**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2015 Т. 7 № 1 С. 3−34**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 51-71,51-72,531.19

Согласование теории относительности, ЭПР-эффекта и неравенств Белла через индивидуальное состояние квантовой частицы

А. В. Коганов

НИИСИ РАН, Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский пр., 36, корп. 1
E-mail: koganow@niisi.msk.ru

*Получено 19 июня 2014 г.,
после доработки 24 ноября 2014 г.*

Рассматривается эффект Эйнштейна, Подольского, Розена в его связи с квантовой механикой и теорией относительности. Показано, что если ввести в квантовую механику понятие индивидуального состояния квантовой частицы в ансамбле, то можно устранить противоречие с теорией относительности, которое получило название дальнодействия между коррелированными частицами. В работе развит аппарат введения индивидуального состояния в формализм квантовой механики. Строится модель эффекта ЭПР, не содержащая противоречия. Анализируется общий механизм формирования законов теории вероятности в квантовой механике, примером которого является нарушение неравенств Белла для скрытых параметров.

Ключевые слова: эффект ЭПР, теория относительности, квантовая механика, неравенства Белла, эрмитов оператор, нелокальность

Agreement of Relation Theory and EPR Effect by individual state of quantum particle

A. V. Koganov

NIISI RAN (SRISA RAN), 36 Nakhimovsky st., corp. 1, Moscow, 117218, Russia

Abstract. — We consider effect of Einstein, Podolsky, Rosen in connection with quantum mechanic and relative theory. We sow that may introduce in quantum mechanic the individual state for quantum particle which eliminate the contradiction quantum mechanics with relative theory of type long-range action between correlated particles. In article we develop the apparatus for individual state introducing in quantum mechanic formalism and build the EPR effect model without contradictory. We describe the general mechanism of Bell inequalities infringement and analogical effects.

Keywords: EPR effect, relative theory, quantum mechanic, Schwarz space, Hermit operator, long-rang action

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 3–34 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00190а.

1. Введение

1.1. Содержательная постановка проблемы

Статья посвящена устранению логических противоречий, которые возникли внутри квантовой механики (КМ) и между ней и теорией относительности (ТО) после постановки экспериментов по проверки парадокса Эйнштейна–Подольского–Розана. Суть парадокса сводилась к опровержению принципа неопределенности в эксперименте с частицами, полученными путем деления одной частицы без диссипации, что означает выполнение законов сохранения энергии и импульса. Такие частицы называются коррелированными или запутанными. С точки зрения квантовой механики невозможно одновременное определение точной координаты и точного импульса частицы. Но если частицы получены указанным выше образом, то, измеряя у одной из них координату, а у другой — импульс, можно точно определить обе характеристики для обеих частиц. Это соображение Эйнштейн выдвигал в качестве возражения квантовой теории.

В последствии для КМ была принята теоретическая схема, исключающая точное выполнение законов сохранения в квантовых процессах. Тогда флуктуации энергии при рождении пары связанных частиц подтверждали принцип неопределенности. Однако эксперименты, поставленные в начале 2000-х годов, показали, что авторы ЭПР-парадокса были правы и регистрируется строгое выполнение законов сохранения. Это породило несколько противоречий в КМ и между КМ и ТО, кроме указанного ограничения на принцип неопределенности. Суть этих противоречий следующая. Если предположить, что разнесенные измерительные приборы, измеряющие пару запутанных частиц, не имеют связи в момент измерений, то получение строго согласованных значений измеряемого параметра имеют вероятность ноль с точки зрения КМ. Если же предположить, что в моменты измерений они имеют информационную связь, то при примерно одновременном измерении требуется передача информации со скоростью выше скорости света (вплоть до бесконечности при строгом совпадении моментов измерения). Это противоречит главному постулату ТО.

В этой статье автор предлагает модификацию математического аппарата КМ, которая устраняет эти противоречия. Основная идея состоит в предположении, что кроме ансамблевого состояния частицы, которое описывается волновой функцией, у частицы имеется еще и скрытая структура, названная индивидуальным состоянием частицы. Волновая функция определяет статистику результатов при каждом измерении, проводимом на многих частицах, находящихся в одинаковом ансамблевом состоянии. А индивидуальное состояние определяет однозначный результат измерения для данной отдельной частицы при взаимодействии с данным измерительным прибором. Такие схемы рассматривались и ранее. В частности, был развит аппарат скрытых параметров и неравенств Белла, который позволял проверить, несут ли на себе фотоны скрытые параметры при измерении поляризации. Идея скрытых параметров предписывала каждой частице определенное значение измеряемой величины (вектора поляризации), которая и измеряется прибором, оснащенным своим фильтром поляризации. Меняя поляризацию фильтра можно получить статистику, которая будет различна при наличии скрытых параметров или при формировании значения поляризации в момент измерения. Многократные эксперименты показали, что скрытых параметров нет. Именно этот эксперимент в сочетании с подтверждением ЭПР-парадокса привел автора к конструкции, когда вместо скрытого параметра частица оснащается скрытой структурой, взаимодействующей с измерительным прибором и формирующей значение измеряемого параметра в таком взаимодействии. При этом замена одного прибора другим (например, поворот фильтра поляризации) приводит к формированию нового значения, строго говоря, не имеющего однозначной связи с тем значением, которое было бы сформировано прежним прибором. Иными словами, индивидуальное состояние несет не значение измеряемой величины, а зависимость этого значения от прибора. Реализация этой программы потребовала развития нового математического аппарата, связанного с аксиоматикой моделью измерения в КМ. Но построенная теория позволила строго доказать, что в этом формализме можно реализовать любую квантовую статистику в системе раздельных измерений нескольких потоков частиц. В частности, это можно сделать для любой корреляции между частицами и для любой системы измерительных приборов, каждый из которых измеряет только один из потоков частиц. Следствием этой теоремы является строгое моделирование как ЭПР-экспериментов, так и измерений неравенств Белла без противоречий внутри и между теориями.

1.2. Математическая конструкция противоречия ЭПР эффекта в КМ и ТО

Рассматривается эффект Эйнштейна, Подольского, Розена (ЭПР) и его связь с квантовой механикой (КМ) и теорией относительности (ТО).

Схема эффекта ЭПР показана на рисунке 1 [Reid, 2009]. Частица из источника проходит через делитель и разделяется на две коррелированные частицы половинной энергии. Некоторый параметр M, для которого выполняется макроскопический закон сохранения, равен 0 для исходной частицы. Например, это может быть спин, импульс в плоскости ортогональной исходной траектории и т. п. Две частицы разлетаются на большое расстояние, после чего параметр M измеряется для каждой частицы отдельно. Эффект состоит в том, что сумма двух замеров детерминированно равна 0, хотя измерения квантовые. Исходя из стандартной интерпретации КМ, равенство нулю должно выполняться только статистически для усреднения по большому числу замеров.

Математическое описание этого противоречия можно сформулировать на языке теории вероятности. Работу несвязанных аппаратно двух измерительных приборов в квантовой механике можно интерпретировать как реализацию двух независимых бернуллиевских испытаний. В каждом из них происходит рандомизированный выбор собственного значения оператора измерения, соответствующего прибору. При этом вероятности выбора не вырождены в общем случае. Для такой пары процессов верно

Утверждение 1.1. Для двух независимых бернуллиевских испытаний x и y с вероятностями выбора состояния, отличными от единицы, с вероятностью единица между траекториями нет функциональной зависимости вида $y_i = f(x_i),\ \ i = 1,\dots$. Для доказательства от противного достаточно рассмотреть подпоследовательность испытаний, в которой фиксировано значение $x_{i'} = X$. В силу положительности вероятности этого значения такая подпоследовательность с вероятностью 1 бесконечная. Если есть функциональная зависимость, то для всех этих испытаний выполнено $y_{i'} = f(X) = Y$. Но поскольку вероятность состояния Y меньше 1, то такая траектория по закону больших чисел имеет вероятность 0.

Таким образом, эксперимент, в котором между двумя пространственно разнесенными одновременными квантовыми измерениями возникает функциональная зависимость, противоречит формализму квантовой механики, если признать отсутствие связи между приборами, или противоречит теории относительности, если признать мгновенную связь между приборами.

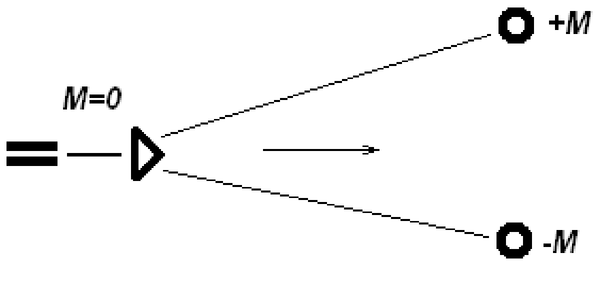

Рис. 1. Схема ЭПР-эффекта

1.3. Строгая постановка задачи

Для точной формулировки проблемы надо дать строгое математическое построение стандартной модели измерения в квантовой механике. Этот раздел изложен в максимальной общности, включая базирование КМ как на классической механике, так и на СТО и ОТО. Таким образом, предложенная ниже конструкция индивидуального состояния будет применима ко всем модификациям КМ. Для рассматриваемых экспериментов конфигурационное пространство, на котором задается волновая функция, совпадает с некоторой декартовой степенью пространства-времени.

В классическом построении квантовое состояние частицы определяется волновой функцией $\Psi = \Psi(t, x)$, где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\Psi(t,.) \in S(\mathbb{C}, \mathbb{R}^3) = L_2(\mathbb{C}, \mathbb{R}^3) \cap C_\infty \quad (1.1)$$

(пространство Шварца).

В релятивистской трактовке

$$(t, x) \in {}^1\mathbb{R}^3, \ \Psi(t,.)|_{x \in P} \in S(\mathbb{C}, P), \quad (1.2)$$

где P — любая из гиперповерхностей одновременности.

Обозначим это пространство функций $F(\mathbb{C}, M)$, где M — это область определения волновой функции. В классической физике пространство M задается как $M = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^3$ с раздельной метрикой Евклида на одномерной (время) и трехмерной (пространство) компонентах. Для СТО $M = {}^1\mathbb{R}^3$, а для ОТО это псевдориманово гладкое многообразие размерности 4. Для классической механики пространство $\mathbb{R}^3$ играет роль подпространства одновременности. В дальнейшем обозначение P распространяется и на этот случай.

Вероятностная интерпретация волновой функции требует, чтобы состояние при всех моментах времени t удовлетворяло условию нормировки на гиперповерхности одновременности наблюдателя:

$$\int_{x \in P} \Psi(t, x) \Psi^*(t, x) dx_1 dx_2 dx_3 = 1, \quad (1.3)$$

где звездочка означает комплексно-сопряженное значение функции Это условие позволяет дать вероятностную интерпретацию процессу квантовых измерений. Процесс любого измерения моделируется некоторым эрмитовым оператором $H : \Lambda_2 \to \Lambda_2$ на расширении Λ_2 пространства $F(\mathbb{C}, M)$ линейными функционалами (обобщенными функциями). На этом пространстве эрмитов оператор имеет полный набор собственных функций, содержащий хотя бы один базис для пространства функций $F(\mathbb{C}, M)$. Если этот базис $\varphi_1, \dots$ счетный (дискретный спектр оператора), то для некоторой числовой последовательности $a_1, \dots$ имеет место представление волновой функции:

$$\Psi(t,.) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i. \quad (1.4)$$

Если базис φ_s, $s \in U$, континуальный (непрерывный спектр оператора), то для некоторой меры $\alpha(ds)$ имеет место интегральное представление волновой функции:

$$\Psi(t,.) = \int_{s \in U} \varphi_s \alpha(ds) = \int_{s \in U} \varphi_s \alpha(s) ds. \quad (1.5)$$

Параметр s можно выбрать непрерывным, и мера имеет плотность.

Если базис ортонормирован, то из нормировки (1.3) следует нормировка коэффициентов разложения:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i a_i^* = 1, \quad (1.6)$$

$$\int\limits_{s\in U} \alpha(s)\alpha^*(s)ds = 1\,. \tag{1.7}$$

Каждому собственному вектору φ (в общем случае это обобщенная функция) по определению соответствует собственное числовое действительное значение λ по формуле $H\varphi = \lambda\varphi$. Это значение интерпретируется как значение однократного измерения на одной частице. Модель измерения сопоставляет большому числу измерений на независимых друг от друга частицах, находящихся в одном квантовом состоянии Ψ, и измерению H среднее значение, равное (в зависимости от типа спектра)

$$h_{\Psi,H} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i a_i^*\,, \tag{1.8}$$

$$h_{\Psi,H} = \int\limits_{s\in U} \lambda_s \left|\alpha(ds)\right|^2 = \int\limits_{s\in U} \lambda_s \alpha(s)\alpha^*(s)ds\,. \tag{1.9}$$

Это среднее значение интерпретируется как усреднение случайных результатов однократных измерений на отдельных частицах. Нормировка (1.3), (1.6), (1.7) позволяет считать, что значение λ_i (или λ_s) возникает в таком процессе с частотой (вероятностью) $a_i a_i^*$ или с плотностью вероятности $\alpha(s)\alpha^*(s)$ соответственно. Но, строго говоря, это независимая аксиома, задающая эмпирическую интерпретацию формализму волновой функции и операторного измерения. Именно эта интерпретация делает ЭПР-эффект несовместимым с постулатами СТО. Дело в том, что измерение связывается с работой макроскопического измерительного прибора, который имеет пространственную локализацию. Поэтому никакая мгновенная синхронизация работы двух взаимно удаленных приборов в ТО невозможна, если только нет третьего процесса, сигнал от которого одновременно для наблюдателя достигает обоих приборов и интерпретируется ими как сигнал синхронизации. А в ЭПР-эффекте два удаленных детектора, измеряющих некоторый параметр двух коррелированных частиц, одновременно выбирают такие собственные функции, собственные значение которых обеспечивают выполнение закона сохранения измеряемой величины (импульса, момента и т. п.). *При этом в соответствии со стандартной интерпретацией выбор собственного значения в каждом приборе производится независимо и случайно*.

Для устранения этого противоречия необходимо предположить, что в момент рождения пары коррелированных частиц вырабатывается еще и сигнал, обеспечивающий синхронизацию измерительных приборов. Дело усложняется тем, что для каждого параметра, для которого действует закон сохранения, должен быть такой сигнал, поскольку в момент рождения частиц неизвестно, какое измерение им предстоит. Но у разных измерений в общем случае разные собственные базисы.

Если не менять основы теории относительности, то единственный выход из этого положения — ввести дополнительную компоненту состояния квантовой частицы, которая указывает любому оператору измерения, какую собственную функцию надо использовать для данной частицы. Волновая функция при этом указывает на вероятностные свойства такой компоненты в большом ансамбле однотипных частиц [Блохинцев, 1961].

Подход, в котором некоторые параметры квантовой частицы (спин и заряд) имеют скрытую детерминированную топологическую структуру, развит, например, в работе [Rybakov, Kamalov, 2007]. Но устранение противоречия требует конструкции, применимой для произвольных измеримых характеристик квантовых процессов, которая формирует зависимость результата измерения от оператора измерения с учетом времени и граничных условий измерения.

В настоящее время известно несколько альтернативных подходов к моделированию запутанных частиц. В большинстве случаев строятся теоретические каналы связи, которые могут обеспечить сколь угодно быстрый обмен информацией между частицами в дополнительных пространственно-временных зонах «в обход» основного пространства-времени. Таким способом «устраняется» противоречие с теорией относительности. Кратко приведем основные идеи таких конструкций. Теория Хью Эверетта объясняет вероятностные свойства квантовых процессов случайным блужданием частиц и приборов по параллельным Мирам. Дополнительно предполагается, что между Мирами, в которых находятся запутанные частицы, существует особый канал внепространственной связи, для которого нет ограничения скорости. В другой конструкции, базированной на ОТО, предполагается наличие топологической кротовой норы, соединяющей пару запутанных частиц. Метрика этой топологической ручки (мостика) обеспечивает короткий путь между частицами, независимо от расстояния между ними в основном пространстве. Третий круг идей предполагает возможность порождения процессов, имеющих обратную причинность во времени (опережающее влияние). Пара коррелированных частиц связана таким процессом, и результат измерения одной частицы влияет в прошлом на скрытый параметр ее партнера, который формирует результат второго измерения. Четвертый подход предполагает голографическую структуру пространства-времени, в которой каждая точка несет информацию обо всех других точках. Коррелированные частицы умеют считывать эту информацию друг о друге. Данный краткий обзор идей не претендует на полноту и строгость изложения. Поэтому автор принял решение не давать ссылок на конкретные работы, тем более что некоторые идеи сформулированы как обобщение нескольких материалов разных авторов. Полноценный обзор требует статьи и библиографии, которые превосходят по объему данную работу. Надо отметить, что многие исследователи считают излишним специальное объяснение явления запутанности, кроме формализма квантовой механики [Гриб, 1984].

В настоящей статье предлагается модель, объясняющая явление квантовой запутанности без построения дополнительных каналов связи. Вместо этого предполагается наличие индивидуальной структуры у каждой квантовой частицы, детерминирующей взаимодействие с любым процессом измерения.

Развитию этого формализма, различные аспекты которого описаны в [Коганов, 2012, 2013, 2014], посвящена данная работа. Необходимые сведения из квантовой теории содержатся, например, в [Boom, 1951; Блохинцев, 1961]. В первых разделах статьи даются полное математическое описание формализма индивидуального состояния и связь с известными экспериментами проверки неравенств Белла и эффекта ЭПР. Потом строится квазиконструктивная математическая модель индивидуального состояния, исследуются ее свойства и условия стационарности квантового ансамбля.

1.4. Структура статьи и результаты

Статья состоит из трех частей. Разделы статьи имеют сквозную нумерацию, которая не зависит от номера части. Каждая часть начинается с краткого предисловия, где излагаются основные результаты.

В части 1 вводится основная конструкция индивидуального состояния, рассматривается коллектив независимых операторов измерения на потоках коррелированных частиц, доказываются теоремы о возможности моделирования квантовой статистики таких коллективных измерений в формализме индивидуальных состояний.

В части 2 рассматривается модель передачи кванта по волноводу с диссипацией. Именно так ставятся ЭПР-эксперименты с передачей коррелированной пары фотонов по двум оптоволоконным кабелям. Строится теория, которая объясняет, почему в таком процессе с большой вероятностью не теряется запутанность частиц. В предлагаемой модели рассмотрена модификация уравнения Шрёдингера, содержащая трение как фактор диссипации в волноводе.

В части 3 предпринимается попытка (квази)конструктивного построения оператора индивидуального состояния. Показано, что это можно точно сделать для операторов измерения с дискретным спектром. Для непрерывного спектра измерений в предложенном подходе приходится предполагать конечную погрешность измерения, как дополнительную характеристику оператора измерения. Там же рассмотрены требование стационарности волновой функции в многократном квантовом эксперименте и связь этого свойства с теорией относительности.

Большинство результатов из частей 1 и 2 были опубликованы в отдельных статьях [Коганов, 2012, 2013; Koganov, 2013, 2014]. Полная публикация с доказательствами теорем и утверждений производится впервые. Материал части 3 в основном публикуется впервые (частично в [Koganov, 2014]).

Часть 3 непосредственно математически связана с разделом 2 части 1. Кроме того, разделы 3–5 части 1 могут рассматриваться как описание области применения аппарата части 3. Часть 2 связана с частью 1 только в постановке задачи и в интерпретации основного результата. Но она необходима в качестве обоснования предлагаемой модели экспериментов ЭПР-эффекта и неравенств Белла.

Часть 1

В этой части статьи будет построен формализм индивидуального состояния квантовой частицы. С его помощью построены модели парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена и нарушения неравенств Белла. Эти модели не содержат противоречий как внутри квантовой механики, так и с теорией относительности (как специальной, так и общей).

В разделе 2 дается общее математическое определение индивидуального состояния квантовой частицы как оператора, который действует на пространстве эрмитовых операторов над пространством Гильберта. Каждому оператору Эрмита соответствует некоторое измерение на ансамбле частиц, состояние которого определяется волновой функцией. Оператор индивидуального состояния сопоставляет каждому такому измерению строго одну его собственную функцию. Таким образом, индивидуальное состояние детерминирует результат каждого квантового измерения на одной частице. Но при этом он может сопоставить разные значения разным операторам, измеряющим одну и ту же характеристику частицы. Например, если измеряется координата или импульс в разные моменты времени либо измеряется поляризация на разных фильтрах, могут генерироваться разные значения измеряемой величины. Связь индивидуального и ансамблевого состояний состоит в требовании выполнения обычной квантовой статистики измерений при каждом операторе измерения в потоке частиц, имеющих общее ансамблевое состояние. Различные операторы индивидуального состояния задают разные собственные функции операторов измерений. Но каждое индивидуальное состояние задает некоторое чистое состояние и собственное значение для каждого измерения. После любого взаимодействия, меняющего гамильтониан частицы, частица меняет и свое индивидуальное состояние.

В разделе 3 рассмотрен случай совместных измерений на одной частице несколькими операторами, которые коммутируют. Показано, что из аксиоматики раздела 2 постулат о реализации общего собственного вектора для всех этих операторов выводится как теорема.

В разделе 4 рассмотрен случай измерения коллектива частиц набором операторов в предположении, что каждая из частиц измеряется своим оператором. Ансамблевое состояние коллектива произвольное, что означает возможность любых корреляций между координатами частиц. Показано, что если каждый оператор реагирует только на координаты своей частицы (в строго определенном смысле), то в результате измерения будет получено некоррелированное состояние коллектива, однако числовой результат измерения будет в общем случае зависеть от запутанности. Именно такая ситуация возникает в эксперименте ЭПР-парадокса.

В разделе 5 рассмотрена общая модель эксперимента с несколькими потоками запутанных частиц со стационарной волновой функцией. Доказано, что для любой совместной волновой функции существует такое распределение индивидуальных состояний по частицам, что частотная статистика измерений в пределе совпадет с теоретической квантовой статистикой для этой ситуации. Это специальное обобщение теоремы Колмогорова о существовании случайного процесса для согласованных конечномерных распределений вероятности.

В разделе 6 теорема раздела 5 применяется для объяснения ЭПР-парадокса. В этой модели при рождении запутанной пары частиц каждая из них получает свое индивидуальное состояние, согласованное с индивидуальным состоянием партнера. Это позволяет детерминированно обеспечить выполнение всех законов сохранения без противоречий с КМ и ТО.

В разделе 7 рассмотрено обобщение модели раздела 5. В новой модели приборы, измеряющие каждый из потоков частиц, могут меняться от измерения к измерению. Доказано, что если появление каждой группы приборов будет иметь предельную частоту во времени, то верна теорема, аналогичная теореме раздела 5. Это позволяет объяснить нарушение неравенств Белла в соответствующих экспериментах. Таким образом, аппарат индивидуальных состояний дает объяснения таким эффектам, которые противоречат конструкции скрытых параметров. Дается подробный разбор обеих конструкций.

В разделе 8 содержательно обсуждаются указанные результаты.

2. Разделение индивидуального и ансамблевого состояния квантовой частицы

Обозначим E множество эрмитовых операторов на классе функций $F(\mathbb{C},M)=F$. Для каждого оператора $H\in\mathrm{E}$ индивидуальная компонента состояния частицы должна указывать одну собственную функцию. Волновая функция частицы указывает на эволюцию статистических свойств ансамбля, в котором рассматривается данная частица, и поэтому может интерпретироваться как компонента состояния ансамбля.

Определение 2.1. Индивидуальное состояние квантовой частицы определим как функтор вида

$$\Phi:\mathrm{E}\to\Lambda_2(\mathbb{C},M),$$

причем каждый эрмитов оператор отображается в одну из своих собственных функций, возможно, из класса обобщенных функций:

$$H\in\mathrm{E} \quad\Rightarrow\quad \exists\lambda\,|\!\in\mathbb{R},\, H\Phi(H)=\lambda\Phi(H), \tag{2.1}$$

Содержательно это означает, что индивидуальное состояние частицы Φ сопоставляет каждому оператору измерения H ровно одну его собственную функцию $\Phi(H)$, а соответствующее ей собственное значение $\lambda=\lambda(\Phi(H))$ является результатом измерения данной частицы на данном измерительном приборе. Таким образом, если известно индивидуальное состояние Φ, то точно известно значение λ любого измерения, которое можно произвести над данной частицей.

Обозначим это значение как $\lambda=\lambda(H\,|\,\Phi)$ и назовем его компонентой индивидуального состояния, который соответствует оператору H. С точки зрения квантовой механики это означает принципиальную неизмеримость индивидуального состояния как оператора. Но при этом можно измерить любую его компоненту. Для этого надо применить к частице физический процесс измерения, который соответствует данному оператору, и зарегистрировать полученное значение. После этого безвозвратно изменятся и ансамблевое, и индивидуальное состояния частицы и измерение какой-либо другой компоненты прежнего индивидуального состояния станет невозможным. Под ансамблевым состоянием подразумевается волновая функция, характеризующая все статистические свойства ансамбля частиц, находящихся в этом состоянии. Такие характеристики квантовых частиц нужно выделить в отдельный класс.

Определение 2.2. Характеристика частицы называется *альтернативно измеримой*, если она состоит из некоторого набора числовых элементов, возможно бесконечного, значение каждого из которых можно измерить, но при этом необратимо теряется возможность измерить значения всех остальных элементов.

Индивидуальное состояние частицы является альтернативно измеримым. Связь между индивидуальным и ансамблевым состоянием частицы определяется вероятностной интерпретацией волновой функции. Пусть оператор измерения $H\in\mathrm{E}$ имеет дискретный спектр, а волновая функция имеет разложение (1.4) в собственном базисе оператора. Тогда вероятность измерить частицу, для которой измерение дает значение λ_i, равна $a_i a_i^*$. Если оператор измерения имеет непрерывный спектр, а волновая функция описывается разложением (1.5), то плотность вероятности для такого индивидуального состояния, которое даст значение измерения λ_s, равна в ансамбле частиц $\alpha(s)\alpha^*(s)$. Таким образом, волновая функция задает статистику индивидуальных состояний в ансамбле. Если обозначить m_H измерение, соответствующее оператору H, которое применяется к состоянию частицы, $s(\lambda)$ — значение параметра спектра, который соответствует собственному значению λ, то для плотности вероятности верна формула

$$p\{m_H(\Psi,\Phi)=\lambda\}=(\Psi,\varphi_{s(\lambda)})(\Psi,\varphi_{s(\lambda)})^*. \tag{2.2}$$

Для дискретного спектра эта плотность атомарная и имеет вид

$$P\{m_H(\Psi,\Phi)=\lambda_i\}=(\Psi,\varphi_i)(\Psi,\varphi_i)^*. \tag{2.3}$$

Скалярное произведение функций понимается в обычном смысле как ковариация. Для обобщенных функций из базисов в случае непрерывного спектра оператора под скалярным произведением понимается применение этой обобщенной функции к волновой функции. Поскольку каждая обобщенная функция может быть получена как предел сверток с некоторой последовательностью обычных функций из пространства Гильберта, то скалярное произведение обобщенного собственного вектора с волновой функцией можно рассмотреть как предел таких сверток. Рассматриваются только ортонормированные собственные базисы. В случае обобщенного собственного базиса это означает, что последовательности, определяющие разные собственные векторы, асимптотически ортогональны и нормированы.

3. Совместные измерения с коммутирующими операторами

В квантовой механике допускаются одновременные измерения параметров, операторы которых имеют одинаковый собственный базис. При этом предполагается, что все измерения соответствуют одному собственному («чистому») состоянию. По сути, это независимый постулат квантовой теории. Формально в этом случае конструкция индивидуального состояния частицы должна быть иной. Компоненты индивидуального состояния в некоторых комбинациях оказываются одновременно измеримыми, в то время как в изложенной выше модели такие компоненты измеримы только альтернативно.

Эта ситуация разрешается соглашением о том, что если несколько эрмитовых операторов имеют одинаковый собственный базис, то соответствующие измерения, производимые над одной частицей одновременно, образуют новый оператор измерения, отличный от всех, его составляющих. Этот оператор назовем совместимой композицией исходных операторов, а соответствующее измерение назовем совместимой композицией измерений. Фактически это новая форма того же постулата.

Поскольку у всех операторов совместимой композиции общий собственный базис, то индивидуальное состояние частицы для этого измерения выделяет один собственный вектор. Он никак не связан с теми собственными векторами, которые выделяются индивидуальным состоянием для каждого из операторов, образующих совместимую композицию. Причем собственные векторы, которые выделяются индивидуальным состоянием для отдельных операторов, а также для различных подмножеств операторов исходной композиции, не связаны друг с другом. Их объединяют только статистические законы (2.2), (2.3) для ансамблей частиц. Каждый из операторов совместимой композиции выдает свое собственное значение для общего выделенного вектора. Набор этих собственных значений образует кортеж или вектор результатов измерений совместимой композиции. Если композиция имеет вид кортежа $\langle H_1,\ldots,H_N\rangle$, то кортеж результатов измерений определен как

$$\vec{\lambda}=\left\langle \lambda_{H_1}\left(\langle H_1,\ldots,H_N\rangle \mid \Phi\right),\ldots,\lambda_{H_N}\left(\langle H_1,\ldots,H_N\rangle \mid \Phi\right)\right\rangle. \tag{3.1}$$

Эта формула определена только тогда, когда операторы композиции коммутируют, т. е. имеют общий собственный базис. Иначе не определен вектор $\Phi\left(\left\langle H_1,\ldots,H_N\right\rangle\right)$.

Однако оказывается, тот же статистический результат дает модель, в которой коммутирующие операторы измерения применяются к частице последовательно в любом порядке. Это следует из условия согласования (2.2), (2.3). Докажем это.

Замечание 3.1. Если ансамблевое состояние Ψ является собственной функцией оператора измерения H, то $\Phi(H)=\Psi$ с вероятностью 1. Этот факт непосредственно следует из (2.2), (2.3) и указывает на очень сильную зависимость статистики распределения индивидуальных состояний по частицам ансамбля от их общего ансамблевого состояния.

Условие согласования для коммутирующих операторов $H_1,\ldots,H_n$ при одновременных измерениях на одной частице означает следующее. Эти измерения соответствуют объединенному оператору $\left\lfloor H_1,\ldots,H_n\right\rfloor$, который имеет тот же собственный базис, что и все операторы $H_1,\ldots,H_n$, и

$$H_i\Phi\left(\left\lfloor H_1,\ldots,H_n\right\rfloor\right)=\lambda(i)\Phi\left(\left\lfloor H_1,\ldots,H_n\right\rfloor\right). \tag{3.2}$$

Вектор

$$\left(\lambda(1),\ldots,\lambda(n)\right) \tag{3.3}$$

определяет результат измерения.

Этот постулат может быть доказан как теорема, если предположить модель последовательного измерения частицы этими детекторами:

$$act\left\lfloor H_1,\ldots,H_n\right\rfloor\circ\theta=actH_n\circ\ldots\circ actH_1\circ\theta, \tag{3.4}$$

где $actH$ интерпретируется как взаимодействие между детектором и индивидуальным состоянием частицы по формуле

$$actH\circ\theta=_{def}\Phi[\theta](H). \tag{3.5}$$

Тогда после действия H_1 на частицу θ ансамблевое состояние преобразуется в собственную функцию $actH_1\circ\theta=\Phi[\theta](H_1)$ для всех остальных операторов $H_2,\ldots,H_n$. И по определению 2.1 это ансамблевое состояние сохранится при всех последующих актах измерения этими операторами с вероятностью 1. Таким образом, доказано следующее.

Теорема 3.1. При последовательных измерениях одной частицы несколькими коммутирующими операторами все эти операторы выберут один и тот же собственный вектор.

4. Соответствие области определения функций оператору измерения

Каждая волновая функция определена на всем пространстве M, линейная структура которого совпадает с действительным пространством $\mathbb{R}^4$. Однако для случая нескольких измерений проводимых на различных частицах в одном процессе, и не обязательно одновременно, этот формализм нуждается в модификации. В этом случае частицы описываются одной общей волновой функцией на пространстве координат всех частиц, включая и разные координаты времени. Набор частиц, который описывается единой волновой функцией, назовем коллективом. Смысл этой функции, как и в случае одной частицы, заключен в определении плотности вероятности для различных конфигураций частиц коллектива в пространстве-времени. Эта вероятность проявляется при многократном измерении конфигураций коллективов, когда все коллективы находятся в идентичных квантовых состояниях, т. е. описываются одной волновой функцией. Иными словами, для описания измерений на коллективе частиц требуется все операторы измерений переопределить для волновой функции с расширенной областью определения, включающей координаты всех частиц коллектива. При этом интерпретацией вероятностных соотношений будет статистика стационарного ансамбля коллективов.

Перейдем к формализму. Рассмотрим коллектив, состоящий из N частиц и подчиняющийся волновой функции

$$\Psi\left(t_1,\ldots,t_N;x_1^1,x_1^2,x_1^3;\ldots;x_N^1,x_N^2,x_N^3\right)=\Psi\left(\vec{t};\overrightarrow{x_1};\ldots;\overrightarrow{x_N}\right). \tag{4.1}$$

Нормировка этой функции задается на совокупности гиперповерхностей одновременности $P_i(t_i)$, $i=1,\ldots,N$, каждая из которых соответствует моменту t_i в системе отсчета наблюдателя и мировой линии измерительного прибора для этой частицы в момент измерения t_i в пространстве $\left\langle t_i,x_i^1,x_i^2,x_i^3\right\rangle$. Каждое такое пространство, изоморфное M, является подпространством области определения волновой функции. Эта область, в свою очередь, диффеоморфна M^N.

При этом нормировка требуется для всех возможных мировых линий измерительных приборов (соответственно, для всех наборов $P_1(t_1),\ldots,P_N(t_N)$ гиперповерхностей одновременности) при каждом наборе моментов измерения.

$$\int\limits_{P_1(t_1)\times\ldots\times P_N(t_N)}\Psi\Psi^*\,|_{t_1,\ldots,t_N}\;dP_1\wedge\ldots\wedge dP_N=1. \tag{4.2}$$

Рассмотрим модификацию операторов измерения при переходе от волновой функции частицы к волновой функции коллектива частиц. Схема модификации следующая. Если оператор H действует на функцию $f(x)$ некоторого аргумента x, то его можно рассмотреть как оператор, действующий на функцию $q(x,y)$ двух аргументов, один из которых совпадает с исходным аргументом, а другой произволен и воспринимается как параметр. Множества значений этих аргументов обозначим соответственно как X и Y. Если определен оператор

$$H\circ f(x)=g(x)\,,$$

то можно определить и оператор

$$H^+\circ q(x,y)=_{def}H\circ(q(x,y)\,|\,y\text{ fixed})=Q(x)\,|_y=G(x,y). \tag{4.3}$$

В этой формуле справа стоят обозначения результирующих функций в параметрической форме Q и в виде зависимости G от двух «равноправных» аргументов. Такой оператор назовем параметрически расширенным по отношению к исходному. Он действует как исходный оператор на функцию, полученную из функции двух аргументов путем фиксации значения второго аргумента.

Поскольку второй аргумент произволен и может быть, в частности, кортежем из нескольких переменных, то данный метод позволяет произвольным образом поднимать размерность области определения функций, на которых определен заданный оператор. В частности, если имеется оператор измерения для одной частицы, то он будет определен и как оператор, действующий на волновую функцию коллектива частиц. Собственная функция для параметрического расширения оператора определена уравнением

$$H^+\circ\varphi(x,y)=\lambda\varphi(x,y). \tag{4.4}$$

При измерении кортежем операторов $\left[H_1,\ldots,H_N\right]$ вектор результатов $\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_N\right)$ для общей собственной функции $\varphi\left(t_1,\ldots,t_N,\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N}\right)$ определяется условием

$$H_i^+\circ\varphi(\vec{t},\vec{x})=\lambda_i\varphi(\vec{t},\vec{x}),\quad i=\overline{1,N}. \tag{4.5}$$

Собственные значения у разных операторов кортежа могут быть различными.

Если измеряются несколько (N) потоков частиц, то у них имеется коллективная волновая функция $\Psi(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N} \mid t_1,\ldots,t_N) =_{mark} \Psi\left(\vec{x} \mid \vec{t}\right)$ — совместная амплитуда вероятности для коллектива из N частиц. $\overrightarrow{x_i} = \left(x_i^1, x_i^2, x_i^3\right)$ — вектор положения одной частицы из потока с номером i; t_i — момент времени для измерения частицы из потока с номером $i = \overline{1,N}$. Нормировка волновой функции имеется при любом фиксированном наборе моментов измерения по формуле (4.2):

$$\int\limits_{P_1(t_1)\times\ldots\times P_N(t_N)} \left|\Psi(\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N} \mid t_1,\ldots,t_N)\right|^2 dx_1^1 \wedge \ldots \wedge dx_N^3 = 1. \tag{4.6}$$

Каждый оператор измерения H_i на i-м потоке определен изначально на своем пространстве волновых функций:

$$\Xi_i = L_2\left(\left\langle\overrightarrow{x_i}\right\rangle,\mathbb{C}\right) \cap C_2\left(\left\langle\overrightarrow{x_i}\right\rangle,\mathbb{C}\right) \cong L_2\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}\right) \cap C_2\left(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}\right). \tag{4.7}$$

В композиции операторов, измеряющих частицы совместно рассматриваемых потоков, необходимо построить соответственные операторы H_i^*, определенные на общем конфигурационном пространстве:

$$\Xi = L_2\left(\left\langle\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N}\right\rangle,\mathbb{C}\right) \cap C_2\left(\left\langle\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N}\right\rangle,\mathbb{C}\right) \cong L_2\left(\mathbb{R}^{3N},\mathbb{C}\right) \cap C_2\left(\mathbb{R}^{3N},\mathbb{C}\right). \tag{4.8}$$

Обозначим $\overrightarrow{x_{(i)}}$ набор переменных $x_1^1,\ldots,x_N^3$, из которого убраны переменные x_i^1, x_i^2, x_i^3. Запись $f(x \mid y) = f(x,y)$ означает, что переменная y фиксирована как параметр и функция f рассматривается от одного переменного x.

Лемма 4.1. Требование согласования композиции операторов (4.5) означает, что нормированная собственная функция композиции может быть описана как

$$\varphi_{\vec{s}}(\vec{x}) = \varphi_{s_1,\ldots,s_N}(\vec{x}) = \zeta\varphi_{s_1}(\overrightarrow{x_1})\ldots\varphi_{s_N}(\overrightarrow{x_N}) = \zeta\prod_{i=1}^{N}\varphi_{s_i}(\overrightarrow{x_i}), \tag{4.9}$$

где

$$\zeta \in \mathbb{C}, \quad |\zeta| = 1, \ \zeta = \zeta(s_1,\ldots,s_N).$$
$$\left\|\varphi_{s_i}\right\| = 1, \quad i = \overline{1,N}.$$

Доказательство. Пусть f — собственная функция композиции $\langle H_1,\ldots,H_N\rangle =_{def} H$, тогда по (4.5)

$$f(\vec{x} \mid \vec{t}) = \varphi_{s(\overrightarrow{x_{(1)}},\vec{t})}\left(\overrightarrow{x_1}\right) g_1\left(\overrightarrow{x_{(1)}}\right) =$$
$$= \varphi_{s(\overrightarrow{x_{(2)}},\vec{t})}\left(\overrightarrow{x_2}\right) g_2\left(\overrightarrow{x_{(2)}}\right) =$$
$$= \varphi_{s(\overrightarrow{x_{(2)}},\vec{t})}\left(\overrightarrow{x_2}\right)\varphi_{s(\overrightarrow{x_{(1)}},\vec{t})}\left(\overrightarrow{x_1}\right) g_{1,2}\left(\overrightarrow{x_{(1,2)}}\right) = \ldots =$$
$$= \varphi_{s(\overrightarrow{x_{(N)}},\vec{t})}\left(\overrightarrow{x_N}\right)\cdot\ldots\cdot\varphi_{s(\overrightarrow{x_{(1)}},\vec{t})}\left(\overrightarrow{x_1}\right) g_{1,\ldots,N}\left(\overrightarrow{x_{(1,\ldots N)}}\right).$$
$$g_{1,\ldots,N}\left(\overrightarrow{x_{(1,\ldots N)}}\right) = g_{1,\ldots,N}\left(\varnothing\right) = \zeta \in \mathbb{C}.$$

Остальные равенства следуют из условия нормировки базиса каждого оператора в композиции и из нормировки результирующей собственной функции композиции. Поскольку каждый из сомножителей в выражении (4.9) зависит от своей уникальной совокупности аргументов, то разным набором индексов $s_1,\ldots,s_N$ соответствуют разные собственные функции. □

Из леммы 4.1 можно вычислить собственные значения оператора композиции для полученных собственных функций

$$H\varphi_{s_1,\ldots,s_N} = \lambda_{s_1,\ldots,s_N}\varphi_{s_1,\ldots,s_N},$$
$$\lambda_{s_1,\ldots,s_N} = \lambda_{s_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{s_N}. \tag{4.10}$$

Это общая формула спектра композиции операторов измерения на коллективе частиц. Формула (4.9) означает, что результатом измерения всегда будет коллектив некоррелированных частиц независимо от корреляций между исходными частицами коллектива в совместной волновой функции (4.1). Физически это соответствует отсутствию взаимного влияния измерительных приборов друг на друга. Поэтому измерение разрушает запутанные квантовые состояния. Но предварительно эта запутанность, если она была, регистрируется результатом измерения.

Важно отметить, что из этого результата следует невозможность заменить интегральное измерение на всем коллективе частиц независимыми измерениями отдельных частиц коллектива. При интегральном измерении имеется возможность создания коррелированных чистых состояний коллектива. Это означает сохранение или даже создание запутанности частиц коллектива после измерения. При индивидуальных измерениях частиц запутанность разрушается, и в чистом состоянии возникает коллектив некоррелированных частиц.

5. Совместное распределение результатов измерений в коллективе

В эксперименте наблюдается совместное частотное распределение результатов измерений для ансамбля коллективов частиц. Эти частоты соответствуют совместному распределению вероятностей результатов. Для вычисления этого распределения нужен оператор проекции волновой функции на конечномерное подпространство функций в гильбертовом пространстве. Подпространство, которое является линейной оболочкой функций $f_1,\ldots,f_k$, обозначим как $\langle f_1,\ldots,f_k\rangle$. Оператор проекции на это подпространство некоторой функции g из пространства L_2 обозначим $proj\left(g\,|\,\langle f_1,\ldots,f_k\rangle\right)$. Вычисление этого оператора можно произвести методом последовательной ортогонализации Грамма–Шмитта на множестве $f_1,\ldots,f_k$.

Совместное распределение результатов измерений на коллективе частиц вычисляется следующей процедурой.

Обозначим через $\varphi_{i,s}(\vec{x_i}\,|\,\overrightarrow{x_{(i)}}) = \varphi_{i,s}(\vec{x}) = \varphi_i(\vec{x}\,|\,s)$ собственные функции оператора измерения H_i. Индекс, поставленный в скобки, означает пропущенный индекс i в последовательности векторных аргументов $\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N} = \overrightarrow{x_{(i)}}$. Разные обозначения будут удобны для разных этапов вычисления. В частности, второе обозначение рассматривает собственные функции всех операторов как функции полного набора аргументов. Плотность вероятности (возможно, атомарная) выбора собственных функций и соответствующих собственных значений определяется как

$$d(s_1,\ldots,s_N) = \left\|proj\left(\Psi\,|\,\left\langle\varphi_{s_1,\ldots,s_N}\right\rangle\right)\right\|_{\vec{t}}^2 = \left|(\Psi,\varphi_{s_1,\ldots,s_N})\right|^2, \tag{5.1}$$

где норма и проекция понимаются в смысле скалярного произведения в L_2. По лемме 4.1 собственные функции коллективного измерения имеют вид (4.9):

$$\varphi_{s_1,\ldots,s_N}(\vec{x}) = \zeta(s_1,\ldots,s_N)\varphi_{1,s_1}(\vec{x_1})\cdot\ldots\cdot\varphi_{N,s_N}(\overrightarrow{x_N}).$$

Обозначим событие

$$W(V_1,\ldots,V_N) = \left\{\left(s_1,\ldots,s_N\right)|\,\lambda_1(s_1)\in V_1,\ldots,\lambda_N(s_N)\in V_N\right\}, \tag{5.2}$$

где $V_1,\ldots,V_N$ — множества чисел, измеримые по Лебегу.

Тогда совместное распределение значений измерений задается формулой

$$\Pr\{m_1 \in V_1,\ldots,m_N \in V_N\}|_{\vec{t}} = \int\limits_{\vec{s}\in W(V_1,\ldots,V_N)} d\left(\vec{s}\right)ds_1 \wedge\ldots\wedge ds_N = p(V_1,\ldots,V_N). \tag{5.3}$$

Измерению на ансамбле коллективов со стационарной волновой функцией соответствует следующая модель.

Определение 5.1. Назовем *стационарным измерением на конечном числе N потоков* потенциально бесконечную последовательность измерений, каждому из которых соответствуют кортеж операторов $H_1,\ldots,H_N$ и стационарная волновая функция коллектива $\Psi(\vec{\tau},\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N})$, где $\vec{\tau}=(\tau_1,\ldots,\tau_N)$. Каждый поток является последовательностью частиц $\theta_i(t)$, $i=\overline{1,N}$, испущенных источником в моменты времени $t=t_1,t_2,\ldots$. К частице $\theta_i(t)$, испущенной в момент t, применяется измерение с оператором H_i в момент времени $t+\tau_i$. При этом параметр запаздывания τ_i является параметром оператора измерения в том смысле, что один и тот же математический оператор H_i, примененный с разными запаздываниями τ_i, рассматривается как применение разных измерений. Операторам $H_i|_{\tau_i}$ и $H_i|_{\tau'_i}$ при $\tau_i \neq \tau'_i$ соответствуют разные компоненты индивидуального состояния частицы.

В этой модели, как показано выше, имеется стационарное распределение вероятности $\Pr\{m_1 \in V_1,\ldots,m_N \in V_N\}_{\vec{\tau}} = p(V_1,\ldots,V_N)_{\vec{\tau}}$ для совместных результатов измерений вида $m_i = \lambda\left(\Phi_{\theta_i(t)}([H_1,\ldots,H_N])\right)$ при каждом кортеже запаздываний $\vec{\tau}$.

Поток совместных измерений — это последовательность кортежей $m(1), m(2),\ldots$, где $m(j)=\left(m_1(j),\ldots,m_N(j)\right)$, которая соответствует моментам времени испускания частиц $t=t_1,t_2,\ldots$. Эта последовательность может быть представлена N-последовательностью

$$\begin{gathered} m_1(1), m_1(2),\ldots, \\ \cdots \\ m_N(1), m_N(2),\ldots \end{gathered} \tag{5.4}$$

Пояснение. Результат каждого измерения $\left(m_1(j),\ldots,m_N(j)\right)$ соответствует композиции операторов $\left[H_1,\ldots,H_N\right]_{\vec{\tau}}$ для всех одновременно излученных частиц, а не отдельным операторам $H_i|_{\tau_i}$, примененным к отдельным частицам. Но при этом операторы индивидуального состояния у разных частиц различны. Собственная функция принадлежит пространству $\Lambda_2(\mathbb{C},P^N)$, и совместная волновая функция потоков нормирована на пространстве $P^N = P|_{\tau_1}\times\ldots\times P|_{\tau_N}$ (декартово произведение пространственно подобных подмногообразий в пространстве–времени). Она является результирующим состоянием ансамбля частиц, участвующих в одновременном измерении. По лемме 4.1 для этой собственной функции верно представление (4.9). Это означает, что каждая из частиц определяет в этой функции свой сомножитель $\varphi_{s_i}(\overrightarrow{x_i})$ в соответствии со своим индивидуальным состоянием:

$$\varphi_{s_i}(\overrightarrow{x_i}) = \Phi_{\theta_i(t)}([H_1,\ldots,H_N]_{\vec{\tau}}).$$

В частном случае, когда измерительные приборы взаимно удалены, возможно влияние на частицу только одного прибора. Тогда остальные члены кортежа операторов являются неэффективными аргументами: $\varphi_{s_i}(\overrightarrow{x_i}) = \Phi_{\theta_i(t)}(H_i|_{\tau_i})$. Именно этот случай соответствует измерениям эффекта ЭПР.

Определение 5.2. Частота подпоследовательности $\{x_{i(k)}\}$ в последовательности $\{x_i\}$ — это величина $\mathrm{Fr}\{x_{i(k)}\} = \lim_{k\to\infty} \dfrac{k}{i(k)}$.

Теорема 5.1. Для любого стационарного измерения на конечном числе потоков существует распределение индивидуальных состояний частиц $\Phi_{\theta_i(t)}$ на последовательности частиц в потоке, которое обеспечивает статистическое выполнение данного совместного распределения в частотном представлении:

$$\mathrm{Fr}\{m_1 \in V_1, \ldots, m_N \in V_N\} = p(V_1, \ldots, V_N). \tag{5.5}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную последовательность Бернулли с векторным значением случайной величины размерности N и с распределением (5.3). Тогда по закону больших чисел с вероятностью 1 последовательность значений $\left(m_1(J), \ldots, m_N(J)\right)$, $J = 1, \ldots;$, удовлетворяет условию (5.5). В каждом акте измерения выполнено равенство $m_i(J) = \lambda_i(J)$, где собственное значение $\lambda_i(J)$ соответствует собственной функции $\varphi_i(\vec{x} \mid s(J))$ оператора H_i. Положив для частицы $\theta_i(J)$ индивидуальное состояние с компонентой $\Phi \circ \left[H_1, \ldots, H_N\right] = \varphi_i(\vec{x} \mid s(J))$, получим последовательность индивидуальных состояний, обеспечивающую условие (5.5). □

Таким образом, модель с индивидуальным состоянием достаточна для описания любого опыта с точностью до совпадения статистики наблюдений в соответствии с квантовой механикой.

6. Модель ЭПР-эффекта, согласованная с ТО

Пусть в опыте с эффектом ЭПР (рис. 1) измеряется величина Z, причем в момент рождения коррелированных частиц для порождающей частицы $Z = 0$. Если предположить наличие индивидуального состояния каждой частицы, то при разделении частицы на две коррелированные частицы последние получают свои индивидуальные состояния, в которых выполнены условия

$$H_Z \Phi_1(H_Z) = \lambda \Phi_1(H_Z), \tag{6.1a}$$
$$H_Z \Phi_2(H_Z) = -\lambda \Phi_2(H_Z). \tag{6.1b}$$

Тогда для каждой исходной частицы с $Z = 0$ равенство $Z_1 + Z_2 = 0$ для пары рожденных коррелированных частиц выполнено детерминированно. При этом законы распространения частиц в форме волны амплитуды вероятности остаются теми же, что в стандартной модели. Схема такой модели показана на рисунке 2.

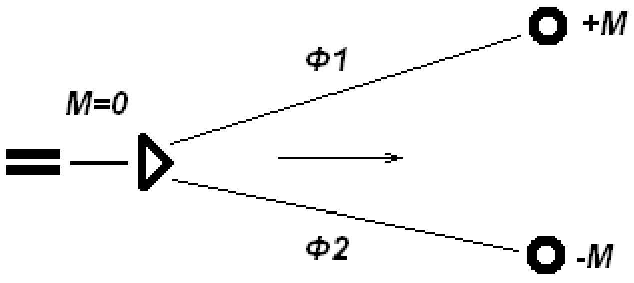

Рис. 2. ЭПР-эффект с индивидуальными состояниями частиц Ф1 и Ф2. Взаимодействие приборов при измерении не требуется

В такой модели для объяснения эффекта не требуется взаимодействия измерительных приборов. Это снимает проблему согласования опыта с теорией относительности.

7. Альтернативные измерения

В этом разделе будет рассмотрена проблема скрытых параметров в моделях элементарных частиц. Анализ этой модели связан с более сложной конструкцией измерений на потоке частиц, где разным актам измерения иногда соответствуют разные операторы.

Определение 7.1. Модель альтернативных стационарных измерений на конечном числе потоков. Имеется стационарное измерение на конечном числе потоков $H_1,\ldots,H_N$, $\Psi(\vec{\tau},\overrightarrow{x_1},\ldots,\overrightarrow{x_N})$, $\vec{\tau}=\left(\tau_1,\ldots,\tau_N\right)$. При этом, возможно, имеются несколько наборов операторов $H_1^1,\ldots,H_N^1,\ldots,H_1^K,\ldots,H_N^K$ и соответствующие им задержки измерения $\overrightarrow{\tau^1}=\left(\tau_1^1,\ldots,\tau_N^1\right),\ldots,\overrightarrow{\tau^K}=\left(\tau_1^K,\ldots,\tau_N^K\right)$. И при каждом измерении $m(j)=\left(m_1(j),\ldots,m_N(j)\right)$ для момента испускания частиц t_j выбирается один из этих наборов $H_1^{I(j)},\ldots,H_N^{I(j)}$, $I(J)\in\overline{1,K}$, по случайному или детерминированному закону. Потребуем дополнительно, чтобы в последовательности измерений моменты, когда $I(j)=i,$ образовывали подпоследовательность, имеющую частоту $f(i)$, $f(1)+\ldots+f(K)=1$. □

Тогда возникает новое совместное распределение вероятностей результатов измерений:

$$\begin{aligned}&\Pr\{m_1\in V_1,\ldots,m_N\in V_N\}_{\vec{\tau}}=p(V_1,\ldots,V_N)=\\&=\sum_{i=1}^{K}f(i)p_i(V_1,\ldots,V_N)_{\overrightarrow{\tau^i}},\end{aligned} \tag{7.1}$$

где в соответствии с формулой (5.3) для измерения $[H_1,\ldots,H_N]=[H_1^i,\ldots,H_N^i]$ с очевидной заменой обозначений можно записать

$$p_i(V_1,\ldots,V_N)=\int\limits_{\vec{s}\in W_i(V_1,\ldots,V_N)}d\left(\vec{s}\right)ds_1\wedge\ldots\wedge ds_N. \tag{7.2}$$

Теорема 7.1. Для любого альтернативного стационарного измерения на конечном числе потоков существует распределение индивидуальных состояний частиц $\Phi_{\theta_i(t)}$ на последовательности частиц в потоке, которое обеспечивает статистическое выполнение данного совместного распределения в частотном представлении:

$$\mathrm{Fr}\{m_1\in V_1,\ldots,m_N\in V_N\}=p(V_1,\ldots,V_N). \tag{7.3}$$

Доказательство следует из теоремы 5.1, поскольку ее можно применить отдельно к каждой из подпоследовательностей измерений с постоянным оператором. □

Модель альтернативных измерений обозначим следующим образом

$$\{[H_1^1,\ldots,H_N^1],\ldots,[H_1^K,\ldots,H_N^K]\,|\,(\tau_1^1,\ldots,\tau_N^1),\ldots,(\tau_1^K,\ldots,\tau_N^K)\,|\,\Psi\}.$$

Далее будем считать, что поток один:

$$\{H^1,\ldots,H^K\,|\,\tau^1,\ldots,\tau^K\,|\,\Psi\}. \tag{7.4}$$

Это не ограничивает общности, поскольку интересующий нас эффект проявляется на каждом потоке независимо от остальных.

Общий принцип модели со скрытыми параметрами следующий. Предполагается, что результат измерения каждым оператором детерминированно зависит от некоторого параметра, а значение этого параметра каждая частица несет на себе.

Определение 7.2. Поток частиц (7.4) описывается системой скрытых параметров, если каждой частице $\theta(j)$ сопоставлено значение параметра $\alpha(j)$, причем результат измерения этой частицы оператором H^i детерминировано зависит от этого параметра:

$$m(j\,|\,i) = g_i(\alpha(j)). \tag{7.5}$$

При этом значения параметра в потоке частиц удовлетворяют распределению вероятностей

$$\Pr\{\alpha \in A\} = q(A), \tag{7.6}$$

где $q(A)$ — вероятностная мера на значениях параметра. □

Описание (7.5) можно признать адекватным квантовой механике, если порожденные им распределения вероятности значений измерений совпадают с теми, которые порождены волновой функцией и операторами измерения (7.2)

$$p_i(V\,|\,g_i) = \int\limits_{\alpha: g_i(\alpha)\in V} g_i(\alpha) q(d\alpha),$$
$$p_i(V\,|\,g_i) = p_i(V). \tag{7.7}$$

Если же такое совпадение нельзя получить ни при какой мере $q(A)$, в то время как функции g_i для данного параметра определены однозначно из физических соображений, то описание квантовой системы с данным скрытым параметром невозможно. Пусть дополнительно данный параметр α имеет такой физический смысл, что при любом другом скрытом параметре β для данных измерений будет детерминированно определено и значение этого параметра $\alpha = b(\beta)$. Тогда для данной квантовой системы невозможно никакое описание через скрытые параметры. Именно такие ситуации получили название нарушений неравенств Белла [Bell, 1964; Гриб, 1984]. Имеется в виду нарушение (7.7) или порожденных из (7.7) равенств и неравенств.

Конкретный пример был теоретически найден Дж. С. Беллом в процессе регистрации поляризованных фотонов двумя датчиками, на которых установлены поляризационные фильтры с разным поворотом оси поляризации. Пусть оси фильтров ортогональны, а ось поляризации фотонов имеет с осью одного из фильтров угол φ. Фотон с вероятностью ½ попадает на один из фильтров, после чего фильтр реагирует с вероятностью $\sin(\varphi)$ или $\cos(\varphi)$. Таким образом, если у данной системы имеется скрытый параметр, то он однозначно определяет угол φ. Тогда среднее значение в каждом измерении равно $(\sin(\varphi)+\cos(\varphi))/2 < 1/\sqrt{2}$ при $0 < \varphi < \pi/2$. Но в квантовых измерениях проекция волновой функции фотона на собственные функции фильтров имеет коэффициенты $\sin(\varphi)$ и $\cos(\varphi)$ соответственно. Здесь φ — это угол оси фильтра с математическим ожиданием оси поляризации квантовых фотонов. Тогда среднее значение по измерениям $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$. Поэтому при любой нормированной мере $q(d\alpha)$ равенство (7.7) невозможно. А поскольку поляризация фотона будет детерминированно определяться любым скрытым параметром, то данный процесс нельзя описать через скрытые параметры, сохранив согласие с квантовой механикой.

Многочисленные эксперименты, поставленные по близким схемам, показали соответствие с квантовой механикой. Таким образом, усилить схему индивидуальных состояний частиц до схемы скрытых параметров невозможно. В приведенном примере система индивидуальных состояний сопоставляет каждому из операторов (фильтров) свой поток параметров. Такой поток по условию согласования (2.2), (2.3) обеспечивает на каждом фильтре квантовую статистику результатов измерений. Заметим, что (в отличие от схемы скрытых параметров) модель индивидуальных состояний не предполагает наличие «истинного» (общего для всех приборов) значения поляризации кванта до взаимодействия с прибором. Для каждого из фильтров значение формируется только в момент измерения. Это объясняет действие теоремы 7.1 в данной схеме опыта.

8. Обсуждение

Индивидуальное состояние не является скрытым параметром, хотя и обладает только альтернативной измеримостью. Введение в квантовую теорию скрытых параметров подразумевает получение вероятностных эффектов как статистики параметров, которые детерминированно сопоставлены измеряемым частицам. В модели с индивидуальным состоянием амплитуда вероятности носит первичный характер, как и в стандартной модели. Но взаимодействия частиц (и в частности, процессы измерения) детерминируются компонентой индивидуального состояния, зависящей не только от частицы, но и от оператора измерения. Вероятностный характер результатов измерения и взаимодействия объясняется статистикой распределения по частицам индивидуальных состояний. Такие дополнительные параметры не влияют на волновую функцию и не попадают под теорему фон Неймана, которая запрещает введение скрытых параметров в модель распространения частиц. Согласование статистики со стандартной моделью обеспечено равенствами (2.2), (2.3), специально постулированными. Теоремы 5.1 и 7.1 доказывают выполнимость этих требований в модели стационарных потоков. Это позволяет дать статистическую интерпретацию квантовым неравенствам Белла и эффекту ЭПР в рамках обычной теории вероятности.

Поскольку все квантовые числа и заряды имеют соответствующие операторы измерения, их значения можно описать как компоненты индивидуального состояния частицы. При этом надо однозначно зафиксировать тот оператор, которым измеряется данная характеристика. Наличие нескольких операторов измерения одной величины в принципе может означать и неоднозначность статистики этой величины.

Симметрии оператора Φ можно было бы рассматривать как симметрии внутренней структуры частицы. Но поскольку этот функтор только альтернативно измерим, его изучение для отдельной частицы принципиально невозможно. Остаются только симметрии волновой функции и симметрии спектров операторов измерения, которые соответствуют среднестатистическим симметриям ансамбля частиц одного типа. Это важное отличие квантового понятия структуры от структуры макроскопического объекта, которая также может повлиять на результат измерения в зависимости от способа измерения.

Часть 2

В этой части рассмотрен случай распространения частицы по волноводу с диссипацией. Вводится гипотеза (постулат), что, пока не произошла диссипация, индивидуальное состояние частицы не изменяется. Процесс распространения частицы моделируется модифицированным уравнением Шрёдингера, в котором коэффициент при производной волновой функции по времени имеет не только мнимую, но и действительную часть. Этот действительный коэффициент моделирует трение, которое, в свою очередь, сопоставляется процессу Пуассона возникновения диссипации. Предлагается специальная функция Грина для этой модели. Получена формула связи коэффициента трения и показателя процесса Пуассона. Показано, что при уменьшении коэффициента трения вероятность диссипации на заданном отрезке пути стремится к нулю. Это вместе с постулатом сохранения индивидуального состояния объясняет сохранение запутанности частиц при передаче их по оптоволоконному кабелю с малой вероятностью диссипации. Весь материал объединен в раздел 9.

9. Гипотеза сохранения корреляции частиц и уравнение Шрёдингера с диссипацией

Выше была доказана [Коганов, 2012–2014] возможность введения оператора индивидуального состояния квантовой частицы таким образом, чтобы удовлетворить наблюдаемому эффекту Эйнштейна–Подольского–Розана (ЭПР-эффект) для коррелированных частиц [Reid, 2007; Bell, 1964], квантовым неравенствам Белла для поляризованного света [Гриб, 1984] и ограничениям теории относительности по скорости распространения сигнала, несущего информацию. При этом полностью сохраняется формализм квантовой механики в отношении распространения квантовых частиц и применения к ним операторов измерения [Boom, 1951; Блохинцев, 1961]. Однако при анализе опубликованных результатов экспериментов возникает вопрос: почему индивидуальное состояние и коррелированность частиц сохраняются при передаче поля по оптоволоконным волноводам? При таком распространении электромагнитной волны каждый фотон многократно поглощается и повторно излучается частицами среды. Причем частицы, идущие по разным волноводам, проходят эти ретрансляции независимо на разных атомах.

В данной работе предлагается **гипотеза**, состоящая в том, что *индивидуальное состояние частицы изменяется только при диссипативных взаимодействиях, а взаимодействия, которые не меняют гамильтониан частицы, не меняют ее индивидуальное состояние.*

В частности, это относится и к коррелированности частиц. Тогда требуется модель распространения частицы в среде с некоторой вероятностью диссипации частицы на каждом отрезке пути. Если эта вероятность мала, то с большой вероятностью частица не изменит своего индивидуального состояния, пройдя через волновод. В качестве модели распространения частицы в среде предлагается уравнение Шрёдингера, в которое введено трение, играющее роль фактора диссипации частицы.

Рассматривается уравнение, аналогичное уравнению Шрёдингера для свободной частицы, но содержащее член, соответствующий диссипации в среде распространения волны, — действительную частную производную по времени:

$$\left(a+ib\right)\frac{\partial U}{\partial t}-D\nabla^2 U=0, \tag{9.1}$$

где a,b,D — действительные константы, $i^2=-1$. В качестве решения рассмотрим функцию Грина

$$G(t,x)=\exp\left\{-x^2/(2wt)\right\}/\sqrt{2\pi wt},\ w=D/(a+ib). \tag{9.2}$$

Она соответствует движению частицы из точки $x=0,\ t=0$ в среде с трением, которое определяется параметром a. Для свободной частицы в вакууме $b=\hbar$, $a=0$, $D=-\hbar/(2m)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U+\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 U=0.$$

Случай движения во внешнем потенциальном поле в данной работе не рассматривается. Функция Грина (9.2) уравнения (9.1) имеет вид

$$G(t,x)=S\exp\left\{-x^2a/(2Dt)\right\}\exp\left\{-ix^2b/(2Dt)\right\}\left(2\pi Dt\right)^{-1/4}, \tag{9.3}$$

$$S=\mathrm{const}=\left(\sqrt{\sqrt{a^2+4b^2}+a}+i\sqrt{\sqrt{a^2+4b^2}-a}\right).$$

При условии $a>0$ существует нормировка $1=\|G\|_{L2}^2/\Xi$,

$$\Xi=\|G\|_{L2}^2=\sqrt{a^2+4b^2}\,/\,(4\sqrt{\pi Dat}). \tag{9.4}$$

Это означает возможность расчета амплитуды вероятностей $\Psi(t,x)$ для свободной частицы в неограниченной среде с диссипацией

$$\Psi(t,x)=G(t,x)/\sqrt{\Xi}.$$

Без диссипации это невозможно. При $a = 0$

$$G(t,x) = 4\sqrt{b}\exp\left\{-ix^2 b/(2Dt)\right\}\left(2\pi Dt\right)^{-1/4}. \tag{9.5}$$

Эта функция не принадлежит $L_2(\mathbb{C},\mathbb{R})$ и не подлежит нормировке.

Для расчета вероятности прохождения частицы без диссипации в течении времени t следует использовать экспоненциальное распределение $p(t) = \lambda\exp\{-\lambda t\}$ для плотности вероятности рассеяния частицы в момент t. Тогда вероятность продолжения движения частицы без диссипации надо нормировать к $\exp\{-\lambda t\}$. Дисперсия симметричного блуждания с экспоненциальным распределением равна $(v/\lambda)^2$, а среднее время одного шага в таком блуждании равно $1/\lambda$ и средний шаг блуждания по оси $\langle x\rangle$ равен v/λ, где v — скорость распространения волны в среде ($0 < v \le c$, c — скорость света).

Дисперсия амплитуды распределения $|G(t,x)|/\sqrt{\Xi}$ в момент времени t равна $\delta = Dt/(2a)$. Для $t = 1/\lambda$ дисперсия $\delta = D/(2\lambda a)$. Исходя из условия равенства дисперсии волновой функции и дисперсии симметричного экспоненциального блуждания с показателем λ, получаем

$$\delta = \frac{D}{2a\lambda} = (v/\lambda)^2,$$
$$\lambda = 2av^2/D. \tag{9.6}$$

Тогда амплитуда вероятности нормирована в L_2 к $\exp\{-2av^2 t/D\}$ и волновая функция имеет вид

$$\Psi(t,x) = G(t,x)\exp\left\{-av^2 t/D\right\}/\sqrt{\Xi} =$$
$$= S\exp\left\{-x^2 a/(2Dt)\right\}\exp\left\{-ix^2 b/(2Dt)\right\}\exp\left\{-v^2 at/D\right\}/\left(2\pi Dt\right)^{1/4}, \tag{9.7}$$

где $S = \text{const} = \left(\sqrt{\sqrt{a^2+4b^2}+a} + i\sqrt{\sqrt{a^2+4b^2}-a}\right)$.

Вероятность прохождения частицы до момента времени t без рассеяния равна нормировке

$$P(t) = \exp\{-2av^2 t/D\}. \tag{9.8}$$

При убывающем трении $a \downarrow 0$ эта вероятность (9.8) стремится к 1 для любого момента времени. С дополнительной вероятностью частица рассеивается при взаимодействии. Эта вероятность соответствует третьей слева экспоненте в уравнении (9.7). Форма распределения амплитуды вероятности исследуемой волны в каждый момент времени описывается первой слева экспонентой (9.7). Этот член определяет диффузию волны в среде с трением и диссипацией.

Зависимость мгновенной частоты волны от времени и пространства может быть получена из второй экспоненты этого уравнения. Эта частота $\upsilon(t,x)$ соответствует члену первой степени ряда Тейлора по времени для показателя экспоненты. Член нулевой степени задает мгновенный сдвиг по фазе φ для этой частоты. Остальные члены ряда Тейлора определяют динамику изменения во времени частоты и фазы в данной точке пространства. Показатель экспоненты имеет вид $-ix^2 b/(2Dt)$

$$\Delta\left(\frac{-ix^2 b}{2Dt}\right) = \frac{ix^2 b}{2D}\left(\frac{1}{t^2}\Delta t - \frac{1}{4t^3}\Delta t^2 + \dots\right).$$

Локальная частота:

$$\upsilon(t,x) = \frac{x^2 b}{4\pi D t^2}, \tag{9.9}$$

$$\varphi = -x^2 b / (2Dt).$$

Энергия кванта, измеренная в точке пространства x в момент времени t:

$$E(t,x) = \hbar\upsilon = \frac{\hbar x^2 b}{4\pi D t^2}. \tag{9.10}$$

При устремлении параметра времени к нулю для $x \neq 0$ получаем сингулярность:

$$\lim_{t\to 0} E(t,x) = \infty .$$

Это связано с тем, что используется решение, которое соответствует сингулярному (обобщенному) начальному состоянию — дельта-функции. Если задана начальная энергия кванта E_0 в момент начала распространения в среде, то в точке x необходимо вести отсчет времени от того момента t_0, когда энергия кванта равна заданной. Это тот момент времени, когда фронт волны достиг точки x из точки $x = 0$, при условии, что не было диссипации.

$$E(t_0,x) = \frac{\hbar x^2 b}{4\pi D {t_0}^2} = E_0,$$

$$t_0 = t_0(x) = \frac{|x|}{2}\sqrt{\frac{\hbar b}{\pi D E_0}}. \tag{9.11}$$

В точке $x \neq 0$ решение (9.7) корректно только с момента времени (9.11).

Скорость распространения фронта волны в среде из (9.11) может быть оценена как

$$v = \frac{x}{t_0(x)} = 2\sqrt{\frac{\pi D E_0}{\hbar b}}. \tag{9.12}$$

Отметим, что это фазовая скорость, зависящая от энергии кванта. С этой скоростью меняется та точка в пространстве, где можно измерить начальную энергию кванта, излученного в точке $t = 0, x = 0$. В этой начальной точке формулы (9.9), (9.10) имеют неопределенное значение. Для раскрытия неопределенности по смыслу выбора момента $t_0(x)$ нужно положить $x = vt$ при $t \to 0$. Тогда, с учетом (9.9), (9.12), можно оценить начальную частоту:

$$\upsilon(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{(v^2t^2)b}{4\pi D t^2} = \frac{v^2 b}{4\pi D} = \frac{E_0}{\hbar}. \tag{9.13}$$

Если рассмотреть волну в точке x при $t > t_0(x)$, то частота и наблюдаемая энергия кванта с ростом времени убывают до нуля. Это можно интерпретировать как эффект усреднения наблюдений в многократном эксперименте. Поскольку вероятность возвращения кванта в точку после прохода через нее фронта волны быстро падает, то средняя энергия, измеренная в точке, убывает со временем. Дополнительно накладывается вероятность рассеяния частиц в среде. Этот эффект в решении (9.7) проявляется в падении амплитуды волны в соответствии с первым слева экспоненциальным множителем.

Часть 3

В части 1 было введено понятие индивидуального состояния квантовой частицы в аксиоматической форме без реального построения соответствующего оператора. В разделе 10 будут рассмотрены возможные математические построения таких операторов, от самых абстрактных, основанных на аксиоме выбора, до близких к конструктивным определений, которые превращаются в алгоритмы при наложении некоторых финитных ограничений. Аксиома выбора дает формальное общее описание всех возможных индивидуальных состояний. Они различаются исходными ординальными порядками на множестве волновых функций. В квазиконструктивных определениях требуется обеспечить независимость результата от произвольных форматов в описании оператора, например таких, как нумерация собственных функций. Предлагается конструкция, основанная на построении всюду плотной последовательности в сепарабельном гильбертовом пространстве. Показано, что такая конструкция обеспечивает выбор чистого состояния измерения в случае дискретного спектра. Для случая непрерывного спектра гарантировать выбор не удалось. Предлагается ограничить точность измерения в этом случае и выбирать чистое состояние из некоторой счетной совокупности с дискретным набором собственных значений, приближающих непрерывный спектр с заданной точностью. Исследованы свойства таких операторов в зависимости от базовой последовательности. Операторы измерения, для которых операторы указанного вида могут выбрать одну собственную функцию, образуют область определения такого индивидуального состояния. Дается описание этих областей определения на пространстве всех эрмитовых операторов. Доказано, что среди них нет индивидуального состояния с наибольшей областью определения. Вне области определения могут оказаться только эрмитовы операторы с непрерывной компонентой спектра. Показано, что операторы индивидуального состояния указанного вида могут быть построены для квантовой механики, базированной на пространстве Галилея–Ньютона, пространстве Минковского и на тех областях пространства-времени в ОТО, где нет точек сингулярности.

В разделе 11 анализируется условие стационарности волновой функции при многократном квантовом эксперименте с набором статистической выборки. Показано, что фактически это условие контролируется специальным оператором на функциях в пространстве-времени. При этом между последовательными измерениями необходим временной интервал, достаточный для обмена информацией между всеми компонентами экспериментальной установки. С учетом максимальной скорости обмена информацией, равной скорости света, это задает ограничения на темп эксперимента в зависимости от размеров установки.

10. Варианты описания индивидуального состояния частицы

Выше было показано, что согласование формализма коррелированных квантовых частиц с теорией относительности возможно при введении оператора индивидуального состояния для каждой частицы из квантового ансамбля, который сопоставляет каждому эрмитовому оператору измерения, действующему на гильбертовом пространстве квантовых состояний, ровно один его собственный вектор. Вопрос о принципиальном существовании таких операторов решается положительно с помощью теории множеств Цермело–Френкеля.

Если сопоставить частице ординальное упорядочение всех обобщенных функций над пространством Гильберта, то для каждого оператора измерения оператор индивидуального состояния будет выбирать элемент его собственного базиса с минимальным номером. В этом случае состояние описывается упорядочиванием. Однако такой подход не имеет конструктивного описания. Практически только счетные множества можно конструктивно ординально упорядочить. В этом смысле мы будем говорить о *квазиконструктивном* описании оператора индивидуального состояния, если аксиома выбора в этом описании будет использована только для счетных множеств.

Надо отметить, что модели индивидуальных состояний элементарных частиц строились и другими авторами. Можно привести в качестве примера работу [Rybakov, Kamalov, 2007], в которой авторы для моделирования спина и заряда частицы использовали топологические инварианты поверхности в специальном «внутреннем» пространстве частицы. Отличие излагаемого подхода состоит прежде всего в привязке конструкции индивидуального состояния к формализму измерений в стандартной модели квантовой механики.

Ниже предлагается квазиконструктивное построение оператора индивидуального состояния. Как и в общем случае аксиомы выбора, это определение допускает много частных реализаций при варьировании использованных в построении последовательностей. Однако мощность множества всех реализаций в квазиконструктивном случае континуальна, а в общем случае она выше — функциональная (равна $F=2^C$).

10.1. Квазиконструктивная модель индивидуального состояния

Гильбертово пространство сепарабельное. Частице можно сопоставить бесконечную счетную последовательность векторов гильбертова пространства $\{u_i\}$, которая всюду плотна. Для эрмитова оператора измерения с дискретным спектром выбирается первый вектор последовательности, у которого окажется единственный ближайший собственный вектор измерения, который и будет сопоставлен измерению. Собственный базис эрмитова оператора ортонормирован, и поэтому такой вектор последовательности всегда найдется. Расстояние между двумя ортогональными нормированными векторами f и g равно, по теореме Пифагора,

$$\|f-g\|=\sqrt{2}. \tag{10.1}$$

Следовательно, первый член последовательности u_i, который будет на расстоянии меньше $\delta=\sqrt{2}/2$ от одного из векторов базиса, будет от любого другого вектора базиса дальше чем на δ. Поскольку последовательность всюду плотная, то такой индекс i существует, а поскольку последовательность по определению ординально упорядочена, то можно найти наименьший из таких индексов. Он и определит выбор собственного вектора из базиса.

Для операторов с непрерывным спектром такого вектора может не быть. В этом случае для получения конструктивного описания выбора собственного вектора оператора измерения надо ограничить точность измерения. Это означает, что надо построить счетную ε-сеть на непрерывном множестве собственных значений. Потом нужно сопоставить каждому собственному значению λ_i из этой сети его собственный вектор. Эти векторы образуют ортонормированную счетную совокупность $\{Q_i\}$ обобщенных функций. Каждая обобщенная функция Q_i в пространстве Гильберта может быть представлена как предел сверток с некоторой последовательностью $\{q_{i,j}\}$ элементов этого пространства. Если r — гладкая финитная функция, то

$$Q_i(r)=\lim_{j\to\infty}\left(q_{i,j}*r\right). \tag{10.2}$$

При этом для любого индекса i выполнено условие асимптотической нормированности:

$$\lim_{j\to\infty}\|q_{i,j}\|=1. \tag{10.3}$$

И для любых двух различных индексов i,i' выполнено условие асимптотической ортонормальности:

$$\lim_{j\to\infty}\|q_{i,j}-q_{i',j}\|=\sqrt{2}. \tag{10.4}$$

Это суть требования выбора ортонормированного собственного базиса. Выберем значение

$$\varepsilon<\frac{\sqrt{2}}{6}. \tag{10.5}$$

Определим значение (по признаку сходимости Коши)

$$j(i)=\arg\min(j)\left\{\forall j'>j\quad \|q_{i,j}-q_{i,j'}\|<\varepsilon\right\}. \tag{10.6}$$

Обозначим $q_i = q_{i,j(i)}$. Эти функции образуют на собственном базисе оператора 2ε-сеть. Далее, по вышеизложенной схеме можно провести выбор одного из собственных обобщенных векторов, соответствующих этой сети. Если некоторый вектор u_k из последовательности индивидуального состояния для некоторой функции q_i удовлетворяет условию $\|u_k - q_i\| < \varepsilon$, то для любой другой функции $q_{i'}$ выполнено

$$\|u_k - q_{i'}\| > \sqrt{2} - 3\varepsilon > \varepsilon. \tag{10.7}$$

Таким образом, можно осуществить однозначный выбор ближайшего обобщенного вектора Q_i по первому такому индексу k. Заметим, что в такой идеологии измерение определяется не только эрмитовым оператором, но и заданием параметра погрешности ε, а также набором собственных векторов, соответствующих ε-сети. При различных значениях этих параметров индивидуальное состояние будет в общем случае выдавать различные собственные векторы. С точки зрения физики это, возможно, более адекватно, чем предположение об абсолютно точных непрерывных измерениях. При этом для операторов с дискретным спектром параметр точности не влияет на выбор.

Всюду плотная последовательность $\{u_i\}$ определяет индивидуальное состояние частицы. С точки зрения физической интерпретации эту последовательность можно представить как процесс изменения мгновенного состояния частицы, которое имитирует волновую функцию, и эта функция сравнивается по метрике функционального пространства с собственными функциями процесса измерения или чистыми состояниями взаимодействия, в котором участвует данная частица. Когда сравнение обнаруживает достаточно близкое чистое состояние, то акт взаимодействия осуществляется именно в этом чистом состоянии. Если это взаимодействие интерпретируется в эксперименте как измерение, то собственное значение данного чистого состояния определяет числовой результат измерения. В общем случае, когда взаимодействие не является специально проводимым измерением, это собственное значение характеризует некоторый параметр взаимодействия, который может проявиться в макроскопических свойствах квантового ансамбля. Например, так проявляются энергетические уровни электронов в атомах при генерации фотонного излучения, хотя непосредственно измерения на каждом электроне не производятся.

10.2. Квазиконструктивная модель выбора собственного значения

Идея процесса изменения внутреннего состояния частицы как всюду плотной последовательности может быть использована не в функциональном пространстве, а в числовом пространстве спектра оператора. Если выбирается не собственная функция оператора измерения, а только собственное значение, то возможны два случая. Пусть это собственное значение не кратно в спектре. Тогда имеется только одно чистое состояние измерения, в котором реализуется это собственное значение, и его можно выбрать как реализацию индивидуального состояния. В другом случае имеется некоторое подпространство размерности больше единицы, в котором все векторы собственные для оператора измерения и соответствуют именно этому собственному значению. Выбрать точно один собственный вектор в этом случае нельзя, но даже если выбор будет осуществлен случайно с некоторой вероятностной мерой на указанном подпространстве, то результат измерения будет этим выбором определен однозначно. И поэтому статистика выбора собственных значений не зависит от вероятностной меры на собственном подпространстве данного элемента спектра оператора измерения. Легко видеть, что этого достаточно для порождения любой квантовой статистики, поскольку она относится не к собственным функциям, а к собственным значениям. Модели такого вида удобнее для анализа, поскольку выбор осуществляется не на пространстве функций или обобщенных функций, а на действительной числовой оси. Модель индивидуального состояния, построенную с точностью до выбора собственного значения, назовем *спектральным индивидуальным состоянием*. В силу сказанного выше эта модель не включает в себя процесс выбора одного собственного вектора из подпространства одного элемента спектра.

Модель индивидуального состояния, построенная с точностью до выбора элемента спектра оператора, соответствует всюду плотной последовательности $a = \left(a_i \mid i = \overline{1,\infty}\right)$, $a \subset \mathbb{R}$, на действительной числовой прямой. Эту последовательность назовем опорной для модели.

Определение 10.1. Если задано подмножество $M \subset \mathbb{R}$, то индуцированным элементом последовательности a назовем элемент a_i, который имеет наименьший номер $i = i(M)$ среди тех элементов последовательности, для которых определен ближайший элемент множества M.

$$i(M) = \min\left\{i : \exists \min_{m\in M} \left|m - a_i\right|\right\}. \qquad (10.8)$$

Такой элемент существует не всегда. Если индуцированный элемент последовательности a для данного подмножества M существует, то выбранным элементом $M(a)$ назовем тот элемент подмножества, на котором достигается минимум расстояния от индуцированного элемента последовательности. Если таких элементов два, то выбирается наименьший из них. На числовой прямой не может быть более двух таких элементов.

$$M(a) = \min\left\{\arg\min_{m\in M} \left|m - a_{i(M)}\right|\right\}. \qquad (10.9)$$

Модель спектрального индивидуального состояния с опорной последовательностью a, определяет выбранный элемент $M(a)$ для спектра оператора M. □

Поскольку не для всех спектров возможен такой выбор по фиксированной опорной последовательности, то требуется описание области определения каждой такой модели и построение множества операторов, входящих в область определения всех спектральных моделей с опорными последовательностями. Если это множество операторов окажется достаточно представительным с точки зрения физики, то данный тип моделей можно принять как вариант описания индивидуального состояния.

Утверждение 10.1. Элемент $M(a)$ определен тогда и только тогда, когда имеется элемент последовательности a_i, который принадлежит либо подмножеству M, либо интервалу из дополнения $\mathbb{R} \setminus M$, у которого ближайший к a_i конец принадлежит M.

Доказательство. В указанных случаях либо сам элемент a_i последовательности, либо ближайший конец интервала соответственно является ближайшим элементом из множества M к элементу a_i. Тогда можно получить выбранный элемент множества, если использовать наименьший индекс с указанным свойством. Если же ни один из указанных в уловии случаев не выполнен, то либо элемент a_i является внешней предельной точкой множества M, либо такая точка является ближайшим концом указанного интервала дополнения. В обоих этих случаях для данного элемента последовательности не существует ближайшего элемента множества. Если все элементы последовательности такие, то выбранный элемент подмножества не определен. □

Следствие 10.1. Если множество M не имеет точек накопления, то оно входит в область определения всех спектральных моделей с опорной последовательностью. Более того, если у множества M имеется хотя бы один интервал в дополнении с концом, принадлежащим множеству M, то оно входит в область определения всех спектральных моделей индивидуального состояния со всюду плотной опорной последовательностью.

Определение 10.2. Назовем модификацией произвольного оператора измерения H в измерение $H_{\varepsilon,\delta}$ с конечной погрешностью новый оператор, построенный по следующим правилам. На числовой прямой $\mathbb{R}$ задается некоторая счетная $\varepsilon * \delta$-сеть для произвольных $0 < \delta < \varepsilon$, в которой расстояния между любыми членами больше δ, но имеется член сети в ε-окрестности любого числа. Для любого собственного вектора исходного оператора H с некоторым собственным значением λ зададим новое собственное значение η, равное члену сети, ближайшему к значению λ. В случае попадания λ точно в середину интервала между двумя членами сети берется меньшее значение. Поскольку эрмитов оператор однозначно задан собственными векторами и их собственными значениями, новый оператор измерения определен.

Теорема 10.1. Оператор $H_{\varepsilon,\delta}$ входит в область определения всех спектральных моделей индивидуального состояния с опорной последовательностью.

Доказательство. Спектр оператора $H_{\varepsilon,\delta}$ лежит внутри $\varepsilon * \delta$-сети. Поэтому он удовлетворяет следствию10.1. □

Содержательно, можно утверждать, что все операторы измерения с ограниченной снизу погрешностью допускают взаимодействие с индивидуальными состояниями частиц указанного вида. С точки зрения моделирования физических экспериментов этого достаточно. Далее, будем обозначать $\Phi\langle a \rangle$ индивидуальное состояние с опорной последовательностью a.

10.3. Расширение области определения спектрального индивидуального состояния

Утверждение 10.2. Если a и a' две всюду плотные числовые последовательности, причем, $[a]$ и $[a']$ множества их элементов, и $[a] \subset\neq [a']$, то такое же вложение у областей определения индивидуальных состояний: $\operatorname{dom}\Phi\langle a \rangle \subset\neq \operatorname{dom}\Phi\langle a' \rangle$.

Доказательство. Свойство, требуемое в утверждении 10.1, зависит при фиксированном спектре оператора $M = (b-1;b+1) \setminus [a] \cup \{b\}$ только от множества элементов последовательности. Причем если оно выполнено для некоторой последовательности, то оно выполнено и для любого расширения множества элементов этой последовательности. Поэтому $\operatorname{dom}\Phi\langle a \rangle \subset$ $\subset \operatorname{dom}\Phi\langle a' \rangle$.

Пусть $b \in [a'] \setminus [a]$. Рассмотрим подмножество

$$M = (b-1;b+1) \setminus [a] \cup \{b\}.$$

Тогда $M \in \operatorname{dom}\Phi\langle a' \rangle$, поскольку $b \in M \cap [a']$.

Но $M \notin \operatorname{dom}\Phi\langle a \rangle$, поскольку на интервале $(b-1;b+1)$ множество M всюду плотное и не содержит элементов из множества $[a]$, а это означает. что все точки $[a]$ на этом интервале внешние предельные. Два внешних интервала дополнения множества M открытые. Поэтому элементы множества $[a]$, лежащие в этих интервалах, не имеют ближайших элементов множества M. Таким образом, множество M входит в $\operatorname{dom}\Phi\langle a' \rangle$, но не входят в $\operatorname{dom}\Phi\langle a' \rangle$. Значит, $\operatorname{dom}\Phi\langle a' \rangle$ строго больше $\operatorname{dom}\Phi\langle a' \rangle$. □

Определение 10.2. Назовем свободным соединением двух последовательностей любую последовательность, множество членов которой равно объединению множеств членов этих последовательностей: $[a''] = [a] \cup [a']$.

Утверждение 10.3. Среди индивидуальных состояний с опорной последовательностью нет оператора с максимальной областью определения.

Доказательство. Если для пары последовательностей выполнены условия $[a] \setminus [a'] \neq \varnothing$ и $[a'] \setminus [a] \neq \varnothing$, то их свободное соединение по утверждению 10.2 порождает расширенную область определения спектрального индивидуального состояния по отношению к исходным последовательностям. Поскольку действительных чисел континуум, а последовательности счетные, то множество членов любой последовательности можно расширить. □

Замечание 10.1. Если соединить все возможные последовательности как трансфинитную сумму счетных ординалов, то будет получена несчетная ординальная последовательность и соответствующее индивидуальное состояние будет не квазиконструктивно. Это поясняет смысл утверждения 10.3.

10.4. Формирование модельной последовательности компонент индивидуального состояния

При доказательстве теорем 5.1 и 7.1 использован прием формирования последовательности индивидуальных состояний с нужной статистикой частот значений некоторых компонент состояния. Точнее, существенны совместные частоты появления различных значений из спектров операторов измерения для каждого из потоков частиц. Конструкция индивидуального состояния, предложенная выше, делает затруднительным предсказание результата измерения. Однако если говорить о построении модельных последовательностей результатов измерений, то предложенный аппарат позволяет легко построить произвольную заданную последовательность результатов измерений в каждом потоке. Для этого заметим, что если первый член u_1 последовательности $\{u_i\}$ совпадает с некоторой собственной функцией φ_s оператора измерения H, то он и будет выбран как значение индивидуального состояния: $\Phi_\theta(H)=\varphi_s$. Соответственно, результат измерения на этой частице совпадет с соответствующим собственным значением λ_s. Таким образом, имеется возможность построения модели с заданной последовательностью результатов измерений на всех потоках частиц при заданных операторах измерения на каждом потоке.

10.5. Привязка опорной последовательности к области определения оператора измерения

Построенная опорная последовательность решает задачу выбора одной собственной функции для каждого из операторов, определенных на одном пространстве Гильберта. Но формализм волновых функций предполагает применение эрмитовых операторов, определенных на разных гильбертовых пространствах. Дело в том, что модель измерения в квантовой механике использует разложение по собственному базису оператора не самой волновой функции, а ее ограничения на гиперповерхность одновременности в пространстве-времени. Эта гиперповерхность соответствует точке пространства и моменту времени события измерения, а также системе отсчета измерительного прибора. Поэтому, разным 4-точкам события измерения и 3-скоростям измерительного прибора соответствуют пространства Гильберта, состоящие из функций с разными областями определения. Строго говоря, в квантовой механике прибор нельзя считать точечным, а период измерения мгновенным. Тем не менее понятие системы отсчета для прибора можно рассматривать в том смысле, в котором это делается для макроскопических тел в механиках классического и релятивистского типа. Эта система отсчета может не совпадать с той, в которой рассматривается распространение волновой функции (обычно, она рассматривается в системе отсчета источника частиц). Поскольку выбор собственной функции в модели индивидуального состояния частицы зависит не только от математической формы оператора измерения, но и от его области определения, то формализм опорных последовательностей требуется распространить и на параметр системы отсчета прибора. Для этого удобно ввести понятие гильбертова комплекса (ГК), которое содержит пространство-время (основное пространство) и систему подмножеств одновременности этого пространства (опорные подмножества) с мерой и функциональным пространством Гильберта на каждом опорном подмножестве.

Определение 10.3. *Гильбертов комплекс* (ГК) — это кортеж $\left[M,P:\mu:F\,|\,\Xi,F^{\wedge}\right]$, компоненты которого следующие:

M — *основное пространство*, множество, которое содержит опорные подмножества;

ξ — индекс одного из опорных подмножеств множеств;

P_ξ — *опорное подмножество*, $P_\xi \subset M$, соответствующее индексу;

μ_ξ — мера на опорном подмножестве P_ξ с сигма-алгеброй $\sigma(\xi)$;

Ξ — индексация опорных множеств (совокупность значений параметров, выделяющих одно опорное множество) $\xi \in \Xi$;

$F^{\wedge}$ — «*множество состояний*», функций вида $f: M \to \mathbf{C}$, которые для каждого значения $\xi \in \Xi$ удовлетворяют условию

$$\int_{x \in P_\xi} |f(x)|^2 \, d\mu_\xi(x) < \infty; \tag{10.10}$$

F_ξ — « *множество опорных функций*», определенных на P_ξ, и удовлетворяющих (10.10).

На этом множестве определено скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{x \in P_\xi} f^*(x) g(x) d\mu_\xi(x) < \infty. \tag{10.11}$$

Обозначим

$P \mid \Xi = \{P_\xi \mid \xi \in \Xi\}$ — система опорных множеств;

$P : \mu \mid \Xi = \{(P_\xi, \mu_\xi) \mid \xi \in \Xi\}$;

$F \mid \Xi = \{(F_\xi, \mu_\xi) \mid \xi \in \Xi\}$;

$P : \mu : F \mid \Xi = \{(P_\xi, \mu_\xi, F_\xi) \mid \xi \in \Xi\}$. □

Интерпретация ГК в квантовой механике. Основное пространство M — это пространство-время в базовой макроскопической механике. Индекс ξ выделяет одну гиперповерхность одновременности. Соответственно, индексация Ξ описывает все подпространства одновременности. Множество состояний $F^{\wedge}$ содержит все волновые функции, которые при ограничении аргументов на подпространство одновременности P_ξ лежат в соответствующем пространстве Гильберта: $F^{\wedge}|_{P_\xi} \subset F_\xi = L_2(\mathbf{C}, P_\xi)$. Мера μ_ξ соответствует мере Лебега на подпространстве одновременности или индуцированной мере на гиперповерхности одновременности P_ξ.

Определение 10.4. Гильбертов комплекс $\left[M, P : \mu : F \mid \Xi, F^{\wedge}\right]$ *сепарабельный* (или сильно сепарабельный), если существует последовательность функций $\{u_i\} \subset F^{\wedge}$, которая порождает на каждом пространстве F_ξ всюду плотную последовательность функций $\{u_i(\xi)\} \subset L_2(\mathbf{C}, P_\xi)$, где $u_i(\xi) =_{def} u_i|_{P_\xi}$.

ГК *слабо сепарабельный*, если имеется функциональная последовательность $\{u_i\} = \left\{u_i(\xi, x) \mid i = \overline{1,\infty}; x \in P_\xi; \xi \in \Xi\right\}$, в которой для каждого индекса ξ последовательность $\{u_i(\xi, .)\}$ принадлежит $L_2(\mathbf{C}, P_\xi)$ и всюду плотная там. □

Каждый сепарабельный ГК является и слабо сепарабельным.

Замечание 10.2. Если выбранному типу квантовой механики соответствует слабо сепарабельный ГК, то можно определить индивидуальное состояние частицы с помощью опорной последовательности $\{u_i\}$, которая в каждом конкретном измерении будет действовать как опорная последовательность $\{u_i(\xi)\}$ на поверхности одновременности P_ξ для измерительного прибора. Тип квантовой механики определяется базовой макроскопической механикой, в которой описываются волна и приборы. Он определяет основное пространство и опорные подмножества с мерой.

Теорема 10.2. Если выбранному типу квантовой механики соответствует слабо сепарабельный ГК, то существует система операторов индивидуального состояния, основанная на опорных последовательностях с параметром подпространства одновременности, причем для этой системы верны теоремы 5.1 и 7.1.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из замечания 10.2. Для доказательства второго утверждения заметим, что при каждом значении параметра ξ последовательность $\{u_i(\xi)\}$ строится независимо от последовательностей для других значений этого параметра. Поэтому доказательство теорем 5.1 и 7.1 с учетом п. 10.4 может быть буквально повторено для каждого подпространства одновременности. □

Замечание 10.3. Если в качестве пространства-времени и его гиперповерхностей одновременности используется линейные конечномерные пространства или гладкие многообразия (римановы или псевдоримановы), то все $L_2(\mathbf{C}, P_\xi)$ сепарабельные. Поэтому для каждого значения индекса ξ можно построить плотную последовательность $\{u_i(\xi)\}$. Это означает слабую сепарабельность всего ГК. Это означает, что для всех типов квантовой механики, используемых в настоящее время, верна теорема 10.2.

Слабая сепарабельность предполагает в модели индивидуального состояния задание своей опорной последовательности для каждого опорного множества, причем этим последовательностям не всегда будет соответствовать последовательность в множестве состояний. Сильная сепарабельность позволяет строить модель индивидуального состояния с опорной последовательностью в форме волновых функций.

Теорема 10.3. Если ГК удовлетворяет следующим условиям, то он сепарабельный.

1а. Существуют опорное множество с индексом ξ_0 и система биекций вида $\eta_\xi : P_{\xi_0} \leftrightarrow P_\xi$, $\xi \in \Xi$, в которой для любого измеримого множества $m \in \sigma(\xi)$ выполнено

$$\mu_\xi(\eta_\xi m) \le V(\xi)\mu_{\xi_0}(m), V(\xi) < \infty.$$

2а. Если $y \in P_\xi \cap P_{\xi'}$, то $\eta_\xi^{-1}(y) = \eta_{\xi'}^{-1}(y)$.

3а. $\eta_{\xi_0} = \mathbf{1}$ — тождественное отображение.

4а. F_{ξ_0} сепарабельное.

Доказательство. Пусть $\{u_i \mid i = \overline{1,\infty}\}$ — всюду плотная последовательность на F_{ξ_0}. По условию 4а она существует. Определим

$$u_i(\xi, y) =_{def} u_i(\eta_\xi^{-1} y), y \in P_\xi.$$

В силу условия 4а $u_i(\xi_0, x) = u_i(x)$ на P_{ξ_0}. А в силу условия 2а в каждой точке основного пространства $y \in M$ значение $u_i(\xi, y)$ определено однозначно для всех ξ, $y \in P_\xi$. Поэтому существует функция $f_i : M \to \mathbf{C}$, для которой $f_i|_{P_\xi} = u_i(\xi)$. Рассмотрим произвольную функцию $g \in F_\xi$. Тогда $g(\eta_\xi^{-1}) \in F_{\xi_0}$. В силу плотности последовательности $\{u_i\}$ выполнено $g(\eta_\xi^{-1}) \in Lim\{u_i\}$. По условию 1а $\|g - u_i(\xi)\|_\xi^2 \le V(\xi)\|g(\eta_\xi^{-1}) - u_i\|_{\xi_0}^2$. Поэтому $g \in Lim\{u_i(\xi)\}$. Это означает, что последовательность $f_i|_{P_\xi}$ всюду плотная на F_ξ. Значит, ГК сепарабельный. □

Следствие. В квантовой механике, базированной на механике Ньютона или на СТО, гильбертов комплекс сепарабельный. Это следует из того, что все гиперплоскости одновременности в этих механиках имеют взаимные линейные биекции с ограниченным якобианом, который дает оценку для $V(\xi)$. Если в качестве P_{ξ_0} принять гиперплоскость $(0, \vec{x})$, а $P_\xi = \{(t(\vec{x}), \vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbf{R}^3\}$ — произвольная другая гиперплоскость одновременности, то отображение $\eta_\xi : (0, \vec{x}) \mapsto (t(\vec{x}), \vec{x})$ является биекцией. В пространстве Галилея–Ньютона $t(\vec{x}) = \mathrm{const}$, и $V(\xi) = 1$. В пространстве

Минковского $t(\vec{x})$ — линейная функция и Якобиан по модулю не превосходит $\sqrt{2}$. Слабая сепарабельность этих ГК следует из того, что все их гиперповерхности одновременности P_ξ являются конечномерными действительными гиперплоскостями и соответствующие F_ξ изоморфны сепарабельному пространству $L_2(\mathbf{C},\mathbf{R}^3)$. В квантовой механике, базированной на ОТО, это верно только для областей, которые не имеют сингулярных предельных точек.

В этих пространствах существует бесконечное множество метрически неизоморфных систем биекций, удовлетворяющих теореме 10.3. Это позволяет строить много различных моделей индивидуального состояния в форме опорной последовательности волновых функций.

11. Условие воспроизводимости волновой функции

Измерения в квантовой механике всегда носят статистический характер. Поэтому любой эксперимент должен иметь многократную реализацию с повторением одной и той же волновой функции. Это свойство назовем воспроизводимостью волновой функции. Такая характеристика может быть измерена соответствующим оператором на пространстве волновых функций. Заметим, что это пространство не является гильбертовым, поскольку по времени волновые функции не могут быть нормированы. Таким образом, оператор измерения воспроизводимости выходит за рамки обычного в квантовой механике класса эрмитовых операторов измерения. Однако принцип его действия тот же самый.

Оператор измерения воспроизводимости волновой функции:

$$S[D]\Psi(t,x)=\Psi(t+D,x). \tag{11.1}$$

Собственные функции с собственным значением λ:

$$\Psi(t+D,x)=\lambda\Psi(t,x), \tag{11.2}$$

$$\Psi(t,x)=\Psi(t-\lfloor t/D\rfloor,x)\lambda^{\lfloor t/D\rfloor}. \tag{11.3}$$

Условию нормировки удовлетворяют только собственные функции с $|\lambda|=1$.

Параметр D назовем периодичностью воспроизведения состояния ансамбля. В эксперименте надо обеспечить собственную функцию этого оператора при некотором значении периодичности. Согласование с СТО накладывает некоторые ограничения на выбор периодичности. Если диаметр области, где происходит распространение частицы в эксперименте, равен L, то необходимо выполнить неравенство

$$D\ge 2L/c. \tag{11.4}$$

Время L/c требуется для формирования ансамбля частиц, и такое же время будут длиться все измерения в однократном эксперименте. Статистика набирается после измерений на многих периодах в многократном эксперименте. Условие (11.4) фактически означает принцип неопределенности при измерении времени в квантовой механике:

$$\Delta t/\Delta x\ge 2/c,$$

$$\Delta t\ge\frac{2\Delta x}{c}. \tag{11.5}$$

При нарушении этого принципа результаты эксперимента в разных повторах будут соответствовать различным фазам формирования ансамбля частиц и могут дать ложные результаты в статистике.

Заметим, что периодичность во времени состояния квантовой системы в эксперименте иногда приводит к иллюзии о предвосхищении квантовой системой намерений экспериментатора. Фактически система адаптирована к предыдущим циклам измерений, но они аналогичны текущему циклу.

Особым случаем формирования волновой функции ансамбля является переход частицы в ансамбль собственной функции оператора измерения. Непосредственно в квантовой теории время этого перехода не рассматривается, что создало иллюзию теоретически мгновенного коллапса исходной волновой функции. Однако, если учесть, что измерительный прибор имеет макроскопические геометрические размеры, такой переход не может произойти быстрее чем за время (11.5), где Δx — диаметр функциональной части прибора. Этого времени достаточно для формирования нового ансамбля частиц. Старая волновая функция не коллапсирует. Если в эксперименте действует воспроизводимость волновой функции, то ансамбль измеряемых частиц сохраняется. А измеренная частица перешла из этого ансамбля в новый ансамбль, соответствующий ансамблевому состоянию выбранной собственной функции оператора измерения. При этом она получает новое индивидуальное состояние. И статистика таких новых индивидуальных состояний (при многократных измерениях) соответствует новому ансамблевому состоянию. Эти новые индивидуальные состояния проявляются при повторных измерениях или взаимодействиях на частицах, прошедших через исходное измерение.

Заключение

Можно говорить о трех видах объектов современной физики. Их классификация может быть проведена в терминах измеримости индивидуального состояния частицы.

Макроскопические объекты отличаются тем, что все компоненты индивидуального состояния у них измеримы в совокупности. Это означает возможность измерить любой набор компонент индивидуального состояния макроскопического объекта, причем это можно сделать одновременно или последовательно, поскольку корректные измерения на таких объектах не меняют их состояния. Это позволяет говорить о внутренней структуре таких объектов, инвариантной относительно наблюдений.

Квантовые объекты характеризуются альтернативной измеримостью компонент индивидуального состояния. Измерение любой компоненты возможно, но при этом безвозвратно теряется возможность измерить другие компоненты. После любого измерения состояние квантового объекта меняется, причем предсказать новое состояние можно только вероятностно. Поэтому говорить о внутренней структуре таких объектов с точки зрения строгой физики не имеет смысла.

Виртуальные объекты характеризуются невозможностью измерить ни одной компоненты индивидуального состояния. Для этого у них слишком малое время существования. В то же время предполагается, что каждый такой объект аналогичен по свойствам некоторому квантовому объекту. Это позволяет предсказывать и наблюдать макроскопические эффекты большого коллектива виртуальных частиц в вакууме. Такой коллектив можно рассматривать как новый макроскопический объект. Примером является наблюдение силы Казимира, или эффект потери заряда на поверхности вращающегося в вакууме цилиндра. Как и любой макроскопический объект, физический вакуум имеет наблюдаемую структуру, которая допускает повторные измерения.

В данной статье рассмотрен только класс квантовых объектов. Введено понятие индивидуального состояния частицы на уровне строгого математического определения в формализме квантовой механики. Показано, что наблюдаемые эффекты на потоках коррелированных частиц могут быть описаны в терминах альтернативно измеримых индивидуальных состояний без противоречия с релятивистской теорией и с классической квантовой механикой. При этом для объяснения сохранения квантовой статистики коррелированных частиц при прохождении частиц через волноводы приходится вводить новый постулат сохранения индивидуального состояния в любых средах до первой диссипации. Для сред с диссипацией квантовых частиц предложено модифицированное уравнение Шрёдингера, содержащее трение. Найдено и проанализировано решение такого уравнения, соответствующее одноразовому импульсному излучению из одной точки (функция Грина). Надо отметить, что необходимость объяснить эффект сохранения корреляции в волноводах возникает и в классической квантовой теории, даже без введения индивидуального состояния частиц. Можно отметить, что введенные постулаты (гипотезы) наличия индивидуального состояния частицы и его сохранения в процессах без диссипации энергии хорошо объясняют рассмотренные экспериментальные эффекты.

Для целей математического моделирования индивидуального состояния предложена конструкция оператора индивидуального состояния, базированная на плотной последовательности элементов пространства Гильберта. Для учета системы отсчета, в которой происходит измерение, введено понятие гильбертова комплекса и его сепарабельности. Доказано, что гильбертовы комплексы, на которых базированы различные варианты квантовой механики, обладают свойством сепарабельности, что позволяет вводить для них конструкцию индивидуального состояния частицы в указанной форме.

Список литературы

Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики (3-е изд.). — М.: Высшая школа, 1961.

Гриб А. А. Неравенства Белла и экспериментальная проверка квантовых корреляций на макроскопических расстояниях // УФН. — 1984. — Т. 142. — С. 619.

Коганов А. В. Введение индивидуального состояния кванта, совместимого с неравенствами Белла // XX Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование». — Пущино МО, 2013: тезисы докладов. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — С. 104 (ISBN 978-5-93972-950-5).

Коганов А. В. Введение индивидуального состояния квантовой частицы для согласования эффекта ЭПР с квантовой и релятивистской механиками // Восьмые Курдюмовские чтения «Синергетика в естественных науках», материалы конференции. — Тверь, ТвГУ, 2012. — С. 105–108.

Коганов А. В. Оператор индивидуального состояния квантовой частицы согласует эффект ЭПР и теорию относительности // Симметрии: теоретический и методический аспекты. Сборник трудов IV Международного симпозиума. — Астрахань, 2012. — С. 51–56 (ISBN 978-5-8087-0315-5).

Ферми Э. Квантовая механика. — М.: Мир, 1968. — 367 с.

Boom D. Quantum Theory // New York: Prentice Hall. — 1989 reprint, New York: Dover, ISBN 0-486-65969-0. — 1951.

Koganov A. V. Formalism for the Individual State of a Quantum Particle Compatible with the Bell Inequalities, and a Dissipative Environment Conjecture // Russian Journal of Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 21, No. 2. — P. 219–225. c_ Pleiades Publishing, Ltd., 2014 (ISSN 1061-9208).

Koganov A. V. The Formalism of quantum particle Individual State which is compatible with Bell inequalities // Physical Interpretations of Relativity Theory. Proceedings of International Scientific Meeting PIRT-2013. — Moscow, 1–4 July 2013, BMSTU, Moscow, 2013. — P. 150–157 (ISSN 2309-7604).

Reid M. D. et al. Colloquium: the Einstein–Podolsky–Rosen paradox: From concepts to applications // Reviews of Modern Physics. — 2009. — Vol. 81, No. 4. — P. 1727–1751. DOI:10.1103/RevModPhys.81.1727.

Rybakov Yu. P., Kamalov T. F. Entangled solitons and stochastic q-bits // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2007. — Vol. 4, No. 2. — P. 208–213.

Bell J. S. On the Einstein Podolsky Rosen paradox, "Physics", 1964. — Vol. 1. — P. 195.