

УДК: 519.6

## Модель анизотропной прочности со скалярным параметром поврежденности

О. Я. Извеков

Московский физико-технический институт,  
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: izvekov\_o@inbox.ru

Получено 17 ноября 2014 г.

В работе обсуждается возможность моделирования анизотропии прочности слоистой упругой среды с использованием скалярного параметра поврежденности. Сформулированы термодинамически согласованные определяющие уравнения. С помощью пакета SIMULIA/Abaqus моделируется процесс растяжения и сжатия образцов. Результаты расчета с использованием предложенной модели сравниваются с известными из литературы экспериментальными данными и предсказаниями традиционных моделей.

Ключевые слова: разрушение, теория поврежденности, анизотропия, термодинамическая согласованность, пользовательские подпрограммы

### Modeling of anisotropic strength using scalar damage parameter

O. Ya. Izvekov

*Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskii per., Dolgoprudnii, 141700, Russia*

**Abstract.** — The paper discusses the possibility of modeling the strength anisotropy of layered elastic medium using a scalar damage parameter. Thermodynamically consistent constitutive equations are formulated. Using SIMULIA / Abaqus we numerically simulated the stretching and compression of the samples. The results of calculation using the proposed model are compared with the known experimental data from the literature and the predictions of traditional models.

Keywords: damage mechanics, anisotropy, thermodynamically consistency, user subroutines

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для молодых ученых — кандидатов наук МК-7249.2013.5.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 6, pp. 937–942 (Russian).

## Введение

Моделирование разрушения материалов со структурой имеет большое значение для технических приложений. Сюда относятся вопросы не только прочности композиционных материалов, но и вопросы геомеханики добычи полезных ископаемых. Главным образом разрушение пород пласта применяется для интенсификации притока углеводородов (гидроразрыв пласта), а в некоторых случаях система трещин — чуть ли не единственный носитель проницаемости породы (сланцевый газ, баженовская свита). Как правило, геофизические среды имеют определенную структуру, обусловленную историей и условиями их формирования, что накладывает отпечаток на процессы разрушения.

Основные нетрадиционные запасы углеводородов России сосредоточены именно в нефтематеринской породе баженовской свиты [Сонич, 2001]. В породах баженовской свиты наряду с легкой нефтью, занимающей пустоты материнской породы, углеводороды содержатся также в связанном виде в керогене, твердом органическом веществе, в котором их среднее содержание составляет ~23 % от объема породы. Порода имеет сложные емкостные и фильтрационные свойства, кероген содержится в практически непроницаемой матрице, что является одной из главных причин низкой эффективности разработки месторождений баженовской свиты на естественном режиме.

По-видимому, наибольшие потенциальные возможности относительно вовлечения в промышленную разработку баженовской свиты имеют технологии и методы, использующие в том или ином виде тепловое воздействие на пласт. Эти способы могут подразумевать подвод энергии извне или генерацию ее в самом пласте за счет сжигания части углеводородов. Цель тепловых методов — превратить кероген в жидкую фракцию в пластовых условиях. Тепловое воздействие, достаточное для генерации флюида, порождает комплекс взаимосвязанных явлений. Например, физико-химические превращения органического вещества, повышение порового давления из-за разности плотности керогена и легких фракций. Последнее явление может приводить к генерации микротрещин, что в свою очередь изменяет пористость и фильтрационные свойства породы.

Адекватное описание поведения сланцев при тепловом и механическом воздействии требует разработки моделей, которые бы согласованно учитывали превращения энергии в разнообразных взаимосвязанных процессах. Термодинамический подход к согласованному моделированию разрушения, фазовых превращений, теплопередачи, фильтрации в духе рациональной механики К. Труделла развивался в работах профессора Кондаурова В. И. и его школы [Кондауров, 1988; Кондауров, Фортов 2001; Кондауров, Извеков 2009 и др.].

## Формулировка модели

Теория поврежденности дает феноменологическое описание эволюции рассеянных дефектов — пор и микротрещин, число которых в любом элементарном объеме предполагается весьма большим.

Первоначально понятие поврежденности ассоциировалось с долей пустот, возникающих в сечении стрежня под действием интенсивных нагрузок [Качанов, 1958; Работнов, 1959]. В случае многомерного напряженно-деформированного состояния эта наглядная интерпретация поврежденности наталкивается на трудности, связанные с необходимостью определять долю пустот в сечениях материального элемента с различной ориентацией нормали. Были предложены различные определения поврежденности материала, которые являются тензорными величинами, получаемыми осреднением параметров микроструктуры [Астафьев и др., 2001]. Однако, по-видимому, трактовка поврежденности на основе микроструктурных представлений является излишней. Действительно, на феноменологическом уровне наличие микропор и микротрещин приводит к двум основным эффектам — деградации упругих модулей и остаточным деформациям. Кроме того, в прикладных задачах, как правило, вопрос о преимущественной

ориентации микродефектов не стоит остро. Этот факт обусловлен структурой материала, которая часто известна заранее. Например, балка из дерева (это относится и к другим композиционным материалам) преимущественно разрушается расщеплением вдоль волокон (отслоением волокна от связующей матрицы). Также наличие плоскостей ослаблений (залеченных или открытых трещин и разломов), которые ориентированы особым образом, существенным образом влияет на результат техногенного воздействия на горную породу.

В работах [Кондауров, 1988; Кондауров, Фортов 2001; Кондауров, Извеков 2009] обсуждается модель изотропного повреждающегося тела, в которой используется скалярный параметр поврежденности  $\omega$ , тесно связанный с энергией, затрачиваемой на появление новых поверхностей при растрескивании. На данном этапе строится модель повреждающегося начально изотропного материала с анизотропией прочности также с использованием скалярного параметра поврежденности, который считается связанным с поверхностной энергией микродефектов. Тип анизотропии, который приобретает материал, обусловлен ее структурой. В данном случае рассматривается среда, набранная из одинаковых плоскопараллельных слоев, «склеенных» друг с другом. Межслоевая прочность на разрыв и сдвиг считается ниже прочности материала, из которого состоят сами слои, что определяет преимущественную ориентацию микроповреждений. В этом случае нет необходимости вводить тензорную меру деформации, а скалярную меру поврежденности становится возможным и в анизотропном случае трактовать в терминах необратимых затрат энергии на появление новых поверхностей.

Термодинамически согласованные определяющие соотношения для повреждающейся среды формулируются следующим образом [Кондауров, Извеков 2009]:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \psi(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \mathbf{e}}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\tau A} \left\langle -\frac{\partial \psi(\mathbf{e}, \omega)}{\partial \omega} \right\rangle, \quad \langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2}$$

где  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений,  $\psi$  — упругий потенциал,  $\mathbf{e}$  — тензор малых деформаций,  $\tau$ ,  $A$  — размерные коэффициенты. Кинетическое уравнение сформулировано таким образом, чтобы диссипация энергии, связанная с развитием поврежденности, была неотрицательна в любых процессах деформирования.

Будем развивать вариант модели поврежденности, когда упругие модули остаются постоянными, а поврежденность на макроуровне проявляется в остаточных деформациях. Рассмотрим случай трансверсальной изотропии, когда существует неискаженная отсчетная конфигурация с группой симметрии, равной группе вращений вокруг некоторого единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Физически, вектор  $\mathbf{n}$  — нормаль к однородным плоскопараллельным слоям, из которых набран материал. В качестве аргументов  $\psi$ , удовлетворяющих этому условию можно взять три независимых инварианта  $\mathbf{e}$  и два смешанных инварианта  $J_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{n}$ ,  $J_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{n}$ . Третьим инвариантом  $\mathbf{e}$ , как правило, пренебрегается, а в качестве двух других инвариантов  $\mathbf{e}$  возьмем  $I_1 = \mathbf{e} : \mathbf{I}$  и  $J = \sqrt{\mathbf{e}' : \mathbf{e}'}$ , где  $\mathbf{e}' = \mathbf{e} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}$  — девиатор тензора малых деформаций. Пусть свободная энергия имеет вид [Izvekov, Pavlov, 2014]

$$\psi(I_1, J, J_1, J_2, \omega) = \gamma\omega + \frac{1}{2} A\omega^2 - \alpha_1 \omega I_1 - \alpha_J \omega J - \alpha_{J_1} \omega J_1 + \frac{K}{2} I_1^2 + \mu J^2. \tag{3}$$

Слагаемое  $\gamma\omega + \frac{1}{2} A\omega^2$  характеризует затраты энергии на развитие поврежденности, слагаемое  $-\alpha_1 \omega I_1 - \alpha_J \omega J - \alpha_{J_1} \omega J_1$  характеризует разгрузку упругой энергии при развитии повреж-

денности с учетом ориентации оси анизотропии к главным осям тензора деформации, слагаемое  $\frac{K}{2} I_1^2 + \mu J^2$  характеризует накопленную упругую энергию.

С учетом (2) и (3) кинетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{\tau A} \langle \alpha_1 I_1 + \alpha_J J + \alpha_{J_1} J_1 - \gamma - \beta \omega \rangle. \quad (4)$$

Условие начала развития поврежденности  $\partial \omega / \partial t > 0$ ,  $\omega = 0$  с учетом (4) дает

$$\alpha_1 I_1 + \alpha_J J + \alpha_{J_1} J_1 - \gamma = 0. \quad (5)$$

Предложенная модель реализована в прикладном пакете SIMULIA/Abaqus с помощью пользовательской подпрограммы UMAT.

Пользовательские подпрограммы комплекса Abaqus расширяют его возможности, являются очень удобным и гибким инструментом для различного рода задач. Они служат для задания упругих, термических, электрических и других свойств материалов, не предусмотренных в стандартной библиотеке, и для многих других полезных возможностей. В частности, для задания релогических свойств при квазистатическом нагружении предусмотрена подпрограмма UMAT, для термических — UMATHT, причем возможно их одновременное использование для расчета связанных задач, например, термоупругости. В случае динамического нагружения используется подпрограмма VUMAT и т. д.

## Результаты расчетов

### Поведение при растяжении

Проведен тестовый расчет для одноосного растяжения цилиндрического образца. Параметры модели  $\alpha_1/\gamma = 160$ ,  $\alpha_J/\gamma = 161$ . При растяжении образца получается монотонная зависимость критического напряжения  $f$  (будем называть его «прочность на разрыв»), при котором начинает накапливаться поврежденность, от угла  $\beta$  между плоскостью слоев и осью нагрузки. Таким образом, прочность на разрыв минимальна при растяжении поперек слоев и максимальна вдоль слоев, что хорошо соответствует поведению при растяжении композиционных материалов с одной осью симметрии.

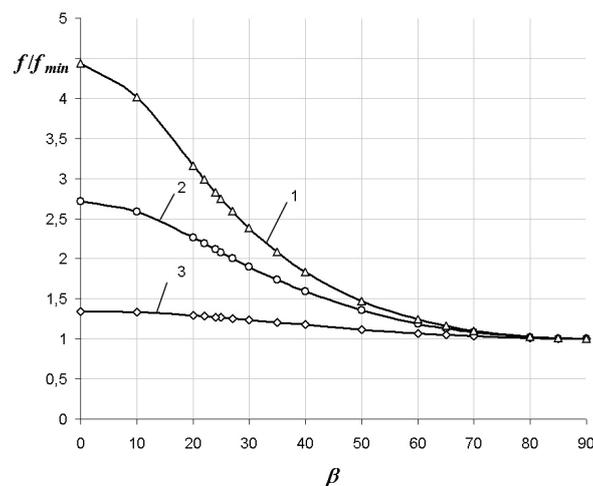


Рис. 1. Относительная прочность на разрыв в зависимости от угла для различных значений параметра  $\alpha_{J_1}$ . 1 —  $\alpha_{J_1}/\gamma = 10^3$ , 2 —  $\alpha_{J_1}/\gamma = 500$ , 3 —  $\alpha_{J_1}/\gamma = 100$

### Поведение при сжатии

Проведен тестовый расчет на сжатие в следующей постановке. Слоистый кубический образец сжимается вдоль вертикальной оси. Боковое обжатие равно нулю. На верхней и нижней границе ставятся условия проскальзывания. Вычисляется критическое давление  $p$  на верхнюю грань, при котором начинает развиваться поврежденность (будем называть это давление «прочность на сжатие»). Параметры модели  $\alpha_1/\gamma = 160$ ,  $\alpha_j/\gamma = 161$ ,  $\alpha_{j1}/\gamma = 100$ .

В инженерной практике распространена модель горной породы, содержащей одну или несколько независимых систем параллельных плоскостей ослабления. Основной особенностью этой модели является то, что материал не сопротивляется растягивающим нагрузкам, а необратимые пластические деформации формируются за счет сдвига вдоль слоев. Критерием пластичности является закон трения Кулона вдоль слоев

$$\tau_n - p_n \operatorname{tg} \phi - c = 0,$$

где  $\tau_n$  — касательное напряжение вдоль слоев,  $p_n$  — нормальное напряжение поперек слоев,  $\phi$  — угол внутреннего трения,  $c$  — сцепление. Модель содержится в библиотеке материалов ABAQUS (ключевое слово JOINT MATERIAL). В расчетах использованы  $\phi = 22.5^\circ$ ,  $c/E = 10^{-4}$ , где  $E$  — модуль Юнга.

Сравнение расчетов по указанным моделям с экспериментальными данными, опубликованными в литературе [Sargolou, 2008], приведено на рисунке 2.

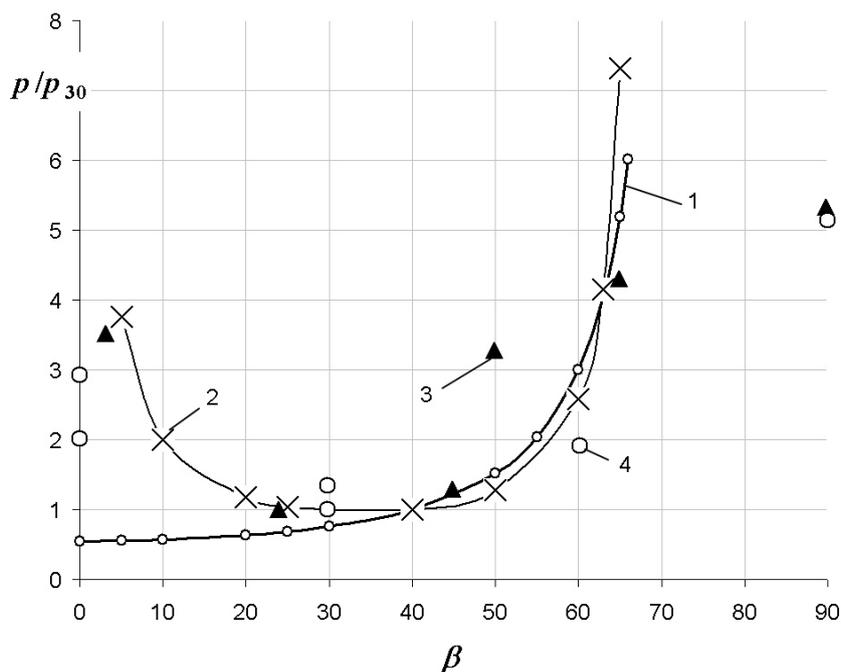


Рис. 2. Зависимость относительной прочности от угла. 1 — расчет по модели поврежденности, 2 — расчет по JOINT MATERIAL, 3, 4 — экспериментальные данные

Результаты расчетов по модели JOINT MATERIAL и экспериментальные данные свидетельствуют о немономонном характере зависимости прочности от угла между плоскостью слоев и осью главного напряжения (в рассмотренном примере — вертикальная нагрузка на образец). Минимальная прочность, как правило, реализуется при углах  $\beta$  в диапазоне  $30^\circ$ – $40^\circ$ . Однако, построенная модель, как и при растяжении, показывает монотонную зависимость.

В качестве вывода отметим следующее. Показана принципиальная возможность описывать анизотропную прочность с помощью скалярного параметра поврежденности. Модель по-

врежденности, основанная на предложенной форме упругого потенциала (3), качественно соответствует поведению среды с анизотропией прочности при растягивающей нагрузке, но дает неверный результат при сжатии. Последний факт требует дополнительных исследований по согласованию предсказаний модели во всем диапазоне нагрузок, от растягивающих до сжимающих.

## Список литературы

- Астафьев В. А., Радаев Ю. Н., Степанова Л. В.* Нелинейная механика разрушения. — Самара: Издательство «Самарский университет», 2001.
- Извеков О. Я., Кондауров В. И.* Модель пористой среды с упругим трещиноватым скелетом // Известия РАН. Физика Земли. — 2009. — № 4. — С. 31–42.
- Качанов Л. М.* О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. — 1958. — С. 26–31.
- Кондауров В. И.* Энергетический подход к задаче континуального разрушения твердого тела // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1986. — № 6. — С. 17–22.
- Кондауров В. И., Фортвов В. Е.* Основы термомеханики конденсированных сред. — М.: МФТИ, 2002.
- Работнов Ю. Н.* Механизм длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. — М.: Издательство АН СССР, 1959. — С. 5–7.
- Сонич В. П., Батулин Ю. Е., Малышев А. Г., Зарипов О. Г., Шеметилло В. Г.* Проблемы и перспективы освоения Баженовской свиты // Нефтяное хозяйство. — 2001. — № 9. — С. 63–68.
- Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975. — С. 592.
- Izvekov O., Pavlov V.* Thermodynamically consistent model of damage in laminated rocks // Key Engineering Materials. — 2014. — Vols. 592–593. — P. 129–132.
- Saroglou H., Tsiambaos G.* A modified Hoek–Brown failure criterion for anisotropic intact rock // International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences. — 2008. — Vol. 45. — P. 223–234.