КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 5 С. 839−859

Ки&М

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ И СОЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

УДК: 330.4.51-77

Использование методов теории управления для формирования рыночных структур

Л. Е. Варшавский

Центральный экономико-математический институт РАН,
Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский пр., д. 47

E-mail: hodvar@ mail.ru

Получено 7 октября 2014 г.

В статье рассматриваются методы формирования рыночных структур при ориентации участников возникающих рынков на максимально возможные темпы роста, а также при ориентации их на максимизацию показателей экономической эффективности. Для первого случая разработан метод достижения желаемой структуры рынка, основанный на использовании принципов теории систем с переменной структурой. Для случая ориентации фирм на достижение максимума NPV рассматривается игровой подход к поддержанию конкурентной среды, основанный на эффективном методе расчета оптимальных по Нэшу–Курно и по Штакельбергу стратегий с помощью аппарата Z-преобразования.

Ключевые слова: рыночные структуры, олигополистические рынки, системы с переменной структурой, динамические игры, оптимальные стратегии

Control theory methods for creating market structures

L. E. Varshavsky

Central Economics and Mathematics Institute RAS, 47 Nahimovskii ave., Moscow, 117418, Russia

Abstract. — Control theory methods for creating market structures are discussed for two cases: when market participants are pursuing aims 1) of maximal growth and 2) of maximum economic efficiency of their firms. For the first case method based on variable structure systems principles is developed. For the second case dynamic game approach is proposed based on computation of Nash–Cournot and Stackelberg strategies with the help of Z-transform.

Keywords: market structures, oligopolistic markets, variable structure systems, dynamical games, optimal strategies

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 5, pp. 839–859 (Russian).

Введение

Создание и поддержание рыночной конкурентной среды представляет собой одну из важнейших задач, стоящих перед органами государственного управления экономикой. В ходе ускорения технологических изменений возникают рынки новых продуктов, которые, в силу неравномерности технологического развития могут быть монополизированы одной из фирм. Риск монополизации особенно высок в капитало- и наукоемких отраслях, требующих для разработки и производства продукции значительных научно-производственного потенциала, финансовых и инвестиционных ресурсов. Зависимость от одного производителя или целиком от иностранных производителей недопустима, когда выпускаемая продукция имеет жизненно важное значение для экономики или безопасности страны.

С целью защиты и повышения конкурентоспособности своих производителей во многих странах распространена практика предоставления им субсидий. Подобные меры начинают использоваться в более широких масштабах и в нашей стране. Они намечены, в частности, в Государственной программе Российской Федерации «Развитие авиационной промышленности на 2013–2025 годы». В январе 2014 года Правительством Российской Федерации, принят блок постановлений, относящихся к предоставлению российским производителям автомобилей субсидий из федерального бюджета. Получателями субсидий могут быть «национальные компании, производящие моторные транспортные средства либо в режиме промышленной сборки, либо в качестве резидента особой экономической зоны» [Ламберт, 2014].

Следует отметить, что понимание недопущения монополизации производства жизненно важной продукции возникло в нашей стране еще в советское время, когда начиная с конца 1950-х гг. в ряде отраслей оборонно-промышленного комплекса была создана конкуренция между НИИ. КБ и производственными объединениями близкого профиля. Примерно в то же время в США была реализована идея «второго источника», появление которой связывают с бывшим министром обороны Р. Макнамара [Джексон, 1998]. Появление «второго источника» позволяет не только снизить риски прекращения разработки и производства жизненно необходимой продукции, но и во многих случаях снизить цену для потребителей.

Классическим примером «второго источника» является компания AMD, которая в 1982 году «по запросу IBM» подписала «соглашение об осуществлении функции второго поставщика микропроцессоров для персональных компьютеров IBM наряду с Intel» [http://www.amd.com/ru-ru/who-we-are/corporate-information/history]. Эта компания, несмотря на часто возникающие убытки и большую величину долгосрочного долга, тем не менее стабильно поддерживается акционерами и потребителями в лице производителей компьютеров. Некоторые примеры соглашений о «втором источнике» в электронной промышленности приведены в таблице 1.

Следует, однако, отметить, что исследованию экономико-математических методов формирования рыночных структур и поддержания конкуренции *в динамике* в научной литературе уделяется, по нашему мнению, недостаточно внимания. В работе автора [Варшавский, 2003, гл. 8] применительно к дуополии рассматривался ряд таких методов, основанных, в частности, на использовании принципов теории система с переменной структурой (см., например, [Емельянов 1967; Уткин, 1981; DeCarlo, Zak, Matthews, 1988]. Эти принципы могут быть достаточно просто и эффективно реализованы при управлении нелинейными системами (к этому классу систем относится и рассматривавшаяся в [Варшавский, 2003, гл. 8] модель конкуренции дуополистов, близкая по своему виду к моделям конкуренции в биологии и экологии).

В настоящей статье рассматриваются методы формирования рыночных структур при ориентации участников возникающих рынков на максимально возможные темпы роста, а также при ориентации их на показатели экономической эффективности. Соответственно, статья состоит из двух частей. В первой части проводится анализ динамики показателей фирм, развивающихся в условиях самофинансирования как без финансовой поддержки, так и при ее наличии. Рассматриваемый метод поддержания конкурентной среды состоит в предоставлении отстающим фирмам субсидий таким образом, чтобы обеспечивалась по возможности стабильная структура рынка, характеризуемая, например, заданными рыночными долями фирм. Для определения величины субсидий используются принципы теории систем с переменной структурой.

Таблица 1. Примеры соглашений о «втором источнике» в электронной промышленности

Компания-разработчик нового продукта (технологии)	Компания-«второй источник»	Рынок	Лицензируемый продукт	Год заключения соглашения
FCI Electronics	Samtec Inc.	высокоскоростные межсоединения	высокосророcтные соединения следующего поколения ExaMAX®, разработанные FCI Electronics	2014
Soitec	IntelliEPI	полупроводники на основе арсенида галлия (GaAs)	технологии компании Soitec	2013
Integrated Device Technology, Inc. (IDT)	Texas Instruments inc.	переключательные устройства для телекоммуникационных систем	высокосророcтные переключательные устройства, разработанные компанией IDT	2001
Microsemi	Motorola	выпрямители для смартфонов и ноутбуков на основе эффекта Шоттки	пакет выпрямителей Powermite(R) малого размера, разработанный компанией Microsemi	1996

Источники:
http://www.fci.com/en/press/press-library/2014/corporate-and-financial/fci-samtec-announces-new-strategic-partnership.html;
http://www.soitec.com/en/news/press-releases/soitec-and-intelliepi-enter-in-collaboration-agreement-to-better-serve-the-gallium-arsenide-gaas-market-1396/; http://www.eetimes.com/document.asp?doc_id=1129403.

Во второй части статьи рассматривается игровой подход к созданию и поддержанию конкурентной среды путем расширения инвестиционных возможностей фирм, отстающих от лидера, но ориентированных на достижение максимальной экономической эффективности. Предлагаемый метод основан на развиваемом автором подходе к расчету оптимальных игровых стратегий путем использования аппарата Z-преобразования, для которого характерны относительная простота вычислений и необходимая для экономического анализа наглядность [Варшавский, 2011a; Варшавский, 2011b; Варшавский, 2012].

Формирование рыночных структур при ориентации фирм на максимально возможный рост

Динамика показателей фирм, ориентированных на максимально возможный рост в условиях самофинансирования

В настоящем разделе предполагается, что стратегия участников рынка однородной продукции (фирм) состоит в инвестировании всей получаемой прибыли в развитие производства. Предполагается линейная зависимость объемов производства $Q_i(t)$ от стоимости основного капитала $K_i(t)$, т. е. $Q_i(t) = g_i * K_i(t)$, где g_i — капиталоотдача, $i = 1, 2, \ldots N$, N — число участников рынка (фирм). Тогда динамика основного капитала *i*-той фирмы описывается следующим уравнением:

$$\frac{dK_i}{dt} = f_i K_i [p(Q) - c_i], \quad i = 1, 2, \ldots N, \tag{1}$$

где $p(Q)$ — обратная функция спроса, характеризующая связь между ценой продукта и суммарным объемом его выпуска $Q(t) = \sum_{i=1}^{N} Q_i(t)$ (предполагается, что она является монотонно убывающей функцией $Q(t)$), $f_i = (1 - tax) * g_i$, tax — ставка налога на прибыль, c_i — операционные затраты в расчете на единицу выпускаемой продукции (модель с непрерывным временем в данном разделе используется для упрощения выводов).

Как правило, на рынках высокотехнологичной продукции присутствует лидер, имеющий наилучшие экономические показатели. Будем считать, что

$$f_i \le f_N \text{ и } c_i \ge c_N, \; i = 1, 2, \dots N. \tag{2}$$

Для анализа процессов конкуренции на основе моделей типа (1) удобно использовать соотношения между объемами производства каждого *i*-го участника и *N*-го (лидера):

$$\alpha_i = \frac{Q_i}{Q_N} = \frac{g_i K_i}{g_N K_N}, \tag{3}$$

$i = 1, 2, \dots N - 1$.

Очевидно эти относительные объемы производства связаны с рыночными долями фирм $s_i = \dfrac{g_i K_i}{\sum_{j=1}^{N} g_j K_j}$ следующими соотношениями:

$$s_i = \alpha_i s_N, \; i = 1, 2, \dots N - 1, \text{ причем } \sum_{i=0}^{N} \alpha_i = \frac{1}{s_N} \tag{4}$$

Тогда, принимая допущение о постоянстве всех f_i и g_i, можно получить следующее уравнение динамики относительных объемов производства α_i:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \alpha_i [(f_i - f_N) p(Q) + (f_N c_N - f_i c_i)]. \tag{5}$$

Для устойчивого функционирования рынка необходимо, чтобы цена была выше минимальных удельных затрат, т. е. $p(Q) \ge c_N$ (можно показать, что это неравенство соблюдается во все моменты времени, если в начальный момент цена превышает c_N; см. доказательство в утверждении 1 приложения). При этом допущении справедливо

$$[(f_N - f_i) p(Q) + (f_i c_i - f_N c_N)] \ge [(f_N - f_i) c_N + (f_i c_i - f_N c_N)] = f_i (c_i - c_N) \ge 0. \tag{6}$$

Вследствие этого

$$\frac{d\alpha_i}{dt} \le \alpha_i f_i (c_N - c_i) \le 0 \text{ и } \alpha_i(t) \le \alpha_{i0} \exp\{f_i (c_N - c_i) t\} \to 0 \text{ при } t \to \infty, \tag{7}$$
$$i = 1, 2, \dots N - 1.$$

Таким образом, в силу (4) $s_N(t) \to 1$ при $t \to \infty$, т. е. в конечном счете на рынке остается только лидер.

В случае равенства капиталоотдачи всех участников рынка, т. е. при $f_i = f_i$, $i = 1, 2, \dots N$, из (5) можно получить замкнутые выражения для расчета величин относительных объемов производства α_i и рыночных долей s_i:

$$\alpha_i(t) = \alpha_{i0} \exp\{f_i (c_N - c_i) t\}, \tag{8a}$$

$$s_i(t) = \frac{s_{i0} \exp\{f_i (c_N - c_i) t\}}{\sum_{j=1}^{N} s_{j0} \exp\{f_j (c_N - c_j) t\}}, \tag{8b}$$

практически совпадающие с выражениями, описывающими динамику концентрации конкурирующих компонентов в ряде физико-химических процессов [Эбелинг, 1979, с. 209].

Поддержание конкуренции при ориентации фирм на максимально возможный рост

В связи с вытеснением с рынка фирм с худшими, чем у лидера, экономическими показателями, возникает угроза монополизации рынка со всеми ее негативными последствиями (включая рост цен). Такое положение недопустимо, когда выпускаемая продукция имеет жизненно важное значение для экономики или безопасности страны. Один из подходов к поддержанию конкуренции состоит в предоставлении отстающим фирмам субсидий таким образом, чтобы обеспечивалась по возможности стабильная структура рынка, характеризуемая, например, рыночными долями s_i^*, $i=1,2,...N$. Для определения величины субсидий могут быть использованы методы теории систем с переменной структурой [Варшавский, 2003].

Предлагаемый в настоящем разделе метод основан на формировании таких управляющих воздействий (субсидий) $U_i(t)=u_i(t)Q_i(t)$, которые обеспечивают достижение фирмами положения устойчивого равновесия, характеризуемого постоянными рыночными долями s_i^*, а также величинами $\alpha_i^* = \dfrac{s_i^*}{s_N^*}$, $i=1,2,...N$. Введя в выражение (5) $U_i(t)=u_i(t)Q_i(t)$, получим

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \alpha_i[(f_i - f_N)p(Q) + (f_N c_N - f_i c_i + f_i u_i)]. \tag{5a}$$

Для нахождения $u_i(t)$ может использоваться второй метод Ляпунова со следующей функцией Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(\alpha_i - \alpha_i^*)^2 . \tag{9}$$

Производная этой функции имеет следующий вид:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N-1}(\alpha_i - \alpha_i^*)\frac{d\alpha_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N-1}(\alpha_i - \alpha_i^*)\alpha_i[(f_i - f_N)p(Q) + (f_N c_N - f_i c_i + f_i u_i)] . \tag{10}$$

Она принимает отрицательное значение, если формировать $u_i(t)$ следующим образом:

$$u_i(t) = \frac{1}{f_i}[(f_N - f_i)p(Q) + (f_i c_i - f_N c_N)] * I(\alpha_i^* - \alpha_i) \text{ при } s_N = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{N}\alpha_i} < s_N^*, \tag{11a}$$

$$u_i(t) = \frac{(1+\varepsilon_i)}{f_i}[(f_N - f_i)p(Q) + (f_i c_i - f_N c_N)] * I(\alpha_i^* - \alpha_i) \text{ при } s_N = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{N}\alpha_i} \ge s_N^*, \tag{11b}$$

где $I(x)$ — единичная функция: $I(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0 \\ 0 \text{ при } x \le 0 \end{cases}$, $\varepsilon_i > 0$ — подбираемая величина, обеспечивающая положительность $u_i(t)$, $i=1,2,...N-1$ (см. доказательство возможности такого выбора в утверждении 2 приложения).

Формирование субсидий в соответствии с алгоритмом (11a), (11b) обеспечивает достижение требуемой рыночной структуры, характеризуемой рыночными долями s_i^*. Опыт использования этого алгоритма показывает, что в качестве аргумента единичной функции $I(x)$ может использоваться $x = s_i^* - s_i$. Следует, однако, иметь в виду, что при приближении к положению равновесия может наблюдаться так называемое «дрожание» (chattering) управляющих воздействий. В таких случаях целесообразно осуществлять сглаживание $u_i(t)$ путем использования подходящих фильтров.

Практически без изменений рассмотренный выше подход к стимулированию конкуренции может быть использован и в случае дуополии, в частности когда на рынке присутствует компания-лидер и компания-последователь, выступающая в роли «второго источника».

В этом случае модель (1) выглядит следующим образом:

$$\frac{dQ_1}{dt} = f_1 Q_1 [p(Q) - c_1], \tag{1a}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = f_2 \{Q_2 [p(Q) - c_2] + RQ_1\}, \tag{1b}$$

где R — ройялти, выплачиваемые «вторым источником» компании-лидеру. В этой модели динамика соотношения между объемами производства «второго источника» и лидера описывается следующим уравнением:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_1 [(f_1 - f_2) p(Q) + (f_2 c_2 - f_1 c_1) - f_2 R \alpha_1], \tag{5b}$$

а к управлению $u_i(t)$ в формулах (11a), (11b) добавляется слагаемое $(f_2 / f_1) R\alpha_1$.

Предложенный подход может быть без изменений использован и тогда, когда лидер сам устанавливает цены, руководствуясь уровнем своих затрат (включая расходы на исследования и разработки), а «второй источник» — величиной цены лидера (одним из наглядных примеров этого служит рынок микропроцессоров x86). При этом $p_1(t) = p(t) > c_2$, $p_2(t) = \varsigma p_1(t) = \varsigma p(t)$ и остаются справедливыми соотношения, аналогичные (11a), (11b).

Результаты моделирования

Исследование динамики системы (1), (5a) с управлениями (11a), (11b) проводилось на примере рынка однородной продукции и с линейной функцией обратного спроса $p_t = 120 - 0{,}015 \sum_{i=1}^{3} Q_{it}$ и с тремя участниками, характеризующимися показателями, близкими к показателям участников рынка микропроцессоров x86 [Варшавский, 2003; Инновационный менеджмент в России, 2004, гл. 17]. Значения параметров модели приведены в таблице 2.

В расчетах использовался дискретный вариант модели (1). На рисунке 1, 2 представлена динамика рыночных долей фирм s_{it} и управляющих воздействий (субсидий) u_{it}, $i = 1,2$.

Таблица 2. Значения параметров модели в условном примере

№ фирмы	1	2	3
c_i	125.0	109.2	98.3
f_i	0.01	0.012	0.015
s_i^*	0.1	0.15	0.75
ε_i	0.5	0.5	

В связи со скачкообразным характером динамики управляющих воздействий использовался сглаживающий фильтр:

$$v_{it} = \mu v_{it-1} + (1-\mu) u_{it}\,; \; U_i(t) = v_{it} Q_i(t). \tag{12}$$

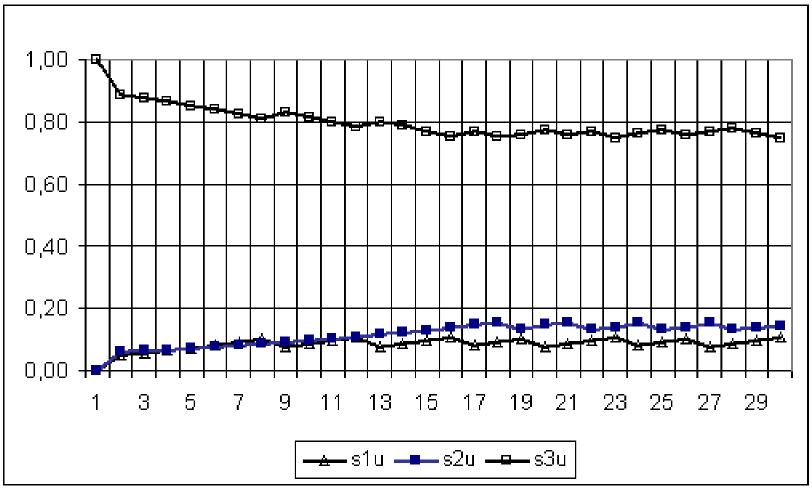

Рис. 1. Динамика рыночных долей фирм s_{it} (расчеты без фильтра (12))

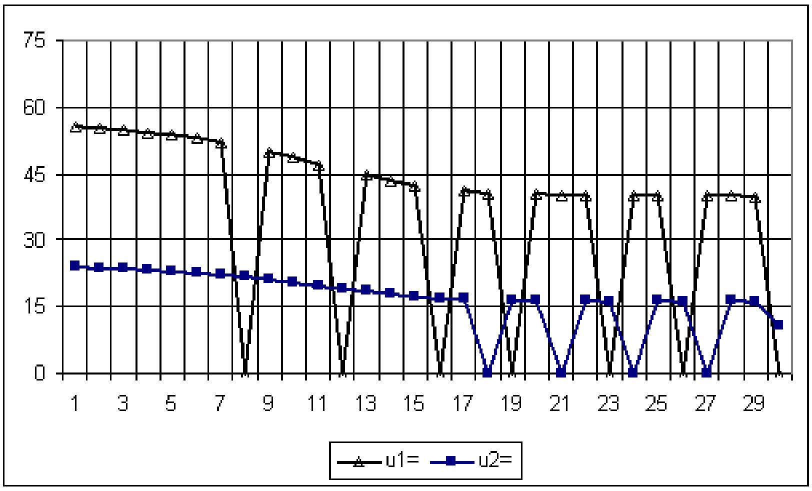

Рис. 2. Динамика удельных субсидий фирм u_{it}, усл. ед. (расчеты без фильтра (12))

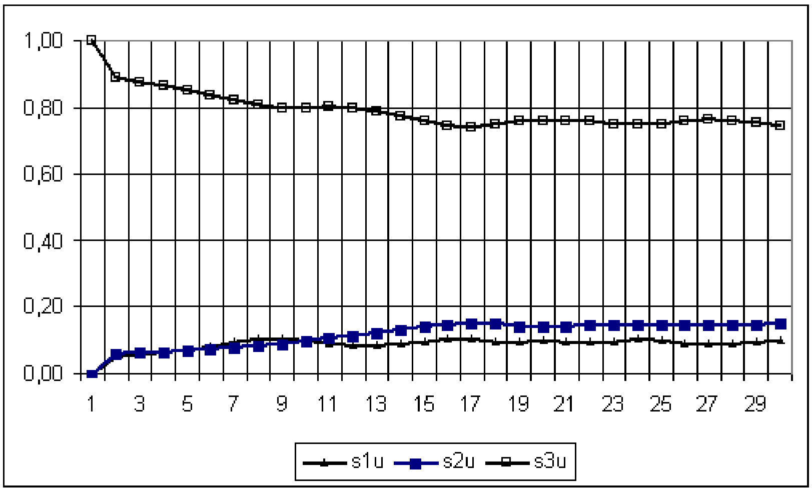

Рис. 3. Динамика рыночных долей фирм s_{it} (расчеты с фильтром (12))

На рисунках 3, 4 приведена динамика рыночных долей фирм s_{it} и управляющих воздействий v_{it}, $i = 1, 2,$ при включении в модель фильтра (12) со значением параметра μ, равным 0.7. Использование фильтра обеспечивает существенно более плавное изменение управляющих переменных практически без ухудшения качества характеристик переходного процесса.

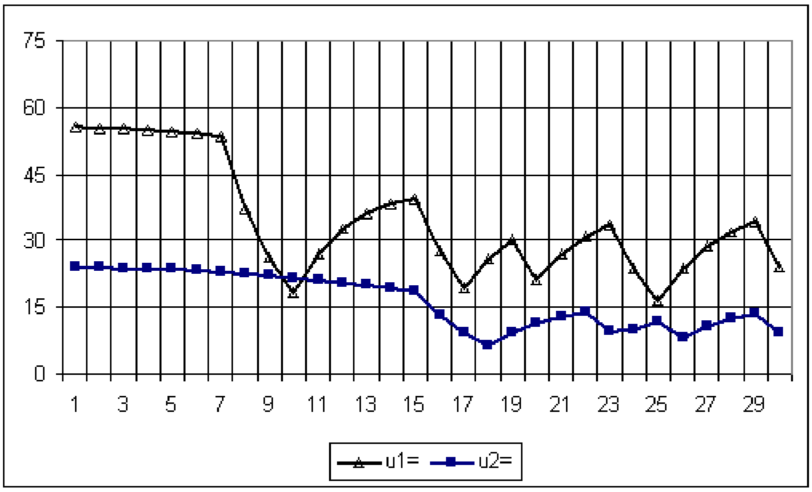

Рис. 4. Динамика удельных субсидий фирм v_{it}, усл. ед. (расчеты с фильтром (12))

Следует отметить также значительное уменьшение цены, обеспечиваемое в результате используемого подхода к поддержанию конкурентной среды (рис. 5).

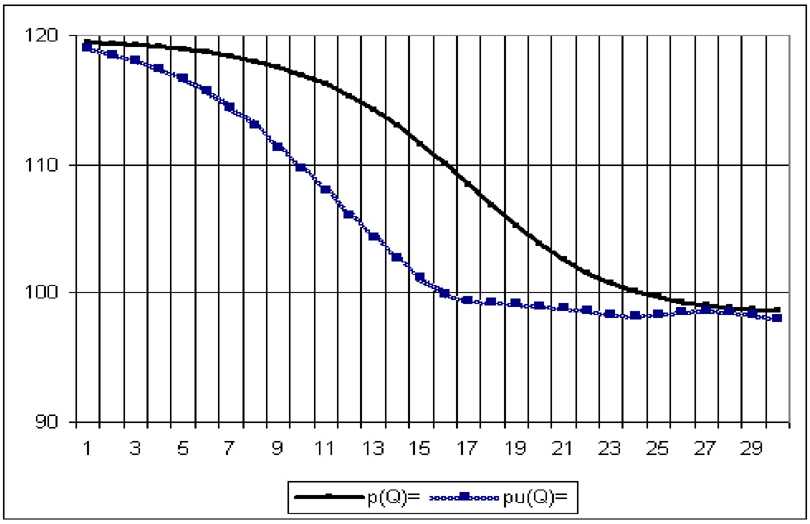

Рис. 5. Динамика цены при отсутствии ($p(Q_t)$) и наличии мер по поддержанию конкуренции ($p_u(Q_t)$), усл. ед.

Формирование рыночных структур при ориентации фирм на максимизацию показателей эффективности

При ориентации фирм на максимизацию показателей эффективности представляет интерес исследование равновесных стратегий по Нэшу–Курно и Штакельбергу. Проводимый в настоящей статье анализ основан на использовании агрегированной динамической модели рационального поведения участников олигополии в виде линейной динамической игры по Нэшу–Курно или Штакельбергу с квадратичными критериями, в которой участвуют N фирм-олигополистов [Варшавский, 2004, 2007, 2011a, 2011b, 2012].

Центральным блоком модели является следующая зависимость, связывающая объемы производства Q_{it} со входной переменной u_{it} (производственными инвестициями или вводом мощностей), i — индекс фирмы, $i = 1,2,...,N$:

$$Q_{it} = W_i(z)\, u_{it} + Q_{0it} \; = \frac{B_i(z)}{A_i(z)} u_{it} + Q_{0it}, \tag{13}$$

где $W_i(z) = B_i(z)/A_i(z)$ — передаточная функция, причем $A_i(z)$, $B_i(z)$ — полиномы относительно переменной z, представляющей собой оператор сдвига: $zx_t = x_{t+1}$,

$$A_i(z) = \sum_{i=0}^{n} a_{ik} z^k, B_i(z) = \sum_{j=0}^{m} b_{ij} z^j, m \le n, \tag{14}$$

имеющие корни, не превышающие по модулю 1, причем $W_i(1) > 0$; Q_{0t} — объем производства при отсутствии инвестиций.

Другой блок модели — обратная функция (оператор) спроса. В модели предполагается баланс суммарного спроса D_t и предложения Q_t, т. е. $D_t = Q_t = \sum_{i=1}^{N} Q_{it}$ и линейная зависимость цены на рынке p_t от объема спроса:

$$p_t = a - bD_t = a - bQ_t, \tag{15}$$

a, b — постоянные параметры.

Предполагается, что олигополисты максимизируют чистую текущую стоимость (NPV) с учетом затрат регулирования (adjustment costs):

$$J_i^{'} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [(p_t - c_i)Q_{it} - q_i u_{it} - \frac{1}{2}\rho_i u_{it}^2] \to \max_{u_{it}}, \tag{16}$$

где $\beta = 1/(1+r)$ — дисконтирующий множитель, соответствующий ставке дисконтирования r; p_t — цена продукции; c_i — средние удельные производственные издержки; q_i — стоимость единицы мощностей; $\frac{1}{2}\rho_i u_{it}^2$ — затраты регулирования (см., например, [Варшавский, 2003; Gordon, 1992]), причем ρ_i — коэффициент, характеризующий инвестиционные возможности олигополистов (при прочих равных условиях чем меньше его величина, тем эти возможности больше), $i = 1,2,...,N$. Управляющими переменными в модели являются объемы ввода мощностей (или инвестиции в основной капитал) u_{it}, $i = 1,2,...,N$.

Следует отметить, что используемые в настоящее время методы анализа оптимальных стратегий олигополистов и динамики показателей рыночной структуры основаны на решении обобщенных (generalized, в англоязычной литературе используются также термин coupled) матричных уравнений Риккати (см., например, [Dockner, Jorgenson, 2000; Basar and Olsder, 1995; Reynolds, 1986; Reynolds, 1987; Варшавский, 2007]). Получаемые при этом решения не обладают достаточной наглядностью, требуемой при анализе влияния тех или иных параметров и показателей моделей на исследуемые экономические переменные. Более того, при некоторых значениях параметров моделей решения уравнений Риккати, имеющие экономический смысл, вообще могут отсутствовать, в то время как оптимальные игровые стратегии существуют [Engwerda, 2006]. Особенно усложняется ситуация при определении оптимальных по Штакельбергу стратегий участников, когда возникает необходимость решения двухточечной задачи повышенной, по сравнению с оптимизацией по Нэшу–Курно, размерности [Simaan, Cruz, 1973; Basar and Olsder, 1995].

Эффективный подход к определению оптимальных разомкнутых (open-loop) игровых стратегий олигополистов с критерием (16) основан на использовании широко распространенного при исследовании дискретных систем управления и в теории связи Z-преобразования (см., например, [Кузин, 1962; Jury, 1964; Дорф, Бишоп, 2004]) и нахождении экстремума функционалов в гильбертовом пространстве [Варшавский, 2011a; Варшавский, 2011b; Варшавский, 2012]. Если ввести скалярное произведение элементов (функций) x_t и y_t :

$$\left\langle y_t\ ,\ x_t \right\rangle \ = \ \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t y_t x_t\ , \tag{17}$$

для которого выполняются все аксиомы скалярного произведения в гильбертовом пространстве [Колмогоров, Фомин, 1972], то критерий оптимальности i-го олигополиста (16) можно переписать в виде

$$J_i^{'} = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[(p_t - c_i)Q_{it} - q_i u_{it} - \frac{1}{2}\rho_i u_{it}^2] = \left\langle (p_t - c_i), Q_{it} \right\rangle - \left\langle q_i, u_{it} \right\rangle - \frac{1}{2}\rho_i \left\langle u_{it}, u_{it} \right\rangle. \tag{16a}$$

Оптимальные по Нэшу–Курно стратегии участников рынка

В случае равновесия по Нэшу–Курно из необходимого условия экстремума функционала (16a) можно получить формулы для расчета оптимального управления u_{it} (производственных инвестиций и др.) i-го олигополиста, максимизирующего критерий NPV с учетом затрат регулирования [Варшавский, 2012]:

$$u_{it} = \frac{W_i((\beta z)^{-1})}{\rho_i \ + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}(p_t - PL_i - bQ_{0it}), \tag{18a}$$

$$Q_{it} = W_i(z)u_{it} = \frac{\Gamma_i(z,(\beta z)^{-1})}{b}(p_t - PL_i - bQ_{0it}), \tag{18b}$$

где $PL_i = c_i + q_i / W(1+r_i)$ — лимитирующие затраты i-ой фирмы,

$$\Gamma_i[z,(\beta z)^{-1}] = \frac{bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})}{\rho_i \ + bW_i(z)W_i((\beta z)^{-1})},\ i = 1,2...N, \tag{19}$$

$$p_t = \frac{1}{1\ + \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i[z,(\beta z)^{-1}]}\{a + \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i[z,(\beta z)^{-1}](PL_i + bQ_{0it})\}. \tag{20}$$

В частном случае, когда на рынке присутствуют N_1 и N_2 фирм, использующих соответственно традиционную и передовую технику (или технологию) с постоянными лимитирующими затратами PL_1 и PL_2, причем $PL_2 < PL_1$, и $Q_{0it} = 0$; $Q_{0jt} = 0$, $i = 1,2\ldots N_1$; $j = 1,2\ldots N_2$, можно найти операторные выражения для определения суммарных объемов производства для двух групп фирм:

$$\begin{aligned} Q_t^{1Nash} &= \frac{1}{b}N_1\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}]*(p_t - PL_1) = \\ &= \frac{N_1\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}]}{b\{1\ + N_1\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}] + N_2\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}]\}}\{a - PL_1 + N_2\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}](PL_2 - PL_1)\}, \end{aligned} \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} Q_t^{2Nash} &= \frac{1}{b}N_2\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}]*(p_t - PL_2) = \\ &= \frac{N_2\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}]}{b\{1\ + N_1\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}] + N_2\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}]\}}\{a - PL_2 + N_1\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}](PL_1 - PL_2)\}. \end{aligned} \tag{21b}$$

Используя свойства Z-преобразования [Кузин, 1962; Jury, 1964], можно, основываясь на (21а), (21b), оценить соотношение между установившимися уровнями производства N_2 передовых фирм-лидеров и N_1 отстающих фирм, а также рыночную долю двух групп фирм $MS_1(\infty)$ и $MS_2(\infty)$. В случае постоянных параметров функции спроса (15) a, b, а также лимитирующих затрат PL_i, $i=1,2,$ справедливо

$$\frac{Q^{2Nash}(\infty)}{Q^{1Nash}(\infty)}=\lim_{t\to\infty}\frac{Q_t^{2Nash}}{Q_t^{1Nash}}=\frac{N_2\Gamma_2[1,(1+r)]\{a-PL_2+N_1\Gamma_1[1,(1+r)](PL_1-PL_2)\}}{N_1\Gamma_1[1,(1+r)]\{a-PL_1-N_2\Gamma_2[1,(1+r)](PL_1-PL_2)\}},\tag{22}$$

$$MS_1(\infty)=\frac{N_1\Gamma_1[1,(1+r)]\{a-PL_1-N_2\Gamma_2[1,(1+r)](PL_1-PL_2)\}}{N_1\Gamma_1[1,(1+r)](a-PL_1)+N_2\Gamma_2[1,(1+r)](a-PL_2)},\tag{23a}$$

$$MS_2(\infty)=\frac{N_2\Gamma_2[1,(1+r)]\{a-PL_2+N_1\Gamma_1[1,(1+r)](PL_1-PL_2)\}}{N_1\Gamma_1[1,(1+r)](a-PL_1)+N_2\Gamma_2[1,(1+r)](a-PL_2)}.\,[1]\tag{23b}$$

Очевидно при $N_1\to\infty$

$$MS_1(\infty)=1-\frac{N_2\Gamma_2[1,(1+r)](PL_1-PL_2)\}}{(a-PL_1)},\tag{24a}$$

$$MS_2(\infty)=\frac{N_2\Gamma_2[1,(1+r)](PL_1-PL_2)\}}{(a-PL_1)},\tag{24b}$$

так что при использовании оптимальных по Нэшу–Курно стратегий фирмы, обладающие худшими экономическими показателями, могут остаться на рынке.

Учитывая формальную близость суммирования произвольной функции x_t с дисконтирующим множителем β: $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t x_t$ и ее Z-преобразования $Z(x_t)=\sum_{t=0}^{\infty}z^{-t}x_t$, из вышеприведенных выражений можно определить суммарные дисконтированные объемы производства двух групп фирм, а также соотношения между ними. Для этого в формулах (21а), (21b) следует заменить z на $\beta^{-1}=1+r$ и полученные выражения умножить на $1/(1-\beta)=(1+r)/r$.

Из (19), (23а), (24а) следует, что отстающие фирмы могут повысить свою рыночную долю за счет уменьшения лимитирующих затрат PL_1 и коэффициента ρ_1, характеризующего их инвестиционные возможности (его значение влияет на величину $\Gamma_1(1.1+r)$). Следовательно, желаемая рыночная структура может быть обеспечена регулирующим органом (или ассоциацией потребителей производимого фирмами продукта) как путем предоставления субсидий, так и путем расширения инвестиционных возможностей отстающих участников.

Оптимальные по Штакельбергу стратегии участников рынка

В этом случае стратегия одного из участников рынка (N-го участника, или *лидера*) строится с учетом реакции других фирм-последователей. В то же время при формировании своих стратегий фирмы-последователи учитывают стратегию лидера как внешнее возмущение. Как

---

[1] Если числитель и знаменатель передаточных функций содержат единичные корни, то в правой части выражений (22), (23а), (23b), (24а), (24b) следует использовать не $\Gamma_i[1,(1+r)]$, а $\Gamma_i[z,(\beta z)^{-1}]$, $i=1,2,$ и осуществлять предельный переход при $z\to 1$.

и в (18b), стратегии последователей определяются по формуле

$$Q_{it} = \frac{\Gamma_i(z,(\beta z)^{-1})}{b}(p_t - PL_i), \quad i = 1,2...N-1. \tag{25}$$

При этом задача лидера состоит в максимизации собственного критерия J_N (см. (16)) при условии, что обратная функция спроса с учетом действий последователей выглядит следующим образом:

$$p_t = a - b\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\Gamma_i(z,(\beta z)^{-1})}{b}(p_t - PL_i) - bQ_{Nt} = a - \sum_{i=1}^{N-1}\Gamma_i(z,(\beta z)^{-1})(p_t - PL_i) - bW_N(z)\,u_{Nt}. \tag{15a}$$

Вычисления упрощаются в случае, когда экономические показателя всех фирм-последователей одинаковы, т. е. $\Gamma_i(z,(\beta z)^{-1}) = \Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})$, $PL_i = PL_1$, $\rho_i = \rho_1$, $i = 1,2...N-1$. Если ввести следующие обозначения для показателей лидера: $W_N(z) = W_2(z)$, $\Gamma_N(z,(\beta z)^{-1}) = \Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})$, $PL_N = PL_2$, $\rho_N = \rho_2$, то можно получить операторное соотношение, характеризующие объем производства фирмы-лидера $Q_{Lt} = Q_{Nt}$ и цену на рынке p_t:

$$Q_{Lt} = \frac{W_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}{\rho_2 + \dfrac{bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}{1+(N-1)\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})}}(p_t - PL_2) = \frac{[1+(N-1)\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})]\Gamma_L(z,(\beta z)^{-1})}{b}(p_t - PL_2), \tag{26}$$

где

$$p_t = \frac{1}{1+\Gamma_L(z,(\beta z)^{-1})}\left\{\frac{1}{1+(N-1)\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})}(a - PL_1) + \Gamma_L(z,(\beta z)^{-1})PL_2 + PL_1\right\}, \tag{27}$$

$$\Gamma_L(z,(\beta z)^{-1}) = \frac{\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})}{\left[1+\dfrac{\rho_2(N-1)\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})}{\rho_2 + bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}\right]}. \tag{28}$$

На основе соотношений (25)–(28) можно, как и в случае равновесия по Нэшу–Курно, определить рыночную долю группы отстающих фирм. В частности, при $t \to \infty$, в случае постоянных параметров функции спроса (15) a, b, а также лимитирующих затрат PL_i, $i = 1,2$, установившийся уровень рыночной доли группы отстающих фирм $MS_1(\infty)$ составит

$$MS_1(\infty) = \frac{(N-1)\Gamma_1(1,(1+r))(p_\infty - PL_1)}{(N-1)\Gamma_1(1,(1+r))(p_\infty - PL_1) + [1+(N-1)\Gamma_1(1,(1+r))]\Gamma_L(1,(1+r))(p_\infty - PL_2)}, \tag{29}$$

где p_∞ — установившееся значение цены (т. е. при $t \to \infty$), определяемое из (27) при $z = 1$.

Таким образом, и в этом случае, как и при равновесии по Нэшу–Курно, можно обеспечить повышение рыночной доли фирм-последователей за счет предоставления субсидий и расширения инвестиционных возможностей. Приведенные выше формулы дают возможность оценить необходимые для этого финансовые и инвестиционные ресурсы.

Сравнительный анализ оптимальных по Штакельбергу и по Нэшу–Курно стратегий участников рынка

Представляет интерес сравнительный анализ показателей участников рынка при равновесии по Штакельбергу и по Нэшу–Курно. В случае постоянных коэффициентов обратной функции спроса a, b и постоянных значениях лимитирующих затрат PL_i можно доказать следующие 2 утверждения.

Утверждение 3. В установившемся состоянии, т. е. при t→∞, объем производства фирмы-лидера, следующего стратегии Штакельберга $Q^{2Stack}(\infty)$, выше, чем при использовании им оптимальной стратегии по Нэшу–Курно $Q^{2Nash}(\infty)$, т. е. $Q^{2Stack}(\infty) > Q^{2Nash}(\infty)$.

Доказательство. В целях упрощения записи формул здесь и в дальнейшем примем, что $N_1 = 1;\ N_2 = 1$, т. е. имеет место дуополия. Из соотношений (21b) и (26) и свойств *Z*-преобразования следует

$$\frac{Q^{2Stack}(\infty)}{Q^{2Nash}(\infty)} = \lim_{t\to\infty}\frac{Q_t^{2Stack}}{Q_t^{1Nash}} = \lim_{z\to 1}\frac{[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})]\Gamma_L[z,(\beta z)^{-1}](p^{Stack}-PL_2)\}/b}{\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}](p^{Nash}-PL_2)\}/b} =$$

$$= \frac{[1+\Gamma_1(1,1+r)]}{1+\dfrac{\rho_2\Gamma_1(1,1+r)}{\rho_2+bW_2(1)W_2(1+r)}} * \frac{(p^{Stack}-PL_2)}{(p^{Nash}-PL_2)} =$$

$$= \frac{[1+\Gamma_1(1,1+r)]}{1+\dfrac{\rho_2\Gamma_1(1,1+r)}{\rho_2+bW_2(1)W_2(1+r)}} * \frac{\dfrac{1}{1+\Gamma_L(1,1+r)} * \left[\dfrac{a-PL_2}{1+\Gamma_1(1,1+r)} + PL_1 - PL_2)\right]}{\left[\dfrac{a+\Gamma_1(1,1+r)PL_1+\Gamma_2(1,1+r)PL_2}{1+\Gamma_1(1,1+r)_1+\Gamma_2(1,1+r)} - PL_2\right]} = \tag{30}$$

$$= \frac{[1+\Gamma_1(1,1+r)+\Gamma_2(1,1+r)]}{1+\dfrac{\rho_2\Gamma_1(1,1+r)}{\rho_2+bW_2(1)W_2(1+r)}+\Gamma_2(1,1+r)} > 1$$

(неравенство в последней формуле следует из положительности всех членов в числителе и знаменателе). Таким образом, $Q^{2Stack}(\infty) > Q^{2Nash}(\infty)$. Утверждение доказано.

Аналогично, после несложных, но громоздких алгебраических преобразований можно показать, что при равновесии по Штакельбергу объемы производства фирм-последователей в установившемся состоянии ниже, чем при равновесии по Нэшу-Курно. Однако в этом случае, как показано в следующем п. (см. рис. 11), в переходном режиме объемы производства фирм-последователей могут превышать соответствующие объемы для случая равновесия по Нэшу-Курно.

Утверждение 4. Чистая текущая стоимость NPV (без затрат регулирования) фирмы-лидера, следующей стратегии Штакельберга, выше, чем при использовании ей оптимальной стратегии по Нэшу–Курно, т. е. $NPV^{2Stack} > NPV^{2Nash}$.

Доказательство. NPV (без затрат регулирования) фирмы-лидера (16a), придерживающейся соответственно стратегий Штакельберга и Нэша–Курно, имеет следующий вид (см. (21b), (26), (18b), (20), (27)):

$$NPV^{2Stack} = \left\langle (p_t^{Stack}-PL_2), \frac{[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})]\Gamma_L[z,(\beta z)^{-1})}{b}(p_t^{Stack}-PL_2)\right\rangle =$$

$$= \frac{[\Gamma_L(z,(\beta z)^{-1})/b]}{[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})]*[1+\Gamma_L(z,(\beta z)^{-1})]^2}\{(a-PL_2)^2 + \tag{31}$$

$$+ 2\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}]*(a-PL_2)(PL_1-PL_2)+\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}]^2*(PL_1-PL_2)^2\}\Big|_{z=\beta^{-1}}\frac{(1+r)}{r},$$

$$NPV^{2Nash} = \left\langle (p_t^{Nash} - PL_2), \frac{\Gamma_2[z,(\beta z)^{-1}](p_t^{Nash} - PL_2)}{b} \right\rangle =$$

$$= \frac{[\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})/b]}{[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]^2}\{(a-PL_2)^2 + \tag{32}$$

$$+2\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}]*(a-PL_2)(PL_1-PL_2)+\Gamma_1[z,(\beta z)^{-1}]^2*(PL_1-PL_2)^2\}\Big|_{z=\beta^{-1}}\frac{(1+r)}{r}$$

(при выводе вышеприведенных формул учитывался тот факт, что для $\Phi(z,(\beta z)^{-1}) = \Psi(z)\Psi(\beta z)^{-1}$ при постоянных величинах η, χ справедливо равенство

$$\left\langle \eta, \Psi(\beta z)^{-1}\Psi(z)\chi \right\rangle = \left\langle \eta, \Phi(z,(\beta z)^{-1})\chi \right\rangle = \Psi(\beta^{-1})\Psi(1)\frac{\chi\eta}{1-\beta} = \Phi(\beta^{-1},1)\frac{\chi\eta(1+r)}{r}, \tag{33}$$

где по аналогии с Z-преобразованием функции ψ_t, $\Psi(z) = \sum_{t=0}^{\infty} z^{-t}\psi_t$, введено обозначение $\Psi(\beta^{-1}) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t\psi_t$).

С учетом (28), (30)–(31) соотношение между значениями NPV фирмы-лидера при использовании ею стратегий Штакельберга и Нэша–Курно принимает следующий вид:

$$\frac{\mathrm{NPV}^{2Stack}}{\mathrm{NPV}^{2Nash}} = \frac{[\Gamma_L(z,(\beta z)^{-1})]*[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]^2}{[\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]*[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})]*[1+\Gamma_L(z,(\beta z)^{-1})]^2}\Big|_{z=\beta^{-1}} =$$

$$= \frac{[\rho_2 + bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})]*[\rho_2 + \dfrac{bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})}{1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})}]*[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]^2}{\{\rho_2[1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]+[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})]*[1+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]\}^2}\Big|_{z=\beta^{-1}} =$$

$$= \frac{\rho_2^2 + b\rho_2 W_2(z)W_2((\beta z)^{-1})\dfrac{2+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})}{1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})} + \dfrac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})]^2}{1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})}}{\rho_2^2 + 2\rho_2\dfrac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})]*[1+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]}{1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})} + \left\{\dfrac{[bW_2(z)W_2((\beta z)^{-1})]*[1+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})]}{1+\Gamma_1(z,(\beta z)^{-1})+\Gamma_2(z,(\beta z)^{-1})}\right\}^2}\Big|_{z=\beta^{-1}} \geq 1. \tag{34}$$

Неравенство следует из положительности всех членов в (34) и $0 \leq \Gamma_i(.,) \leq 1$, $i = 1,2.$ Таким образом, $\mathrm{NPV}^{2Stack} > \mathrm{NPV}^{2Nash}$. Утверждение доказано.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при одинаковых значениях коэффициента ρ_1, отражающего инвестиционные возможности отстающей фирмы, в установившемся состоянии ее рыночная доля при равновесии по Нэшу–Курно будет выше, чем при равновесии по Штакельбергу. Вместе с тем, учитывая результаты утверждения 4, следует ожидать, что при достаточно большом горизонте планирования во многих случаях наиболее вероятным будет использование фирмами-лидерами стратегии, оптимальной по Штакельбергу. При этом такой же рыночной доле отстающей фирмы $MS_1(\infty)$, как и при равновесии по Нэшу-Курно, будет соответствовать меньшее значение коэффициента ρ_1.

Пример численного анализа оптимальных по Штакельбергу стратегий участников рынка

Для получения выражений, характеризующих динамику оптимальных стратегий как по Нэшу–Курно, так и по Штакельбергу Q_t^j, $j = 1,2\ldots N$, во временной области, необходимо использовать обратное Z-преобразование [Кузин, 1962; Jury, 1964]. Перед этим следует провести факторизацию правых частей выражений (18a), (18b), (25), (26). Эта операция может быть успешно проведена, например, в среде MATLAB с использованием процедур поиска корней полиномов, а также процедур формирования соединений систем, реализованных в Control Systems Toolbox (таких, в частности, как series(.), parallel(.), feedback(.) и др.) [Потёмкин, 1997]. При невысоком порядке передаточной функции $W_i(z)$ такие расчеты могут быть проведены даже с использованием калькулятора или электронных таблиц.

Ниже рассматривается условный пример расчета в среде Excel оптимальных по Штакельбергу стратегий для дуополии, характеризующейся показателями, близкими к рынку микропроцессоров x86 (см., например, [Варшавский, 2003; Инновационный менеджмент в России, 2004, гл. 17]).

Описание базового варианта

При проведении расчетов на основе соотношений (15b), (23), (24) предполагалось, что объемы производства фирм связаны с инвестициями в основной капитал u_{2t} передаточной функцией:

$$W_i(z) = \gamma_i / (z - \lambda)\ ,\ \ \gamma_i > 0\ ,\ 0 < \lambda < 1\ ,\ i = 1,2,$$

где z — оператор сдвига, т. е. $zx_t = zx_{t+1}$.

Экономические показатели двух фирм для базового варианта приведены в таблице 3 (индекс последователя — 1, лидера — 2; в данном случае в операционных затратах лидера не учитывается амортизация).

В качестве обратной функции спроса использовалась линейная функция с теми же значениями параметров, что и ранее (см. с. 7): $p_t = 120 - 0.015(Q_{1t} + Q_{2t})$.

Таблица 3. Показатели фирмы-лидера и фирмы-последователя в базовом варианте

λ=	0.85	c_1=	95
γ_1=	0.018	c_2=	75
γ_2=	0.02	PL_1=	108.9
ρ_1=	0.00065	PL_2=	87.5
ρ_2=	0.00065	r=	0.10

Методика проведения расчетов и результаты

При проведении вычислений исследовалось влияние коэффициента ρ_1, характеризующего инвестиционные возможности фирмы-последователя и входящего в (16a), на объемы необходимых инвестиций u_{1t}, объемы производства Q_{it} и рыночные доли фирм $MS_i(\infty)$, $i = 1,2$. Вначале было определено влияние этого коэффициента на величину рыночных долей фирм в установившемся режиме. С этой целью исследовалась зависимость рыночной доли отстающей фирмы $MS_1(\infty)$ от ρ_1 (см. (29)).

Полученная зависимость рыночной доли фирмы-последователя $MS_1(\infty)$ от ρ_1 представлена на рисунке 6. Далее по задаваемым желаемым значениям рыночной доли $MS_1(\infty)^*$ определялись значения коэффициента ρ_1^*, а затем динамика объемов необходимых инвестиций u_{1t}, производства фирмы-последователя Q_{1t}.

Оптимальные стратегии участников рынка, соответствующие значениям показателей базового варианта, но при разных значениях ρ_1^*, вычислялись с использованием электронных таблиц в среде Excel в соответствии с формулами (25)–(28). После факторизации полиномов в числителе и знаменателе этих формул получено, что динамика оптимальных по Штакельбергу объемов производства описывается следующими операторными уравнениями со значениями параметров, приведенных в таблицах 4a, 4b для двух значений ρ_1^*:

$$Q_{1t}=\frac{G_{11}}{(z-\mu_1)}\left(1-\frac{(z-\mu_2)G_{12}}{h_0z^2+h_1z+h_2}\right)(a-PL_1)-\frac{G_{13}}{h_0z^2+h_1z+h_2}(PL_1-PL_2), \tag{35a}$$

$$Q_{2t}=\frac{1}{h_0z^2+h_1z+h_2}\left[(z-\mu_2)G_{12}(a-PL_2)+G_{12}(PL_1-PL_2)\right]. \tag{35b}$$

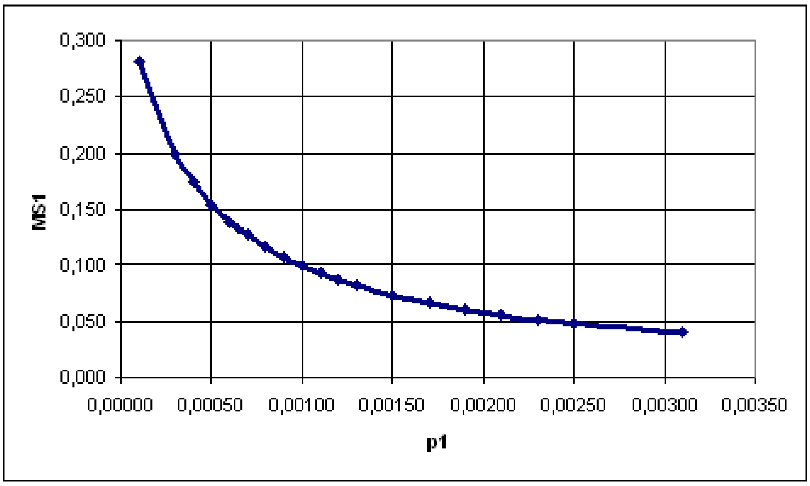

Рис. 6. Зависимость рыночной доли фирмы-последователя $MS_1(\infty)$ от коэффициента ρ_1

Таблица 4a. Значения параметров соотношений (35a), (35b)

$MS_1(\infty)$	ρ_1^*	μ_1	μ_2	h_0	h_1	h_2
0.133	0.00065	0.820	0.834	0.0007	–0.0011	0.0005
0.200	0.0003	0.790	0.817	0.0005	–0.0008	0.0003

Таблица 4b. Значения параметров соотношений (35a), (35b)

$MS_1(\infty)$	ρ_1^*	G_{11}	G_{12}	G_{13}	G_{21}	G_{22}
0.133	0.00065	1.71E+00	1.78E-06	3.64E-05	1.32E-03	3.64E-05
0.200	0.0003	3.24E+00	1.18E-06	4.81E-05	8.73E-04	4.81E-05

На рисунках 7–9 представлены динамика рыночной доли MS_{1t}, динамика объемов производства Q_{1t}, а также динамика объемов инвестиций u_{1t} фирмы-последователя при разных значениях коэффициента ρ_1. Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности повышения рыночной доли фирмы-последователя за счет предоставления ей финансовых ресурсов для инвестирования в производство.

Подобного рода алгебраические выкладки были также проведены с целью определения динамики объемов производства и рыночных долей фирм, действующих в соответствии со стратегиями, оптимальными по Нэшу–Курно, и сопоставления их со стратегиями, оптимальными по Штакельбергу. Для базового варианта (ρ_1^* = 0,00065, см. таблицу 2) получены операторные зависимости, значения параметров которых представлены в таблице 5:

$$Q_{1t}=\frac{1}{\theta_0z^2+\theta_1z+\theta_2}\left[(z-\lambda_2)K_{11}(a-PL_1)+K_{12}(a-2PL_1+PL_2)\right], \tag{36a}$$

$$Q_{2t}=\frac{1}{\theta_0z^2+\theta_1z+\theta_2}\left[(z-\lambda_1)K_{21}(a-PL_2)+K_{21}(a-2PL_2+PL_1)\right]. \tag{36b}$$

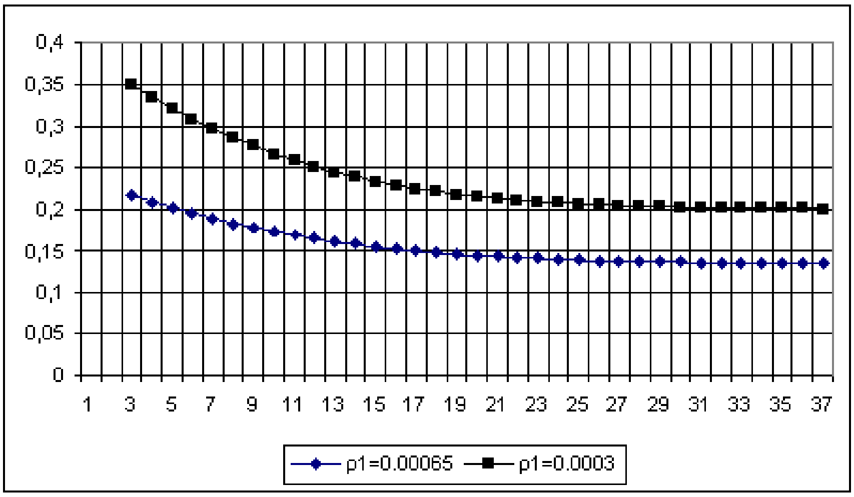

Рис. 7. Динамика рыночной доли фирмы-последователя $MS_1(\infty)$ при различных значениях коэффициента ρ_1

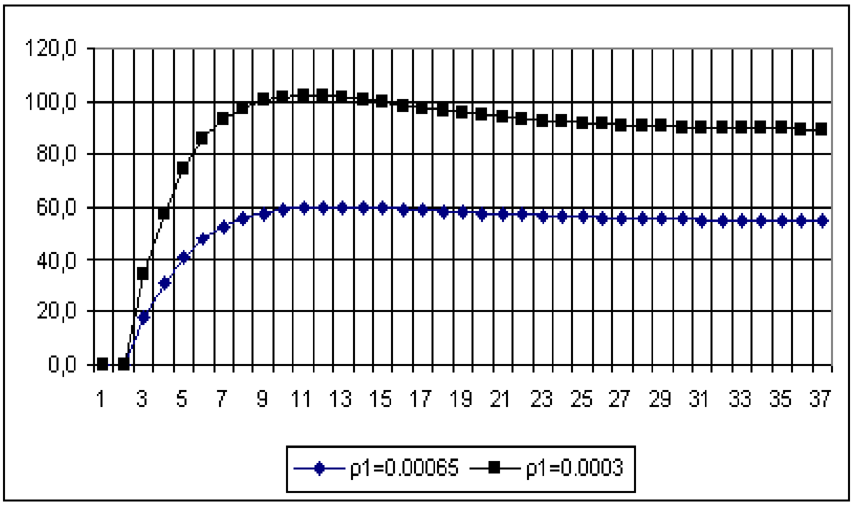

Рис. 8. Динамика объемов производства Q_{1t} фирмы-последователя при разных значениях коэффициента ρ_1

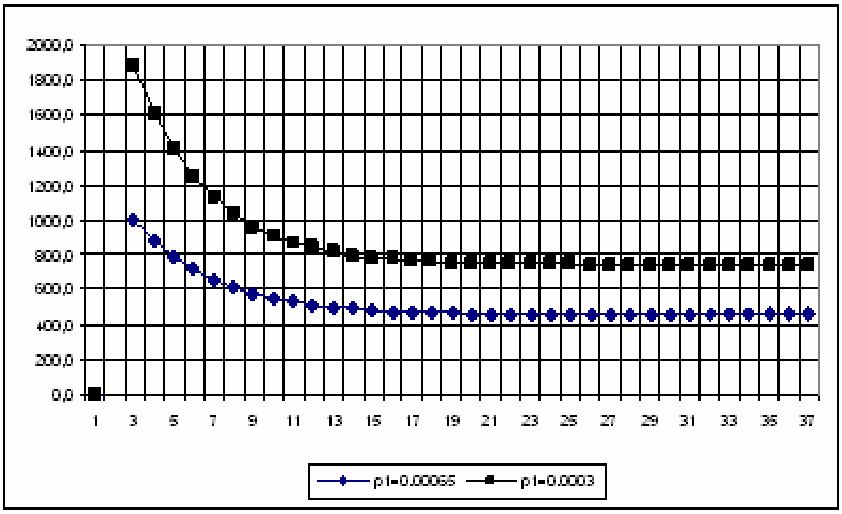

Рис. 9. Динамика объемов инвестиций u_{1t} фирмы-последователя при разных значениях коэффициента ρ_1

Таблица 5. Значения параметров соотношений (36a), (36b)

h_0	h_1	h_2	K_{11}	K_{12}	K_{21}	$K_{22} = K_{12}$
0.133	0.00065	0.820	9.76E-04	3.60E-05	1.20E-03	3.60E-05

На рисунках 10, 11 представлена динамика достижения задаваемых рыночных долей MS_{1t}, а также динамика объемов производства Q_{1t} отстающей фирмы в случае равновесия по Штакельбергу и по Нэшу–Курно. При значениях параметров, соответствующих базовому варианту, рыночная доля и объемы производства отстающей фирмы при равновесии по Штакельбергу оказываются в начальный период заметно выше, чем при равновесии по Нэшу. В дальнейшем величины соотношений между этими показателями для равновесий по Штакельбергу и по Нэшу стремятся к величинам, полученным непосредственно из формул (23а), (29), (30). Таким образом, для обеспечения заданной величины рыночной доли отстающей фирмы в долгосрочной перспективе, в переходном режиме, при равновесии по Штакельбергу могут потребоваться большие финансовые и материальные ресурсы, чем при равновесии по Нэшу–Курно.

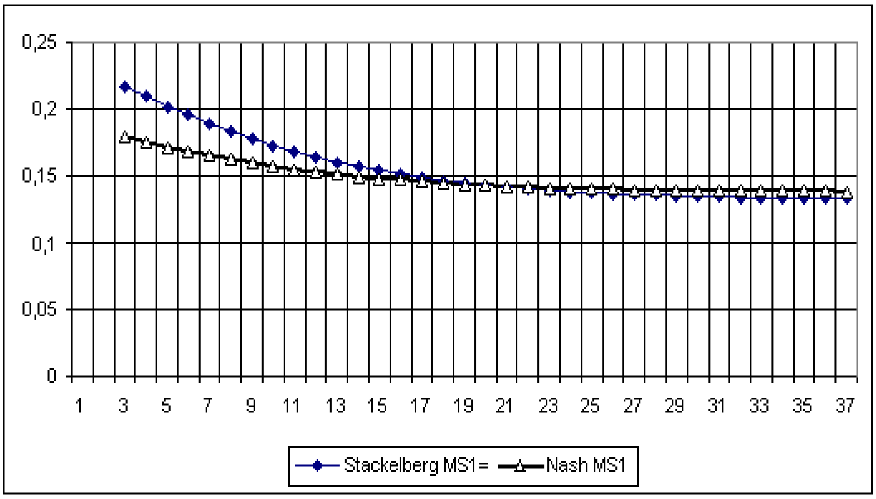

Рис. 10. Динамика рыночной доли фирмы-последователя $MS_1(\infty)$ при равновесии по Штакельбергу и по Нэшу–Курно

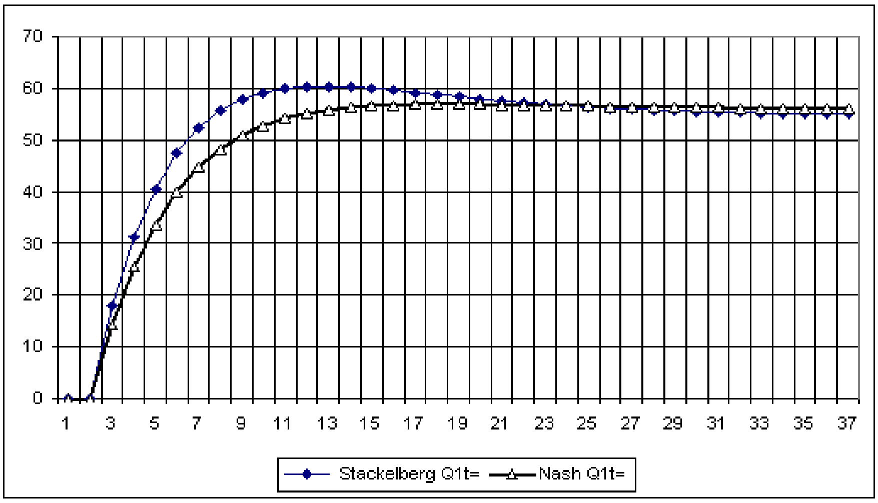

Рис. 11. Динамика объемов производства Q_{1t} фирмы-последователя при равновесии по Штакельбергу и по Нэшу–Курно

Выводы

Разработанный в статье метод поддержания конкурентной среды при ориентации участников возникающих рынков на максимально возможные темпы роста, основанный на использовании принципов теории система с переменной структурой, обеспечивает возможность регулирующим органам достаточно эффективно формировать заданную рыночную структуру.

Предложен эффективный метод расчета оптимальных по Штакельбергу стратегий, основанный на использовании *Z*-преобразования, который обеспечивает устойчивость вычислений, а также позволяет провести содержательный анализ факторов, влияющих на экономические показатели рынков с доминирующим участником. Рассмотренный метод создает основу для проведения оценки объемов ресурсов, необходимых для достижения конструируемой структуры рынков с участниками, ориентированными на достижение максимальной эффективности.

Полученные результаты могут быть использованы при формировании предложений по созданию структуры формирующихся рынков, по государственной политике стимулирования инвестиционной деятельности, а также по антимонопольной политике.

Приложение

Утверждение 1. Пусть $p(Q)$ — монотонно убывающая функция $Q(t)$, имеющая непрерывную производную. Тогда если в системе (1) с ограничениями (2) в начальный момент времени $p(0)=p[Q(0)]>c_N$, то и в дальнейшем $p(t)=p[Q(t)]>c_N$, $t>0$.

Доказательство. Для упрощения записи примем, что $f_i=g_i$. Тогда, основываясь на (1), можно представить уравнение динамики суммарного выпуска следующим образом:

$$\frac{dQ}{dt}=\sum_{i=1}^{N} f_iQ_i[p(Q)-c_i]=\sum_{i=1}^{N} f_iQ_i p(Q)-\sum_{i=1}^{N} f_iQ_ic_i=Q*(\overline{f}p(Q)-\overline{fc}), \tag{П1}$$

где $\overline{f}=\sum_{i=1}^{N} f_is_i$, $\overline{fc}=\sum_{i=1}^{N} f_ic_is_i$. Ввиду (2) справедливо

$$\frac{dQ}{dt}=Q*(\overline{f}p(Q)-\overline{fc})<\overline{f}Q(p(Q)-c_N)\ . \tag{П2}$$

Тогда динамика цены характеризуется следующими соотношениями:

$$\frac{dp}{dt}\Big/p=\frac{\partial p}{\partial Q}\frac{Q}{p}*(\frac{dQ}{dt}\Big/Q)=\varepsilon_p(\overline{f}p-\overline{fc})>-\varepsilon_{mp}\overline{f}(p-c_N)>-\varepsilon_{mp}f_N(p-c_N)\,. \tag{П3}$$

где $\varepsilon_p<0$ — эластичность цены по выпуску, $\varepsilon_{mp}=\max\limits_{p}|\varepsilon_p|$.

Из (П3) нетрудно получить следующее неравенство:

$$p(t)>\frac{c_N}{1-[(p(0)-c_N)/p(0)]\exp(-\varepsilon_{mp}f_Nc_Nt)}\,, \tag{П4}$$

из которого следует, что $p(t)=p[Q(t)]>c_N$, $t>0$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть $p(Q)$ — функция $Q(t)$, монотонно убывающая функция $Q(t)$, имеющая непрерывную производную. Пусть в системе (1) с ограничениями (2) используется управление $U_i(t)=u_i(t)Q_i(t)$, где $u_i(t)=\dfrac{(1+\varepsilon_i)}{f_i}[(f_N-f_i)p(Q)+(f_ic_i-f_Nc_N)]$, $i=1,2...N-1$. Если в начальный момент времени $p(0)=p[Q(0)]>c_N$, то

1) при малых значениях $\varepsilon_i = \varepsilon,\ i = 1,2...N-1$ для $t > 0$ справедливо $p(t) = p[Q(t)] > c_N - \varepsilon\gamma$, где $\gamma > 0$;

2) положительность $\dfrac{d\alpha_i(t)}{dt}\Big/\alpha_i(t)$ в (5а) обеспечивается при значениях ε, находящихся в диапазоне $0 < \varepsilon < \varepsilon^* = \min\limits_i \left[\dfrac{f_i(c_i - c_N)_i}{f_N - f_i}\right] / \gamma$.

Доказательство.

1. Подставляя $u_i(t)$ в (П1), получим

$$\frac{dQ_i}{dt} = Q_i[(1+\varepsilon_i) f_N(p(Q) - c_N) - \varepsilon_i f_i(p(Q) - c_i)]. \tag{П5}$$

Примем для упрощения записи, что $\varepsilon_i = \varepsilon,\ i = 1,2...N-1$. Тогда справедливо

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} Q_i[(1+\varepsilon) f_N(p(Q) - c_N) - \varepsilon f_i(p(Q) - c_i)] = \\ &= Q[(1+\varepsilon) f_N(p(Q) - c_N) - \varepsilon(\overline{f}p(Q) - \overline{fc})] < \\ &< Q\{[(1+\varepsilon) f_N - \varepsilon f_{\min}] p(Q) - f_N[(c_N(1+\varepsilon) - \varepsilon c_{\max}]\}, \end{aligned} \tag{П6}$$

где $f_{\min} = \min\limits_i f_i$, $c_{\max} = \max\limits_i c_i$, $i = 1,2...N-1$.

Учитывая, что $\dfrac{dp}{dt}\Big/p = \dfrac{\partial p}{\partial Q}\dfrac{Q}{p} * \left(\dfrac{dQ}{dt}\Big/Q\right)$, из (П6) можно, после проведения выкладок, аналогичных сделанным при выводе (П4), получить следующее неравенство:

$$p(t) > \frac{f_N[B(\varepsilon)/A(\varepsilon)]}{1 - [(p(0) - f_N[B(\varepsilon)/A(\varepsilon)])/p(0)]\exp(-\varepsilon_{mp} A(\varepsilon)t)}, \tag{П7}$$

где $A(\varepsilon) = [(1+\varepsilon) f_N - \varepsilon f_{\min}]$; $B(\varepsilon) = [c_N(1+\varepsilon) - \varepsilon c_{\max}]$.

При малых значениях ε справедливо

$$f_N[B(\varepsilon)/A(\varepsilon)] = f_N \frac{c_N(1+\varepsilon) - \varepsilon c_{\max}}{(1+\varepsilon) f_N - \varepsilon f_{\min}} = \frac{c_N - (c_{\max} - c_N)\varepsilon}{1 + \varepsilon(f_N - f_{\min})/f_N} \approx c_N - \varepsilon(c_{\max} - c_N f_{\min}/f_N). \tag{П8}$$

Таким образом, при $t > 0$ справедливо $p(t) = p[Q(t)] > c_N - \varepsilon\gamma$, где $\gamma = c_{\max} - c_N f_{\min}/f_N$, что и требовалось доказать.

2. В силу (5а) при заданном управляющем воздействии справедливо

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt}\Big/\alpha_i(t) = \varepsilon[(f_N - f_i)p(Q) + (f_i c_i - f_N c_N)] > \varepsilon[(f_i(c_i - c_N) - (f_N - f_i)\varepsilon\gamma]. \tag{П9}$$

Второй сомножитель в правой части положителен при $0 < \varepsilon < \min\limits_i \left[\dfrac{f_i(c_i - c_N)_i}{f_N - f_i}\right]\Big/\gamma$. Утверждение доказано.

Список литературы

Варшавский Л. Е. Исследование инвестиционных стратегий фирм на рынках капитало- и наукоемкой продукции (производственные мощности, цены, технологические изменения). — М.: ЦЭМИ РАН. — 2003. 354 с.

Варшавский Л. Е. Методологические основы моделирования инвестиционного поведения промышленных фирм // Теория и практика институциональных преобразований в России / Ерзнкян Б. Г. (ред.). — М.: ЦЭМИ РАН. — 2004. — Вып. 3. — С. 70–96.

Варшавский Л. Е. Исследование влияния рыночной структуры на динамику показателей олигополистического рынка // Экономика и математические методы. 2007. — Т. 43, № 4. — С. 80–88.

Варшавский Л. Е. a) Сравнительный анализ оптимальных по Нэшу–Курно стратегий олигополистов на основе компьютерного моделирования // Теория и практика институциональных преобразований в России / Ерзнкян Б. Г. (ред.). — М.: ЦЭМИ РАН. — 2011. — Вып. 19. — С. 11–30.

Варшавский Л. Е. b) Методы экономического тестирования вводимой на рынки наукоемкой техники с длительным жизненным циклом // Концепции. — 2011. — № 1–2 (26–27). — С. 29–46.

Варшавский Л. Е. Приближенные методы исследования динамики показателей рыночной структуры // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 219–229.

Джексон Т. INTEL. Взгляд изнутри. — М.: — Лори, 1998.

Дорф Р. К., Бишоп Р. Х. Современные системы управления. — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2004.

Емельянов С. В. Системы автоматического управления с переменной структурой. — М.: Наука, 1967.

Инновационный менеджмент в России: вопросы стратегического управления и научно-технической безопасности / Руководители авт. Коллектива В. Л. Макаров, А. Е. Варшавский. — М.: Наука, 2004.

Кузин Л. Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. — М.: Машгиз, 1962.

Ламберт А. Субсидии федерального бюджета российским автопроизводителям. Точка зрения бизнеса // AEB Business Quarterly | Autumn. — 2014. — С. 45.

Потёмкин В. Г. MATLAB. Справочное пособие. — М.: Диалог МИФИ, 1997.

Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981.

Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. — М.: Мир, 1979.

Basar T., Olsder G. J. Dynamic noncooperative game theory. — London/New York: Academic Press., 1995.

DeCarlo R. A., Zak S. H., Matthews G. P. Variable structure control of nonlinear multivatiable systems: a tutorial // Proceedings of the IEEE. — 1988. — Vol. 76, No. 3.

Dockner E. J., Jorgenson S. et al. Differential games in economics and management science. — Cambridge: Cambridge University Press., 2000.

Engwerda J. C. Linear Quadratic Games: An Overwiew. Discussion Paper 2006–110, Tilburg University, Center for Economic Research.

Jury E. I. Theory and applications of the *Z*-transform method. John Wiley, NY, 1964.

Gordon S. Costs of adjustment, the aggregation problem and investment // The Review of Economics and Statistics. — 1992. — Vol. 74, No. 3. — P. 422–429.

Reynolds S. S. Strategic capital investment in the american aluminum industry // J. of Industrial Econ. — 1986. — Vol. 34, No. 3. — P. 225–245.

Reynolds S. S. Capacity investment, preemption and commitment in an infinite horizon model // International Econ. Rev. — 1987. — Vol. 28, No. 1. — P. 69–88.

Simaan M., Cruz J. R. On the Stackelberg strategy in nonzero-sum games // Journal of Optimization Theory and Applications. — 1973. — Vol. 11, No. 5. — P. 533–555.