловленности матриц систем для всех Re  $\leq 20\,000$  не превышают 1 000), то для второго этапа (п. 4.2) использования подробного сеточного разрешения приводит к трудно решаемым системам уравнений. Тем интереснее было провести сравнительный анализ эффективности разных итерационных методов решения подобных СЛАУ.

Выявление более мелких деталей течения без дополнительного наращивания сеточного разрешения возможно путем использования слабонервномерных сеток, сгущающихся к стенкам каверны. В настоящей работе сгущение проводилось по закону геометрической прогрессии  $h_i = qh_{i-1}$ , где  $h$  — сеточный шаг,  $q$  — знаменатель прогрессии такой, что  $h_i - h_{i-1} = O(h_i^2)$ . Параметром неравномерности служит число  $k_G$ , равное отношению среднего шага (шага соответствующей равномерной сетки) к минимальному шагу около стенки. Расчеты показали заметный рост трудоемкости решения задач с неравномерной сеткой. Так, например, использование сетки с параметром сгущения  $k_G = 10$  практически эквивалентно удвоению сеточного разрешения по каждому из координатных направлений соответствующей равномерной сетки.

Во всех вариантах, кроме специально оговоренных случаев, СЛАУ, полученные в п. 3.1 и п. 4.1, решались с применением неявного итерационного полинейного рекуррентного метода со вторым порядком аппроксимации приращения решения, ускоренного в подпространствах Крылова, так называемого метода LR2sK [Фомин, Фомина, 2011; Фомин, Фомина, 2012]. Заметное сокращение времени сходимости решения удалось достигнуть за счет использования чисел Куранта  $C \gg 1$  при определении шага по времени  $\tau$ . При этом в расчетах на равномерной сетке  $C$  полагалось равным  $30 \div 40$ , а на неравномерной сетке —  $70 \div 100$  в силу того, что  $\tau$  определяется через минимальный шаг пространственной сетки.

Все расчеты проведены на компьютере PC Intel Core i5-750, 2.66 GHz, RAM 12 Gb.

## Сравнительный анализ методов решения СЛАУ

Для проверки выбранного алгоритма решения и корректности программного кода результаты расчетов при Re = 1 000 сравнивались с аналогичными результатами других исследова-

лей. Выбор значения числа Рейнольдса обусловлен большим объемом литературных данных для  $Re = 1\,000$ , что делает эти результаты максимально достоверными.

На рисунке 2 представлены профили основных параметров течения вдоль горизонтальной (*a*) и вертикальной (*b*) линий, проходящих через центр каверны. Вычисления выполнены на сетке с разрешением  $1\,025 \times 1\,025$  как равномерной (сплошная линия), так и с параметром сжатия  $k_G = 10$  (пунктир). Видно хорошее согласование с результатами работ [Ghia, Ghia, Shin, 1982; Botella, Peyret, 1998; Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Bruneau, Saad, 2006; Каштанова, Окулова, 2012]. В силу того, что поле давления рассчитывается с точностью до константы, для сравнения профилей давления  $p$  с профилями из [Botella, Peyret, 1998; Bruneau, Saad, 2006] необходимо было совместить их в какой-либо точке. Для линии  $y = 0.5$  в качестве такой точки был выбран граничный узел (1, 0.5), а для линии  $x = 0.5$  — узел (0.5, 1). Видно хорошее совпадение расчетных и литературных данных. Также видно, что результаты для равномерной и неравномерной сеток практически совпадают, а небольшое расхождение в пределах 2–3 % относительной ошибки имеет место только для профилей давления.

Поточечный характер сходимости используемого алгоритма решения задачи накладывает серьезные ограничения на величину разрешения сеточного разбиения области. В таблице 1 приведены абсолютные времена ( $\tau$ ) установления решения задачи при  $Re = 1\,000$  в зависимости от разрешения сетки (шаг постоянный) и используемого метода решения разностных СЛАУ (п. 3.2 и п. 4.2). Кроме упомянутого ранее метода LR2sK были также проведены расчеты с использованием неявного итерационного полинейного рекуррентного метода со вторым порядком аппроксимации приращения решения LR2 [Фомина, 2009; Фомин, Фомина, 2012], а также метода би-сопряженных градиентов со стабилизацией [Van der Vorst, 1992] с предобуславливателем на базе неполной факторизации исходной матрицы СЛАУ (Bi-CGStab P LU) и с предобуславливателем на базе явного метода Булеева (Bi-CGStab PB) [Старченко, 2003].

Таблица 1. Время ( $\tau$ ), затраченное на решение задачи при  $Re = 1\,000$

	Bi-CGStab P LU	Bi-CGStab PB	LR2	LR2sK
65×65	6.0	5.0	4.0	3.0
129×129	42.0	32.0	21.0	16.0
257×257	507.0	421.0	218.0	149.0
513×513	9 766.0	8 898.0	3 087.0	1 903.8
1 025×1 025	153 144.0	143 076.0	35 678.0	23 396.0

Из приведенных данных видно, что одновременное удвоение количества расчетных узлов по каждому из координатных направлений более чем на порядок увеличивает время счета задачи независимо от используемого метода решения СЛАУ. В этом факте наиболее отчетливо проявляется поточечный характер сходимости общего алгоритма решения задачи, который выражается в том, что количество слоев по времени, необходимых для установления решения при заданном сеточном разбиении области, не зависит от выбранного метода решения СЛАУ и приблизительно одинаково. Следовательно, основным фактором эффективности алгоритма является итерационный метод решения систем линейных уравнений. Сравнение результатов в первой (для Bi-CGStab P LU) и последней (для LR2sK) колонках таблицы наглядно иллюстрирует данный вывод. При этом необходимо заметить, что основные вычислительные ресурсы в подобных алгоритмах тратятся на решение СЛАУ для поправки давления  $p'$  (п. 4.2), в то время как для сходимости метода при решении СЛАУ для компонент «предварительной» скорости  $u^*$  и  $v^*$  (п. 3.2)

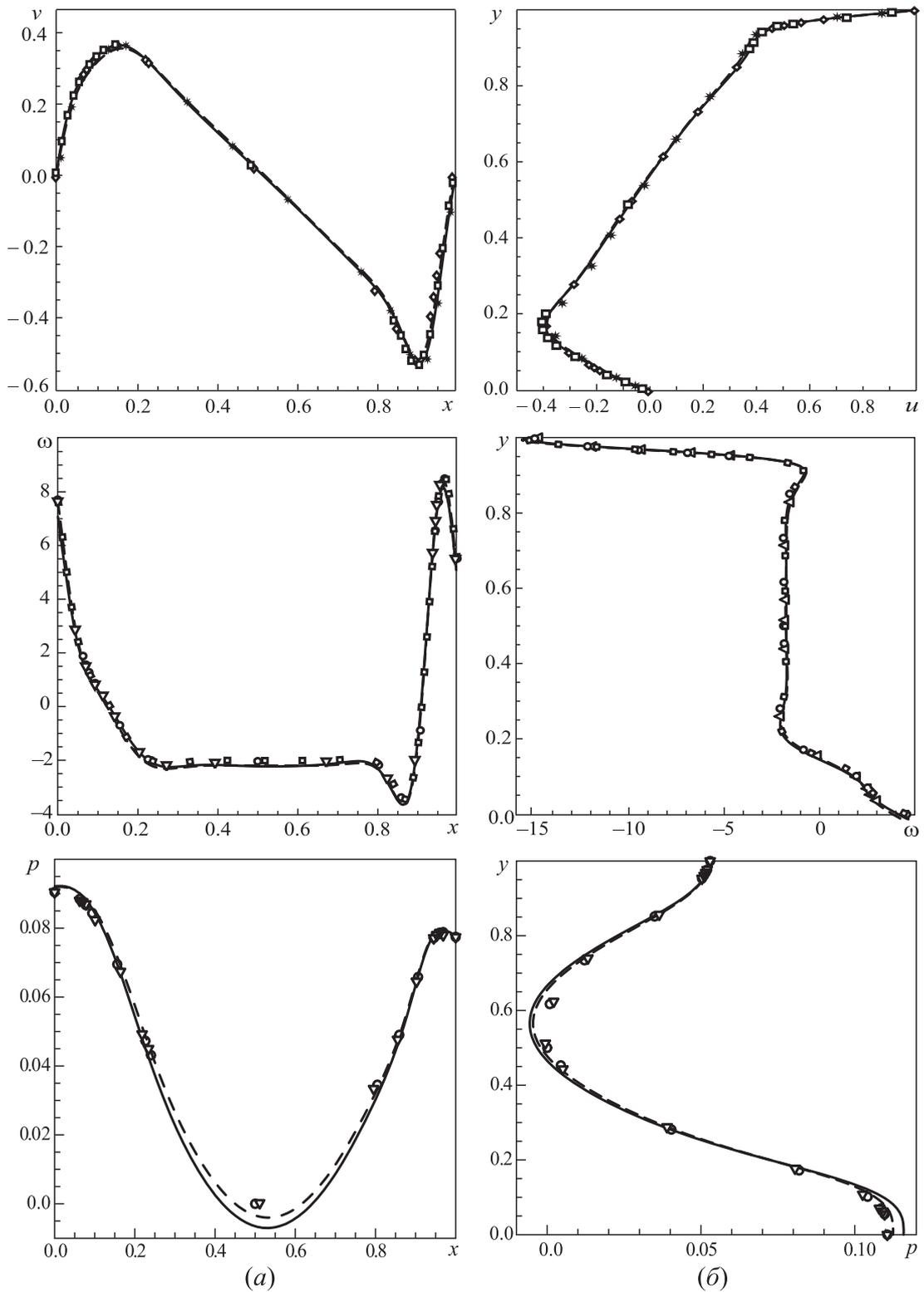


Рис. 2. Профили компонент скорости, завихренности и давления вдоль горизонтальной (а) и вертикальной (б) линий, проходящих через центр каверны, при  $Re = 1000$

в зависимости от сеточного разбиения требуется в среднем 2–4 итерации, а в наиболее «напряженные» моменты расчетов для наиболее трудоемких вариантов решения задачи — 6–8 итераций максимум.

На рисунке 3 приведены зависимости количества итераций  $k_p$ , необходимых для сходимости решения системы разностных уравнений на базе задачи Неймана для поправки давления  $p'$ , от номера слоя по времени  $n$ . Представленные графики также подтверждают вывод о доминирующем влиянии эффективности метода решения СЛАУ на общую эффективность всего алгоритма решения задачи. Было просчитано четыре варианта с использованием методов LR2sK и Bi-CGStab PB. Первые два варианта достаточно простые:  $Re = 1\,000$ , сетка  $257 \times 257$  равномерная. Вторые два — намного сложнее:  $Re = 10\,000$ , сетка  $1025 \times 1025$  равномерная в случае использования Bi-CGStab PB и неравномерная ( $k_G = 10$ ) при использовании LR2sK, что еще более повысило сложность последнего варианта.

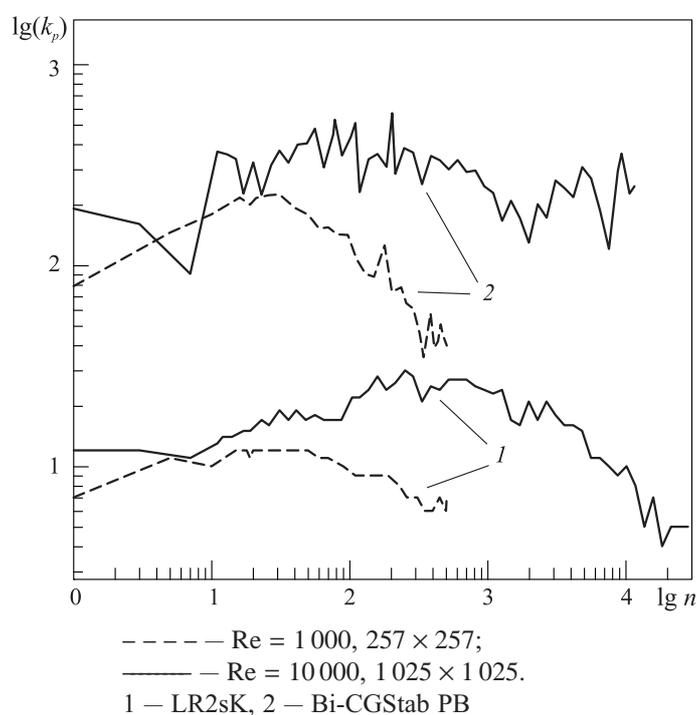


Рис. 3. Зависимости количества итераций  $k_p$ , необходимых для сходимости решения системы уравнений на базе задачи Неймана для поправки давления  $p'$ , от номера слоя по времени  $n$

Из поведения кривых следует вывод о том, что трудоемкость задачи решающим образом влияет на количество слоев по времени, необходимых для установления решения, в то время как на величину  $k_p$  она влияет гораздо слабее, особенно на начальных слоях по времени. Основное различие имеет место при применении различных методов решения СЛАУ. При использовании Bi-CGStab PB величина  $k_p$  в среднем меняется от 100 до 400, в то время как при использовании LR2sK — от 10 до 20. Хорошо видно, что минимальные значения  $k_p$  для Bi-CGStab PB больше максимальных значений  $k_p$  для LR2sK вне зависимости от номера слоя по времени и трудоемкости задачи. И хотя одна итерация Bi-CGStab PB при прочих равных условиях в зависимости от конфигурации вычислительной системы выполняется в 2–6 раз быстрее одной итерации LR2sK [Фомин, Фомина, 2012], преимущество последнего очевидно. Все дальнейшие результаты настоящей работы получены с использованием методов решения систем линейных уравнений LR2 (п. 3.2.) и LR2sK (п. 4.2.).

Кроме сеточного разрешения на трудоемкость решения задачи также влияют число  $Re$  и неравномерность сетки. Так, при переходе от  $Re = 1000$  к  $Re = 10000$  (сетка  $513 \times 513$ ,  $k_G = 1$ ) количество слоев по времени, необходимых для установления решения, увеличилось с 935 до 8521, а затраты машинного времени — с 1904 с до 13497 с. Аналогично при переходе от равномерной сетки ( $k_G = 1$ ) к неравномерной ( $k_G = 10$ ) ( $Re = 1000$ , сетка  $1025 \times 1025$ ) количество необходимых слоев по времени возросло с 2071 до 23383, а затраты машинного времени — с 23396 с до 210204 с. Именно этим фактором объясняется использование равномерной сетки ( $k_G = 1$ ) в варианте  $Re = 10000$  при применении метода Bi-CGStab PB (см. рис. 3). Даже в этом случае затраты машинного времени для этого варианта составили свыше 189 часов против затрат времени при использовании LR2sK в 128 часов ( $k_G = 10$ ) или 21 час ( $k_G = 1$ ).

### Решение задачи для больших чисел Рейнольдса

Поскольку при увеличении в задаче числа Рейнольдса толщина пограничного слоя вдоль стенок каверны уменьшается, то для сохранения корректности передачи сложно детализиро-

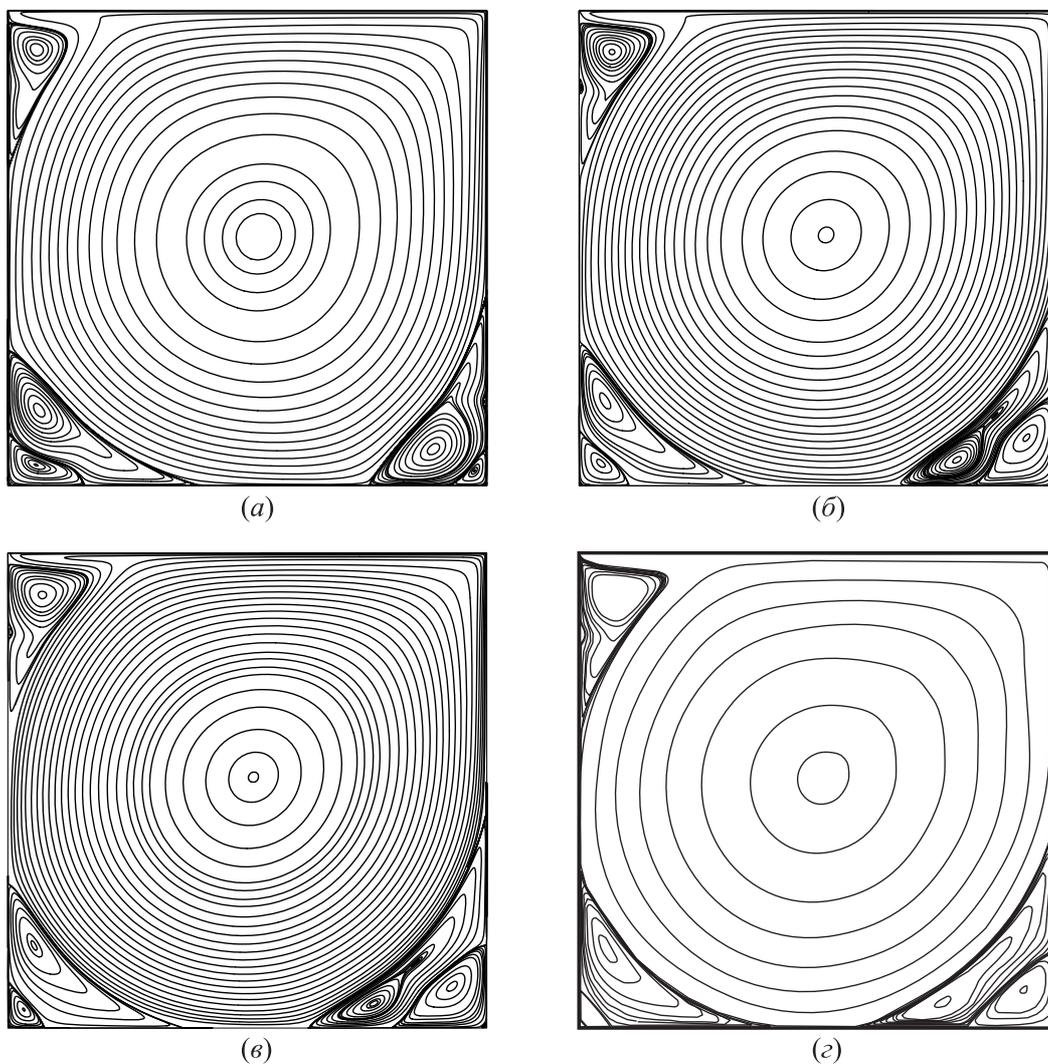


Рис. 4. Решение задачи на равномерных сетках при  $Re = 12500$ : (а)  $257 \times 257$ ; (б)  $513 \times 513$ ; (в)  $1025 \times 1025$ ; (г)  $513 \times 513$ ,  $O(h^4)$  [Erturk, 2009]

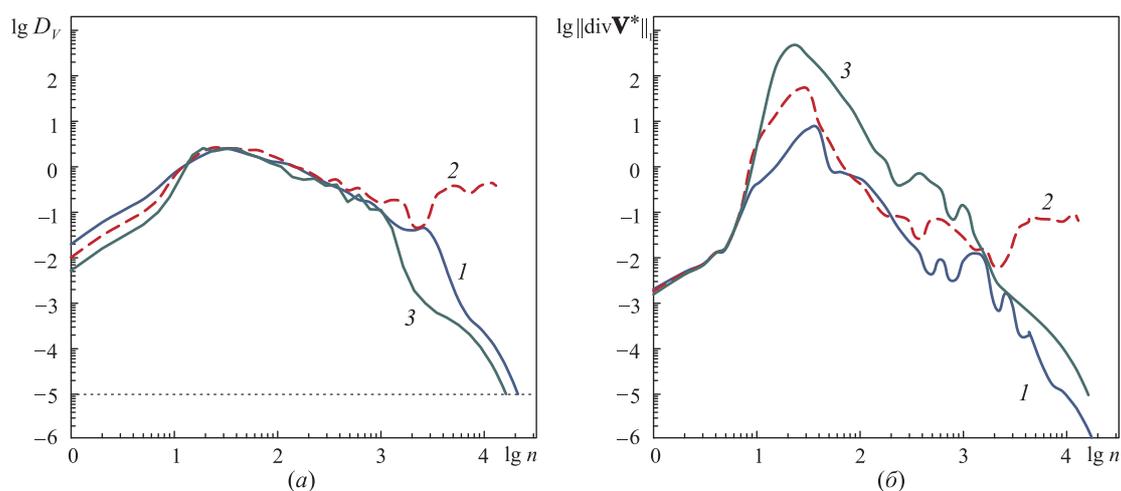


Рис. 5. Кривые установления (сходимости) решения при  $Re = 17\,500$  для различных равномерных сеток: 1 –  $257 \times 257$ , 2 –  $513 \times 513$ , 3 –  $1\,025 \times 1\,025$

ванной структуры течения в этом случае также необходимо наращивать разрешение сеточного разбиения области и/или увеличивать порядок разностной аппроксимации исходной дифференциальной постановки. В настоящем исследовании порядок аппроксимации не менялся, следовательно, приходилось увеличивать разрешение сетки. В качестве иллюстрации, к чему может привести недостаток сеточного разрешения, несмотря на успешное установление искомого поля, на рисунке 4 представлены варианты решения задачи на равномерной сетке при  $Re = 12\,500$ . Нетрудно заметить, что вариант (а) ( $257 \times 257$ ) качественно отличается от вариантов (б) ( $513 \times 513$ ), (в) ( $1\,025 \times 1\,025$ ) и (г) ( $513 \times 513$ ,  $O(h^4)$ ) [Erturk, 2009]. В варианте (а), в отличие от остальных, отсутствует пристенный вихрь  $TL_2$  и, наоборот, присутствует артефакт в виде правого нижнего пристенного вихря между вихрем  $BR_1$  и стенкой. К тому же конфигурации и размеры нижних угловых вихрей заметно отличаются от аналогичных вихрей на остальных трех фрагментах рисунка 4. Хотя на первый взгляд картина течения на фрагменте (а), если ее не сравнивать с остальными фрагментами, выглядит вполне правдоподобно. С другой стороны хорошее согласование картин течения на фрагментах (б), (в) и (г) говорит о достоверности полученных результатов, по крайней мере на качественном уровне.

Еще одна сложность, с которой сталкиваются исследователи при больших числах Рейнольдса, — это проблема установления (сходимости) решения. На рисунке 5 приведены кривые сходимости решения задачи при  $Re = 17\,500$  для различных равномерных сеток. Понятно, что наиболее желательные времена установления решения были достигнуты при вычислениях на сетке  $257 \times 257$  — 49.3 мин. Однако серьезные расхождения с работой [Erturk, Corke, Gokcol, 2005] в величинах параметров вихрей (до 30 %) и не совсем корректная, так же как и в варианте  $Re = 12\,500$  (см. рис. 4а), картина течения потребовали увеличения сеточного разбиения. Попытка решить задачу на сетке  $513 \times 513$  закончилась неудачей (пунктирная кривая 2 на рис. 5). В процессе итераций по слоям времени возникшие колебания таких параметров сходимости, как  $\|\text{div} \mathbf{V}^*\|_1$  и  $D_V$ , не имели общей тенденции к уменьшению, как это было на более грубой сетке  $257 \times 257$ . Для преодоления данной трудности — подавления осцилляций решения — в работе [Erturk, 2009] предложено повышать разрешения разностной сетки в силу зависимости сходимости решения от сеточного числа Рейнольдса —  $Re_h$ . По мнению автора, чем меньше  $Re_h$ , тем устойчивей сходится решение. Согласно данной рекомендации был просчитан вариант на сетке  $1\,025 \times 1\,025$ , решение которого в конечном счете установилось с заданной точностью (кривая 3 на рис. 5) за 52.0 часа.

Анализ полученных результатов удобно провести путем рассмотрения поля  $Re_h$ , построенного по модулю вектора скорости течения, отнесенного к центру разностной ячейки. На рисунке 6 представлены такие поля для всех трех рассмотренных выше расчетов с различными сеточными разбиениями с выделением пунктиром изолинии  $Re_h = 2$ . Поскольку для сетки  $513 \times 513$  не удалось установить решение, то поле  $Re_h$  на фрагменте (б) имеет условный смысл в силу условности неустановившегося поля скорости. Тем не менее можно утверждать, что на фрагментах (а) и (б) в нижних углах каверны имеются заметные участки течения, удовлетворяющие условию  $Re_h > 2$ , в то время как их там быть не должно, поскольку углы — область медленного течения под центральным циркуляционным ядром потока. А на фрагменте (в) подобный участок имеет место только в правом нижнем углу и он очень мал. Согласно [Erturk, 2009] эти участки можно трактовать как источники возмущений, генерирующих ошибки численного решения. С другой стороны, при построении приближенных решений СЛАУ также возникают ошибки, величина которых напрямую связана с числом обусловленности матрицы системы, которое, в свою очередь, зависит от количества уравнений решаемой СЛАУ. При фиксированном способе аппроксимации исходных дифференциальных уравнений величины и соотношение этих ошибок оказывают решающее влияние на процесс установления решения. В итоге возникают три ситуации, отраженные на рисунке 6: а) небольшое число обусловленности (количество уравнений СЛАУ порядка 65 тысяч) и большой участок угловых возмущений  $Re_h > 2$ ; б) возросшее число обусловленности (количество уравнений СЛАУ свыше четверти миллиона) и все еще большой участок  $Re_h > 2$ ; в) большое число обусловленности (количество уравнений СЛАУ порядка одного миллиона) и малый участок  $Re_h > 2$ . Проведенный вычислительный эксперимент показал, что условия а) и в) достаточно для обеспечения установления решения, а условия б) — нет.

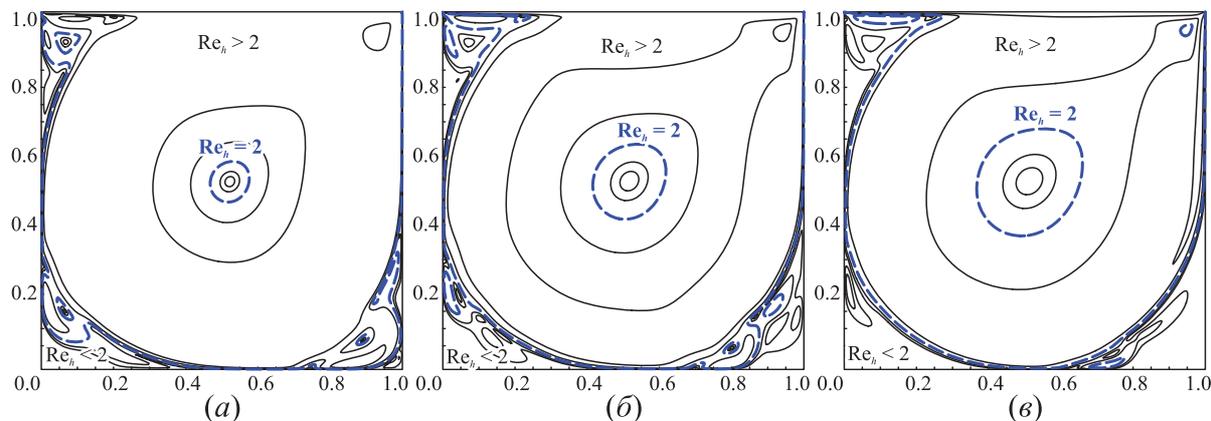


Рис. 6. Поля  $Re_h$  при  $Re = 17500$  для различных равномерных сеток: (а)  $257 \times 257$ ; (б)  $513 \times 513$ ; (в)  $1025 \times 1025$ .  $Re_h = 0.5, 1.0, 2.0$  (пунктир),  $4.0, 8.0$

В качестве иллюстрации возможностей разработанного алгоритма были решены задачи при  $Re = 15000$  на сетке  $2049 \times 2049$  как равномерной ( $k_G = 1$ ), так и неравномерной ( $k_G = 5$ ), а также при  $Re = 20000$  на неравномерной ( $k_G = 5$ ) сетке  $2049 \times 2049$ . Затраты машинного времени для  $Re = 15000$  составили 291 час для равномерной сетки и 684 часа для неравномерной, а для  $Re = 20000$  — 1157 часов.

Динамика установления (сходимости) решения для  $Re = 15000$ , выраженная в зависимостях от номера слоя по времени первой нормы вектора  $\text{div}V^*$  и выражения  $D_V$ , характеризующего темп изменения по времени поля скорости  $V$ , представлена в таблице 2. Здесь же приведены значения количества итераций  $k_p$ , понадобившихся для сходимости решений СЛАУ относительно поправки давления  $p'$ . Несмотря на большое количество уравнений в системе, значение  $k_p$  не превышает 50 для равномерной сетки и 60 для неравномерной в самые «напряженные» моменты

вычислений, имеющих место в районе максимальных величин  $\|\operatorname{div}\mathbf{V}^*\|_1$  и  $D_V$ . При этом решение СЛАУ для компонент скорости  $u^*$  и  $v^*$  сходилось в среднем за 2–3 итерации, а на начальных слоях по времени — не более чем за 11 итераций.

Таблица 2. Зависимости  $\|\operatorname{div}\mathbf{V}^*\|_1$ ,  $D_V$  и  $k_p$  от  $n$  при  $\operatorname{Re} = 15\,000$  (сетка  $2\,049 \times 2\,049$ )

$n$	$k_G = 1$			$k_G = 5$		
	$\ \operatorname{div}\mathbf{V}^*\ _1$	$D_V$	$k_p$	$\ \operatorname{div}\mathbf{V}^*\ _1$	$D_V$	$k_p$
1	$1.3060 \times 10^{-3}$	$2.7206 \times 10^{-3}$	47	$2.2790 \times 10^{-4}$	$6.0430 \times 10^{-8}$	38
5	$1.9030 \times 10^{-2}$	$2.8293 \times 10^{-2}$	43	$4.6870 \times 10^{-3}$	$7.5080 \times 10^{-7}$	46
9	$3.3840 \times 10^{-1}$	$8.7305 \times 10^{-2}$	42	$1.2600 \times 10^{-1}$	$1.5607 \times 10^{-5}$	58
15	$9.2250 \times 10^1$	$9.8797 \times 10^{-1}$	38	$1.7470 \times 10^1$	$1.5514 \times 10^{-3}$	45
31	$1.2140 \times 10^3$	$2.3040 \times 10^0$	41	$1.7740 \times 10^3$	$4.6290 \times 10^{-2}$	47
51	$7.9960 \times 10^2$	$1.6417 \times 10^0$	46	$5.6240 \times 10^3$	$7.9090 \times 10^{-2}$	51
108	$2.9900 \times 10^2$	$7.5077 \times 10^{-1}$	50	$4.8680 \times 10^3$	$6.9300 \times 10^{-2}$	33
292	$2.5580 \times 10^1$	$5.0333 \times 10^{-1}$	35	$2.4210 \times 10^3$	$1.1826 \times 10^0$	56
612	$8.8150 \times 10^{-1}$	$7.2773 \times 10^{-2}$	36	$9.2220 \times 10^2$	$8.6230 \times 10^{-1}$	40
1 285	$1.5510 \times 10^{-2}$	$8.1170 \times 10^{-3}$	27	$1.6840 \times 10^2$	$2.3986 \times 10^{-1}$	40
2 695	$2.2170 \times 10^{-3}$	$6.7537 \times 10^{-4}$	11	$8.8870 \times 10^0$	$1.9307 \times 10^{-1}$	32
7 237	$2.7990 \times 10^{-4}$	$1.3936 \times 10^{-4}$	15	$5.6070 \times 10^{-2}$	$2.6140 \times 10^{-3}$	30
9 263	$1.0800 \times 10^{-4}$	$7.1518 \times 10^{-5}$	7	$5.0030 \times 10^{-3}$	$2.3190 \times 10^{-4}$	30
15 177	$1.6820 \times 10^{-5}$	$1.1194 \times 10^{-5}$	21	$1.4450 \times 10^{-4}$	$8.0850 \times 10^{-6}$	21
19 034	$4.9980 \times 10^{-6}$	$3.3265 \times 10^{-6}$	7	$8.5870 \times 10^{-5}$	$2.4211 \times 10^{-4}$	9
24 866	–	–	–	$4.0530 \times 10^{-5}$	$1.1817 \times 10^{-4}$	12
32 743	–	–	–	$9.6320 \times 10^{-6}$	$4.9888 \times 10^{-5}$	29

На рисунке 7 приведены линии тока течения для  $\operatorname{Re} = 20\,000$ . Поскольку на общей картине (рис. 7а) практически не просматриваются вихри третьего и тем более четвертого уровней, они представлены на фрагментах (б) и (в) рисунка 7. Видно, что, несмотря на сильное увеличение масштаба, позволяющее в деталях разглядеть вихри третьего уровня, вихри четвертого уровня остаются едва различимыми. Такой результат хорошо согласуется с аналитическим решением [Moffatt, 1964], из которого, в частности, следует, что размеры рядом расположенных угловых вихрей разнятся на  $1 \div 1.5$  порядка.

Отличительной особенностью стационарного решения при  $\operatorname{Re} \geq 10\,000$  является наличие верхнего левого вихря второго уровня  $TL_2$ , который при  $\operatorname{Re} = 10\,000$  идентифицируется лишь косвенно по наличию «выпуклости» у линий тока, пролегающих рядом со стенкой [Rogers, Kwak, 1991; Barragy, Carey, 1997; Botella, Peyret, 1998; Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Erturk, 2009; Mishra, Sanyasiraju, 2012], а при  $\operatorname{Re} \geq 12\,500$  «проявляется» явно [Barragy, Carey, 1997; Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Erturk, 2009]. Еще одной особенностью решения при больших числах Рейнольдса является возникновение дополнительных критических точек в вихрях  $TL_1$  и  $BR_1$  в виде вторых центров вихрей и соответствующих седловых точек между двумя центрами вращения вихрей. Частично, поскольку в явном виде не обозначен второй центр вращения у  $BR_1$ , эта си-

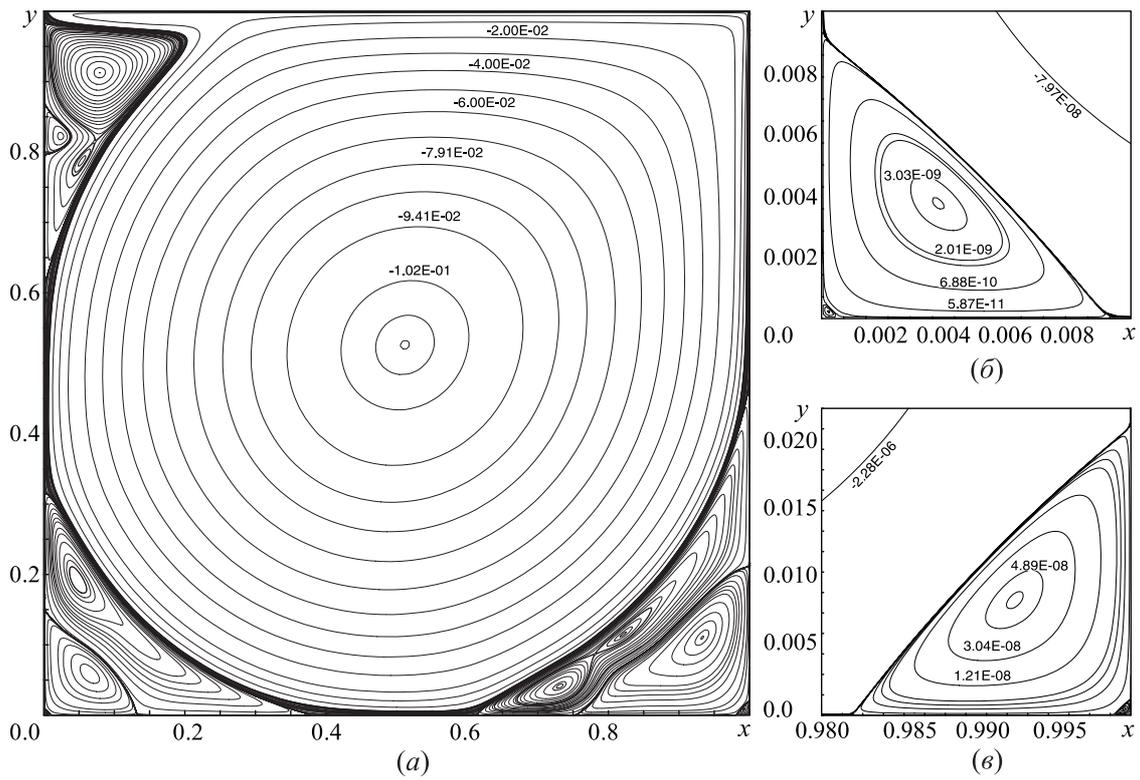


Рис. 7. Решение задачи при  $Re = 20\,000$  (сетка  $2\,049 \times 2\,049$ ,  $k_G = 5$ ): (а) общая картина течения; (б) вихри  $BL_3$  и  $BL_4$ ; (в) вихри  $BR_3$  и  $BR_4$

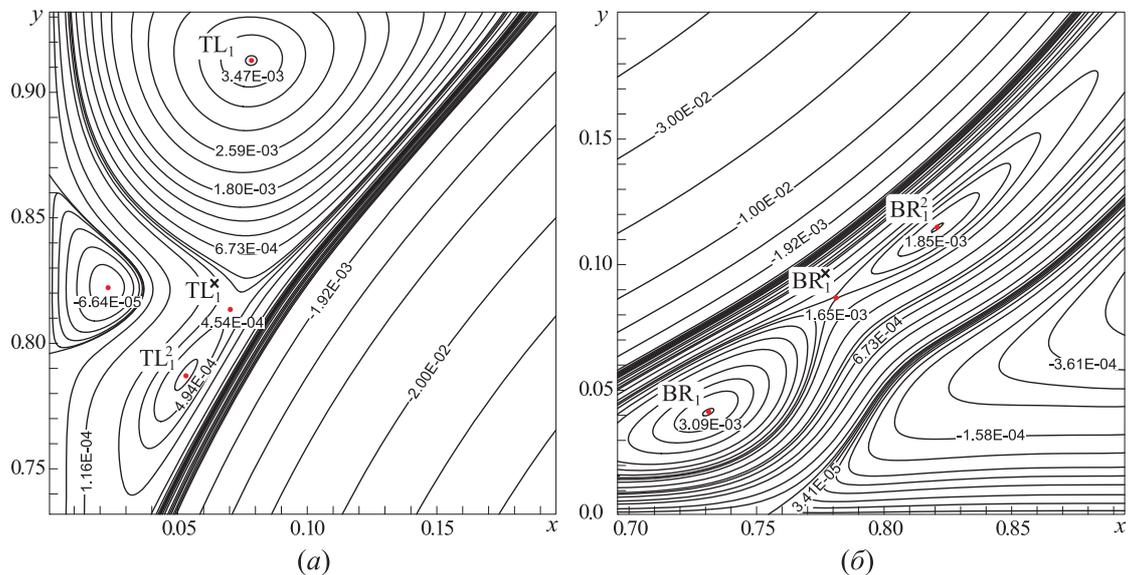


Рис. 8. Подробная картина течения при  $Re = 20\,000$  (сетка  $2\,049 \times 2\,049$ ,  $k_G = 5$ ) в районе вихрей первого уровня: (а) левого верхнего; (б) правого нижнего

туация обрисована в [Erturk, Corke, Gokcol, 2005; Erturk, 2009] начиная с  $Re = 17\,500$ , хотя по характерным изгибам линий тока можно допустить наличие таких же дополнительных критиче-

ских точек уже при  $Re = 15\,000$ . Соответственно на рисунке 8 представлена подробная картина течения в районах вихрей  $TL_1$  и  $BR_1$  ( $Re = 20\,000$ ,  $2\,049 \times 2\,049$ ,  $k_G = 5$ ), в которых вторичные центры вращения обозначены как  $TL_1^2$  и  $BR_1^2$ , а седловые точки — соответственно как  $TL_1^\times$  и  $BR_1^\times$ .

## Заключение

По результатам проведенного исследования можно сделать вывод о том, что неявный полинейный рекуррентный метод позволяет эффективно решать СЛАУ, возникающие при разностной аппроксимации уравнений динамики несжимаемой жидкости. Эта эффективность особенно важна при решении задачи Неймана для поправки давления, поскольку позволяет использовать подробное сеточное разбиение области, в том числе и неравномерное. Соответственно, только за счет подробных неравномерных сеток, не повышая порядок аппроксимации исходных уравнений, удается достаточно детально описать структуру течения в каверне для больших чисел Рейнольдса, вплоть до  $Re = 20\,000$ . Дальнейшее повышение эффективности алгоритма решения задачи, согласно результатам исследований других авторов, связано в первую очередь с повышением порядка разностной аппроксимации исходных дифференциальных уравнений постановки задачи.

## Список литературы

- Белоцерковский О. М., Гуцин В. А., Щенников В. В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости // ЖВМ и МФ. — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 197–207.
- Деги Д. В., Старченко А. В. Численное решение уравнений Навье–Стокса на компьютерах с параллельной архитектурой // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2012. — № 2. — С. 88–98.
- Исаев В. И., Шапеев В. П. Варианты метода коллкации и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнения Навье–Стокса // ЖВМ и МФ. — 2010. — Т. 50, № 10. — С. 1758–1770.
- Капитанова С. В., Окулова Н. Н. Математическое моделирование течения вязкой теплопроводной жидкости с использованием метода LS-STAG // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Естественные науки». — 2012. — С. 86–97.
- Кузнецов А. Е., Стрелец М. Х. Численное моделирование существенно дозвуковых стационарных неизотермических течений однородного вязкого газа в каналах // Численные методы механики сплошной среды. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983. — Т. 14, № 6. — С. 97–114.
- Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. — М.: Энергоатомиздат, 1984. — 152 с.
- Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
- Старченко А. В. Сравнительный анализ некоторых итерационных методов для численного решения пространственной краевой задачи для уравнений эллиптического типа // Вестник ТГУ. Бюллетень оперативной научной информации. — Томск: ТГУ, — 2003. — № 10. — С. 70–80.
- Фомина Л. Н. Использование полинейного рекуррентного метода с переменным параметром компенсации для решения разностных эллиптических уравнений // Вычислительные технологии. — 2009. — Т. 14, № 4. — С. 108–120.
- Фомин А. А., Фомина Л. Н. Ускорение полинейного рекуррентного метода в подпространствах Крылова // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2011. — № 2. — С. 45–54.

- Фомин А. А., Фомина Л. Н. Неявный итерационный полинейный рекуррентный метод решения разностных эллиптических уравнений. — Кемерово: КемГУ, 2012. — 314 с.
- Barragy E., Carey G. F. Stream function-vorticity driven cavity solution using p finite elements // Computers & Fluids. — 1997. — Vol. 26, No. 5. — P. 453–468.
- Botella O., Peyret R. Benchmark spectral results on the Lid-driven cavity flow // Computers & Fluids. — 1998. — Vol. 27, No. 4. — P. 421–433.
- Bruneau C-H., Saad M. The 2D lid-driven cavity problem revisited // Computers & Fluids. — 2006. — Vol. 35. — P. 326–348.
- Erturk E., Corke T. C., Gokcol C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2005. — Vol. 48. — P. 747–774.
- Erturk E. Discussions on driven cavity flow // Int. J. Numer. Meth. Fluids. — 2009. — Vol. 60. — P. 275–294.
- Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // Journal of Computational Physics. — 1982. — Vol. 48. — P. 387–411.
- Kumar D. S., Kumar K. S., Kumar M. D. A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method // Engin. Appl. of Comp. Fluid Mech. — 2009. — Vol. 3, No. 3. — P. 336–354.
- Mishra N., Sanyasiraju Y. V. S. S. Exponential compact higher order scheme for steady incompressible Navier–Stokes equations // Engin. Appl. of Comp. Fluid Mech. — 2012. — Vol. 6, No. 4. — P. 541–555.
- Moffatt N. K. Viscous eddies near a sharp corner // Archiwum Mechaniki Stosowanej. — 1964. — Vol. 2, No. 16. — P. 365–372.
- Rogers S. E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // Applied Numerical Mathematics. — 1991. — Vol. 8. — P. 43–64.
- Van der Vorst H. A. Bi-CGStab: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for solution of nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. — 1992. — Vol. 13, No. 2. — P. 631–644.
- Wright N. G. Multigrid solutions of elliptic fluid flow problems. — Ph. D. thesis. University of Leeds, 1988. — 185 p.