

УДК: 004.5, 004.9, 612.821, 519.8, 519.1, 519.6, 51.7

## Задача вычисления траектории с равномерным распределением ответов

А. В. Коганов<sup>1,а</sup>, А. И. Злобин<sup>2,б</sup>, Т. А. Ракчеева<sup>3,в</sup>

<sup>1</sup> НИИСИ РАН,

Россия, 117218, г. Москва, Нахимовский пр. д. 36, корп. 1

<sup>2</sup> Хостинг «Русоник»,

Россия, 117218, г. Москва, ул. 5-го Ямского поля, д. 5

<sup>3</sup> ИМАШ РАН,

Россия, 117334, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

E-mail: <sup>а</sup> koganow@niisi.msk.ru, <sup>б</sup> mr.zlobin@mail.ru, <sup>в</sup> rta\_ra@list.ru

Получено 28 июля 2014 г.,  
после доработки 20 октября 2014 г.

Рассматривается новая серия тестов, предназначенных для выявления способности человека к параллельным вычислениям. В отличие от задач, рассмотренных в предыдущих работах, в новых сериях ответы распределены статистически равномерно. Это упрощает анализ полученных результатов и уменьшает оценку статистической погрешности. Новые экспериментальные данные близки к результатам, полученным в предыдущих опытах.

Ключевые слова: инженерная психология, параллельные вычисления, тестирование, пропускная способность

## The task of trajectory calculation with the homogenous distribution of results

A. V. Koganov<sup>1</sup>, A. I. Zlobin<sup>2</sup>, T. A. Rakcheeva<sup>3</sup>

<sup>1</sup> NIISI RAN, 36 Nakhimovsky av., corp. 1, Moscow, 117218, Russia

<sup>2</sup> Hosting "Rusonik", 5 5-th Yamskogo polya st., Moscow, 117218, Russia

<sup>3</sup> IMash RAN, 4 Bardina st., Moscow, 117334, Russia

**Abstract.** — We consider a new set of tests which assigns to detection of human capability for parallel calculation. The new tests support the homogenous statistical distribution of results in distinction to the tests discussed in our previous works. This feature simplifies the analysis of test results and decreases the estimate of statistical error. The new experimental data is close to results obtained in previous experiments.

Keywords: engineering psychology, parallel calculation, testing, throughput

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 5, pp. 803–828 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00190а.

© 2014 Александр Владимирович Коганов, Андрей Иванович Злобин, Татьяна Анатольевна Ракчеева

## 1. Введение

Данная работа является продолжением исследований, описанных авторами в статье [Коганов и др., 2013]. Целью экспериментов является выявление людей, которые в условиях дефицита времени могут переходить к параллельной логической обработке символьной информации. Под этим понимается выполнение человеком одновременно нескольких элементарных операций логического типа, необходимых для получения результата. Эти работы ведутся с конца 1960-х годов [Коганов и др., 1971; Коганов, 1972]. Подробно об истории вопроса можно прочесть во введении работы [Коганов и др., 2013]. Стимулом для появления данной серии опытов явилось теоретически выявленное несовершенство одного из использованных тестов, которое было устранено в новых тестах.

Основной метод тестирования способности человека к параллельной обработке логической информации заключался в предъявлении двух серий задач двух разных видов. Задачи одного вида допускали эффективную параллельную обработку информации. Задачи другого вида не допускали ускорения решения при использовании небольшого числа параллельных логических процессоров. Использование большого числа процессоров (больше десяти) позволяет получить некоторый выигрыш во времени, но средняя загрузка процессора и удельный эффект выигрыша во времени на один дополнительный процессор при этом оказывается крайне низкими [Коганов, 2001, 2010]. Это позволяет уверенно утверждать, что данный класс задач человек будет решать последовательно.

В качестве задачи, где параллельность обработки данных эффективна, во всех поставленных экспериментах использовалась задача поиска наибольшего числа из набора чисел, заполняющих предъявляемую испытуемому таблицу. Этот тип задач далее будем называть «поиск максимума».

В качестве задачи, где параллельная обработка информации неэффективна, в опыте, описанном в указанной работе, использовалась задача вычисления траектории по таблице, заполненной случайными числами и имеющей структуру треугольника Паскаля. Процесс заполнения таблицы гарантировал, что под каждой клеткой таблицы стоят две клетки с разными числами. Задача испытуемого заключалась в переходе от вершины треугольника к нижнему уровню, переходя из каждой клетки в ту из соседних клеток снизу, в которой стоит большее число. Ответом задачи являлся номер клетки, в которую завершается траектория. Эти номера стоят под клетками нижнего яруса. Это задача «вычисления траектории».

Задачи каждого вида предлагались сериями, в каждой из которых числовые таблицы имели фиксированный размер, а менялось заполнение таблицы. Сложностью задачи считается число парных сравнений чисел, которые необходимо провести, чтобы получить ответ задачи. Для задачи поиска максимума сложность равна количеству клеток таблицы за вычетом единицы. При этом количество чисел, которые надо просмотреть, чтобы с гарантией получить верный ответ, равно числу клеток таблицы. Для задачи вычисления траектории количество сравнений равно числу строк в треугольнике без вершины, а просмотреть надо вдвое больше чисел. Количество чисел, которые надо просмотреть, пропорционально объему информации, которую необходимо переработать для гарантированного получения верного ответа. Зная среднее время решения задач данной сложности, можно оценить пропускную способность мозга испытуемого при решении этих задач как отношение объема информации, одинакового для всех таких задач, к этому среднему времени.

Именно анализ зависимости пропускной способности мозга от сложности задачи лежит в основе выявления параллельного или последовательного способа решения задач. Увеличение пропускной способности с ростом сложности может иметь две причины. Во-первых, возможно ускорение работы тех отделов мозга, которые обрабатывают информацию, без перехода к параллельной обработке. Во-вторых, возможно подключение новых ресурсов для реализации параллельных вычислений. В первом случае увеличение пропускной способности будет наблюдаться в сериях обеих задач. Во втором случае увеличение пропускной способности будет наблюдаться только в задаче поиска максимума. Если же вычисления производятся последова-

тельно и в постоянном темпе, то пропускная способность будет примерно постоянной (колебания в пределах погрешности) для всех сложностей задач обоих видов. Теоретически возможны ситуации, когда тенденцию изменения пропускной способности определить невозможно (колебания, выходящие за пределы интервала погрешности) или когда растет пропускная способность на задаче расчета траектории, но не растет в задаче поиска максимума. В первом случае будет регистрироваться недостоверность результатов, а во втором — неадекватность модели поведения для данного испытуемого. Подробнее это рассмотрено в специальном разделе данной статьи. Изучение пропускной способности анализаторов человека является одной из базовых задач инженерной психологии, и этому вопросу посвящено много исследований (например, [Суходольский, 1964; Котик, 1978; Крылов, 1991]).

Эксперимент показал высокую эффективность методики. Были выявлены все три типа диаграмм пропускной способности. В частности, не было зарегистрировано случаев недостоверности и неадекватности. Были обнаружены все три предсказанные типы динамики пропускной способности.

В той же статье было отмечено, что в задаче вычисления траектории в указанной форме возможные ответы распределены статистически неравномерно, а по биномиальному распределению. В принципе, при четном числе уровней это не сильно влияет на результат, поскольку для больших сложностей задачи имеется два наиболее вероятных ответа, и, чтобы гарантированно выбрать из них один верный, требуется решить всю задачу. Однако имеется возможность, когда испытуемый заметит эту закономерность и будет угадывать ответ, не решая задачу до конца. Возникающая при этом вероятность ошибки равна  $\frac{1}{2}$ , но если пользоваться этим приемом не в каждой задаче, то можно фиктивно повысить оценку пропускной способности. В эксперименте таких случаев зарегистрировано не было, но при массовом использовании методики нельзя их исключить. Преодолению этой проблемы посвящена данная работа. Рассмотрены две модификации задачи вычисления траектории, в которых ответы теоретически распределены равномерно.

Первая модификация носит название «развертка цилиндра». В этой задаче движение происходит по схеме, похожей на треугольник Паскаля, но по таблице, которая имитирует развертку поверхности цилиндра. В особых случаях достижения границы таблицы испытуемый использует правило, которое моделирует замкнутость поверхности цилиндра. С учетом случайного равномерно распределенного выбора начальной точки движения (на левой границе цилиндра) равномерное распределение ответа задачи на правой границе следует из симметрии конструкции. В то же время сохраняют силу все теоремы о низкой эффективности параллельной обработки информации при вычислении траектории [Коганов, 2010]. Подробно эта задача описана в разделе 4.

С этой задачей был проведен один пробный эксперимент без задачи поиска максимума. Результат подтвердил последовательный способ решения у всех испытуемых. Однако возникали трудности на стадиях объяснения задачи испытуемому и тренировочной серии задач. Проблемы были связаны с применением правила, имитирующего замкнутость цилиндра. Поэтому была разработана другая модификация, более удобная для использования.

Вторая модификация названа «случайное блуждание». Траектория вычисляется на прямоугольной таблице с переходом из столбца в столбец слева на право. Правила перехода на соседний справа столбец таблицы таковы, что статистически имитируют случайное блуждание по столбцу вверх и вниз с повышенной вероятностью задержки в точках границы. Вероятности блуждания подобраны так, что инвариантное распределение вероятности положения точки траектории на строках таблицы равномерное. При равномерном распределении начальной точки блуждания (в левом столбце таблицы) это гарантирует статистически равномерное распределение ответов (на крайнем правом столбце) в серии таких задач. В этой задаче все операции локализованы вблизи текущей клетки траектории, что устранило указанные выше проблемы. Подробно эта задача описана в разделе 5.

Эксперимент с задачей случайного блуждания был поставлен по полной схеме совместно с задачей поиска максимума. Результаты качественно подтвердили статистику, полученную

в эксперименте с треугольной таблицей. Правда, у одного испытуемого можно заподозрить неадекватное восприятие задач из-за одного выброса пропускной способности на задаче случайного блуждания, однако этот выброс не подтвержден остальными точками графика. Кроме того, значительно возросла доля испытуемых, которые показали последовательную работу с ускорением при высокой сложности. Доля испытуемых, показавших параллельные вычисления, оказалась близка к четверти контингента.

В данной статье подробно описаны эксперименты с задачами развертки цилиндра и случайного блуждания. В первых двух разделах 2 и 3 представлен математический аппарат расчета пропускной способности, доверительных интервалов этой оценки и метода анализа результатов эксперимента. Эти разделы близки к соответствующим разделам работы [Коганов и др., 2013] и приведены для удобства читателей, чтобы текст данной статьи был достаточен для понимания результатов. Но в них имеется и новая информация. В разделе 4 описана задача развертки цилиндра и результат ее апробации. В разделе 5 представлена задача случайного блуждания. Раздел 6 содержит описание эксперимента с задачами поиска максимума и случайного блуждания. В раздел 7 вынесены вопросы, связанные с оценкой достоверности полученных результатов. Этот раздел содержит в основном математическую информацию с привязкой к поставленным экспериментам и методам их обработки.

## 2. Метод оценки пропускной способности мозга при решении задачи

**Определение.** Сложностью задачи поиска максимума будем называть количество чисел в таблице. Сложностью задачи вычисления траектории будем называть число клеток таблицы в искомой траектории. Это относится ко всем модификациям этой задачи.

Для выявления параллельности обработки информации в идеале можно использовать зависимость среднего времени правильного решения задачи от сложности. Если время поиска максимума растет не линейно по сложности, а имеет участок слабой зависимости от сложности (плато на графике), то это аргумент в пользу подключения на этом участке графика дополнительного логического блока. Однако при такой методике возникает риск неверного учета объема информации, которую реально использует испытуемый, формируя ответ. Если испытуемый готов пойти на риск ошибки, то он может искать максимум только по некоторой части таблицы, уменьшая время выработки ответа. Поэтому для анализа работы испытуемого требуется характеристика, которая учитывает не только время решения, но и частоту ошибок. Такой характеристикой является пропускная способность мозга как информационного канала при переработке символьной информации. В оценке пропускной способности ключевым является следующее положение.

**Утверждение 2.1.** Для достоверного определения максимума в таблице требуется просмотреть все числа в ней. Для достоверного построения траектории в соответствующей таблице требуется просмотреть все пары чисел, которые стоят рядом с точками правильной траектории. Таким образом, при гарантированном решении указанных задач необходимый и достаточный объем исходной информации пропорционален сложности задачи, определенной выше.

**Замечание 2.2.** Если под сложностью задачи понимать число необходимых для решения операций из стандартного логического базиса, то в самом общем случае верно более слабое утверждение: *для решения задачи необходимо и достаточно переработать количество символов, пропорциональное сложности задачи*. Но при этом часть этих символов не обязательно относится к исходным данным, а появляется в ходе промежуточных вычислений. Учесть такие символы в обработке психологического эксперимента практически невозможно. Ценность предлагаемых тестов заключается именно в том, что все необходимые для решения задачи символы явно входят в исходную информацию и их легко учесть.

Введем обозначения.

$W$  — оценка пропускной способности испытуемого.

$K$  — число различных априори возможных вариантов ответа в одной задаче.

$M$  — число вариантов возможных значений одного элемента исходных данных. Для задачи поиска максимума элемент данных — это двузначное десятичное число от 00 до 99 ( $M = 100$ ). Для задачи вычисления траектории элемент данных — это набор десятичных цифр 0–9 в клетках, соседних с текущей клеткой траектории. При этом все цифры в одном элементе данных различны. Для блуждания по цилиндру в элементе две цифры ( $M = 90 = 10 \times 9$ ). Для случайного блуждания в элементе три цифры ( $M = 720 = 10 \times 9 \times 8$ ).

$Q = \log_2(M)$  — коэффициент перевода в биты энтропии элемента исходных данных.

$A$  — число элементов исходных данных, которые надо просмотреть для получения гарантированного верного ответа в одном предъявлении задачи (это мера сложности задачи).

$g$  — доля задач, (частота) в которых испытуемый правильно выполнил операции решения задачи в эксперименте на серии задач данной сложности.

$f_T$  — теоретическое значение доли верных ответов, соответствующее  $g$ .

$f$  — эмпирическое значение частоты (доли) верных ответов.

$T$  — среднее время решения по правильно решенным задачам этой сложности.

$N$  — число предъявленных задач в серии одной сложности.

Под оценкой информации, переработанной испытуемым, будем понимать оценку числа символов, которые он обработал в серии задач данной сложности. Если задача решена не верно, то всю информацию, содержащуюся в ней, будем считать необработанной, а время, затраченное на неверное решение, исключим из оценки среднего времени решения задачи.

Тогда оценка пропускной способности (число переработанных символов в единицу времени) имеет вид

$$W = \frac{QAg}{T}. \quad (2.1)$$

В этой формуле известны все данные, кроме частоты  $g$  правильных операций при решении задач. Заметим, что это принципиально не наблюдаемый параметр, поскольку он связан с промежуточными мыслительными операциями испытуемого, никак не регистрируемыми в тесте. Для оценки этого параметра можно использовать эмпирическое значение доли верных ответов  $f$ . Если не учитывать погрешность оценки частоты, связанной с конечностью числа предъявлений задач  $N$ , то следует учесть, что при ошибке возможно случайное угадывание ответа (совпадение случайно выданного ответа с правильным значением), что происходит с вероятностью  $1/K$ . Поэтому «теоретическая» частота верных ответов удовлетворяет уравнению

$$f_T = g + (1 - g) / K. \quad (2.2)$$

Разрешая это уравнение относительно неизвестной частоты корректных решений, получаем

$$g = \frac{Kf_T - 1}{K - 1}. \quad (2.3)$$

Исходя из статистической погрешности значения эмпирической частоты, имеем

$$f_T = f \pm \delta. \quad (2.4)$$

При доверительном интервале, равном  $b$  стандартных отклонений  $\delta = b\sigma / \sqrt{N}$ , где сигма обозначает стандартное отклонение бинарного процесса Бернулли (решение верное или неверное). В таких процессах наибольшее значение стандартного отклонения  $\sigma = 1/2$  достигается при равновероятных исходах, когда  $g = 1/2$ . Поэтому

$$\delta \leq \frac{b}{2\sqrt{N}}. \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.3, 2.4) и оценки (2.5) следует

$$g = \frac{Kf - 1}{K - 1} \mp \frac{bK}{2\sqrt{N}}. \quad (2.6)$$

Теперь из (2.1) можно получить окончательную оценку

$$W = \frac{QA(Kf - 1)}{T(K - 1)} \pm \frac{bQAK}{2T(K - 1)\sqrt{N}}. \quad (2.7)$$

Эта оценка пропускной способности содержит только параметры, известные из эксперимента. При обработке экспериментальных данных был использован доверительный интервал с  $b = 1$  (1 стандартное отклонение). Оценка уровня этого доверительного интервала приводится в специальном разделе 7.1, что обусловлено достаточно высокой сложностью вывода, который непосредственно не относится к основному содержанию статьи. Отметим только, что этот уровень для каждого значения параметра  $b$  не ниже, чем для интервала  $\pm b\sigma$  в нормальном распределении. В частности, для указанного интервала уровень не ниже 0,7.

### 3. Метод анализа диаграмм пропускной способности

Вывод о регистрации параллельной работы испытуемого в задаче поиска максимума делался, если пропускная способность достоверно росла при росте сложности в задаче поиска максимума, и достоверно не имела роста в задаче вычисления траектории. Если в обеих задачах регистрировалась достоверная стагнация пропускной способности, то регистрировалась последовательная обработка информации. Вывод о последовательном способе решения задач с ускорением работы задействованных в решении участков мозга делался, если пропускная способность достоверно росла по сложности в обеих задачах. Если нельзя достоверно регистрировать одну из тенденций, то регистрировалась неопределенность результата эксперимента для данного испытуемого. Полная схема анализа результатов опыта приведена в таблице 1. Особый случай, если в задаче поиска максимума есть стагнация пропускной способности, а при вычислении траектории она растет. Это означает, что испытуемый по-разному воспринимает элементарное сравнение чисел в этих задачах и использует ускорение только в задаче траекторий, хотя решает обе задачи последовательно. Такой результат нежелателен, ибо ставит под сомнение основную схему анализа, основанную на эквивалентности сравнений для человека в этих задачах.

Таблица 1. Анализ способа решения задачи испытуемым

Тип адаптации к сложности	Тенденция $W$ , поиск максимума	Тенденция $W$ , вычисление траектории
Запараллеленность на поиске максимума без ускорения	рост	стагнация
Последовательно равномерно (без ускорения)	стагнация	стагнация
Последовательно и ускорение на обеих задачах	рост	рост
Последовательно. Ускорение в поиске траектории; Для испытуемого операции сравнения в этих задачах неэквивалентны	стагнация	рост
Действие неучтенных факторов	одна или обе тенденции недостоверны (неопределенность тенденции) или наличие достоверного убывания в одной из задач	

#### Выявление тенденции

**Определение 3.1.** Назовем ПС-кортежем последовательность полученных значений пропускной способности  $W$  в порядке роста сложности задачи для одного испытуемого. Сами значения  $W$  из ПС-кортежа назовем компонентами.

Назовем связанным отрезком в ПС-кортеже набор подряд идущих компонент, доверительные интервалы которых попарно пересекаются (не только у соседних компонент). Интервал может состоять из одного компонента.

Термин «почти все компоненты» означает «все компоненты, кроме первого компонента ПС-кортежа».

**Пояснение.** Первый компонент, который соответствует самой малой сложности задачи, обычно меньше остальных. Возможно, это связано с низкой концентрацией испытуемых на этой сложности. Возможно также, что это связано с большой долей времени моторной реакции нажатия клавиши при малом времени решения задачи. Этот эффект нуждается в дополнительном исследовании. Поэтому первый компонент исключается из анализа тенденции. □

### *Способ регистрации достоверной тенденции*

1. Регистрируется стагнация, если почти все компоненты ПС-кортежа лежат в одном связанном интервале.

2. Регистрируется рост пропускной способности, если:

2.1) почти все элементы ПС-кортежа можно разбить на последовательно расположенные связные интервалы, так что каждое значение  $W$  в любом интервале больше любого значения  $W$  в предыдущем интервале (если он есть);

2.2) значения компонент в последнем интервале отстоят от значений в первом интервале не менее чем на сумму полудлин доверительных интервалов этих компонент. Формально, если значение некоторой компоненты последнего интервала  $W_1 \pm h_1$ , а значение произвольной компоненты первого интервала  $W_2 \pm h_2$ ,  $W_1 - W_2 \geq h_1 + h_2$ .

3. Аналогично регистрируется убывание пропускной способности с заменой возрастания значений на их убывание.

4. Регистрируется неопределенность, если не выполнено ни одно из предыдущих условий или ПС-кортеж содержит трудно объяснимые выбросы значений, сильно влияющие на определение тенденции.

Уровень достоверности такого определения тенденции исследован в разделе 7.2. В разделе 7.3 исследуется влияние на регистрацию тенденции некоторых дополнительных операций, которые возникают при выполнении тестовых заданий человеком.

## **4. Эксперимент с задачей «развертка цилиндра»**

Эксперимент носил характер апробации методики, основанной на тесте, в котором человек вычисляет траекторию по плоской развертке цилиндра. Задача имела следующую интерпретацию. Боковая поверхность цилиндра разбита на круговые слои, расположенные вдоль оси цилиндра. Каждый слой разбит на заданное (общее для всех слоев) число одинаковых клеток. Слои относительно друг друга повернуты так, чтобы граница двух смежных клеток одного слоя находилась точно посередине смежной с ними стороны клетки соседнего слоя (рис. 1 — «кирпичная кладка»). В каждой клетке стоит некоторое целое однозначное число. В соседних по слою клетках стоят разные числа. На первом слое отмечена некоторая клетка, которая является началом траектории движения по поверхности цилиндра. Движение происходит по следующему правилу. Из текущей клетки надо перейти в ту соседнюю клетку следующего слоя (одну из двух), в которой стоит большее число. На последнем слое, кроме указанных цифр, клетка помечена порядковым номером. Ответом задачи является номер той клетки, в которой завершилась траектория движения. Если начальная клетка выбирается случайно с равномерным распределением по первому слою, а цифры в клетках других слоев выбираются так, что при переходе на очередной слой оба направления смещения равновероятны, то номера клеток на последнем слое тоже имеют равномерное распределение вероятности по слою. Разумеется, в каждой задаче траектория определена однозначно, а вероятности проявляются в ансамбле задач,

последовательно предъявляемых испытуемому. Кроме заикливания каждого слоя, задача вполне аналогична вычислению траектории по треугольной таблице. Поэтому для ее решения практически нельзя эффективно реализовать параллельное вычисление траектории [Коганов, 2010].

Работа на реальном цилиндре требует механических манипуляций с этим объектом, что недопустимо в эксперименте, где проверяется время мысленного решения логической задачи. Поэтому в эксперименте предъявлялась плоская развертка цилиндра на экране компьютера. Слой поверхности при этом превращался в столбец прямоугольной таблицы. Крайние клетки столбца соответствовали клеткам слоя, по которым происходил разрез поверхности цилиндра. Поскольку клетки на соседних слоях сдвинуты относительно друг друга на половину стороны клетки, то таким же образом сдвинуты в развертке столбцы.

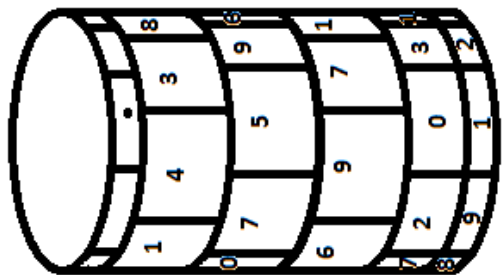


Рис. 1. Расположение клеток с цифрами на поверхности цилиндра. Движение происходит слева направо от клетки, помеченной точкой в самом левом слое. Справа от последнего слоя стоят порядковые номера клеток

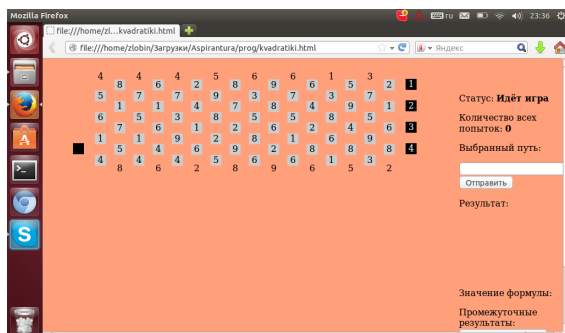
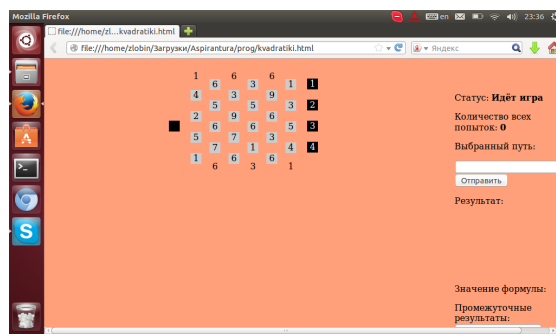
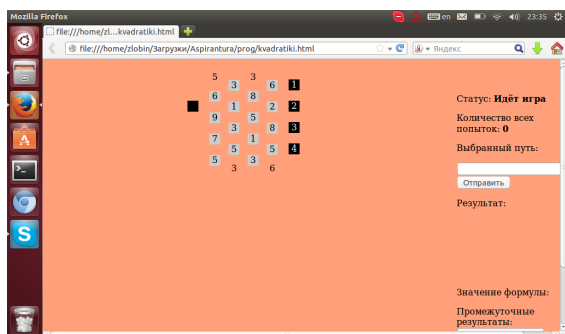


Рис. 2. Форма представления развертки цилиндра при предъявлении задачи. Показаны задачи сложностей 4, 6, 16. Движение по таблице происходит слева направо от черной точки слева. В самом правом черном столбце проставлены порядковые номера клеток последнего столбца таблицы. Ответом задачи является номер той клетки, где завершилось движение. Из каждой клетки надо переходить в ту соседнюю цифру справа, которая больше. При переходе в цифру вне клеток столбца надо перейти в клетку того же столбца на противоположном конце. Там стоит та же цифра. Это имитация цикличности слоя цилиндра

Цифры, стоящие в крайних клетках столбца, повторяются рядом с клеткой на противоположном конце столбца, что позволяет вычислять переход из крайних клеток с учетом заикливания столбца на реальном цилиндре.

При этом переход в цифру, добавленную вне столбца, означает, что надо перейти на противоположный край этого столбца, где стоит та же самая цифра. Примеры такого представления задачи на экране монитора показаны на рисунке 2. Сложность задачи пропорциональна числу слоев (столбцов) и равна количеству цифр, которые надо просмотреть, чтобы решить задачу (мысленно пройти всю траекторию по таблице).

Испытуемый проходил предварительную тренировку, решая задачи средней сложности до тех пор, пока сам не сообщал, что научился решать задачу. После этого он получал установку: задачи надо решать как можно быстрее, но не допуская ошибок, которые резко снижают оценку результата. Решив очередную задачу, испытуемый останавливал секундомер нажатием клавиши «пробел». При этом задача исчезала с экрана и появлялось окно, в которое надо было вписать ответ (номер последней клетки траектории) в произвольном темпе, удобном для испытуемого — это время не регистрируется в оценке работы. После этого испытуемый нажатием клавиши в удобное для себя время отправлял ответ на компьютерную обработку и одновременно запускал предъявление следующей задачи. Испытуемый получал серии задач одинаковой сложности. В каждой серии предъявлялось 20 задач. Сложности задач (число столбцов) в разных сериях пробегали значения 2, 4, 6, 10, 14, 20. Высота столбца во всех задачах была одинаковой. В данном эксперименте она была выбрана 4. Система позволяет варьировать этот параметр. Он не влияет на сложность задачи, но в предварительных опытах было установлено, что при больших столбцах возникает дискомфорт при переводе взгляда на другой конец столбца.

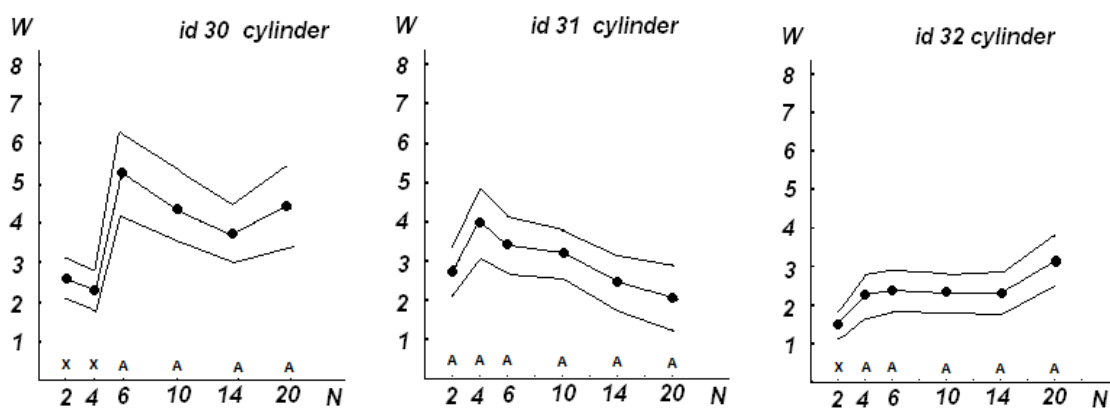


Рис 3. Диаграммы пропускной способности  $W$  трех испытуемых в зависимости от сложности задачи  $N$  для задачи «развертка цилиндра». Размерность  $W$  — бит/с. Буквой  $X$  обозначены точки, отброшенные из анализа тенденции. Буквой  $A$  обозначены точки, входящие в один связанный отрезок. Видно, что все не отброшенные точки образуют один связанный отрезок, что означает стагнацию пропускной способности

В эксперименте были испытаны три человека (студенты). Все испытуемые быстро поняли цель задачи и способ операции с таблицей. Пропускная способность мозга испытуемого при решении задачи вычислялась отдельно для каждой серии задач по формуле (2.7), где

$$Q = \log_2 10 + \log_2 9 \approx 7,492 \quad (4.1)$$

(элемент исходных данных — это пара различных цифр, подлежащих сравнению);  $K$  — число строк в таблице (ответом является номер строки).

Пропускная способность интерпретируется как количество бит информации, которые перерабатывает испытуемый в единицу времени в среднем по серии задач. Имеется в виду время решения задачи без учета пауз между задачами. Вывод формулы (2.7) для задач указанного вида впервые был представлен в [Коганов и др., 2013].

Результаты показаны на графиках рисунка 3. На этих рисунках буквы под точками графика показывают, какие точки на диаграмме недостоверно отличаются по значению пропускной способности по критерию достоверности 1 сигма. Одинаковые буквы отмечают один связанный отрезок. Литерой  $X$  отмечены точки, отброшенные из анализа тенденции.

По этим данным можно сделать уверенный вывод, что при сложности выше 4 пропускная способность держится на постоянном уровне с точностью до интервала достоверности. Так же достоверно можно утверждать, что при низком уровне сложности испытуемые снижали пропускную способность. Возможно, это связано с возрастанием доли времени, которое испытуемый тратит на моторные операции (нажатие кнопок) и на сосредоточении внимания на очередной

задаче после ее появления на экране, переход на другой конец столбца. Отметим, что аналогичный эффект наблюдается во всех задачах, где измеряется зависимость времени решения задачи в зависимости от сложности (или отношение меры сложности задачи к этому времени). Влияние таких нелогических моторных операций исследовано в разделе 7.3.

Постоянство пропускной способности подтверждает теоретический вывод о последовательном способе решения этой задачи. Однако некоторые испытуемые в представленном эксперименте и в предварительных опытах жаловались на дискомфорт при переводе взгляда на другой конец столбца. Поэтому для основного эксперимента была выбрана другая задача вычисления траектории.

## 5. Задача вычисления траектории «случайное блуждание»

В этом разделе будет описана тестовая задача вычисления траектории, в которой траектория является реализацией специально выбранного случайного блуждания на линейном графе. Это блуждание обеспечивает равномерное распределение по вершинам графа финальной точки блуждания.

### 5.1. Случайное блуждание на дискретном отрезке $\overline{1, M}$

**Содержательное описание.** Рассмотрим ориентированный петлевой линейный граф с  $M$  вершинами. Ребра идут из каждой вершины в себя и к каждому из соседей. На этом дискретном отрезке  $\overline{1, M}$  реализовано случайное блуждание в форме марковского процесса. Из любой внутренней точки дискретного отрезка реализуется равновероятный переход в себя или в одну из соседних точек (всего три возможности, и поэтому их вероятности =  $1/3$ ). Из крайней точки с вероятностью  $2/3$  реализуется переход в себя, а с вероятностью  $1/3$  — переход в соседа (он единственный). На рисунке 4 показана схема такого блуждания.

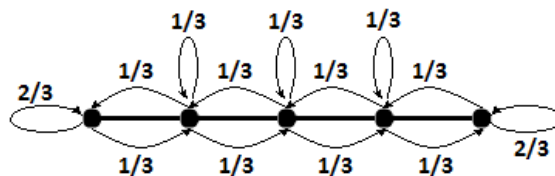


Рис. 4. Схема случайного блуждания на нескольких линейно упорядоченных точках. На стрелках, которые показывают возможные переходы из каждой точки, показаны вероятности соответствующих переходов

Формулы этого блуждания (коэффициенты перед номерами точек обозначают вероятности перехода в эти точки из точки, указанной слева от стрелки):

$$\langle 0 \rangle \rightarrow \frac{2}{3} \langle 0 \rangle \oplus \frac{1}{3} \langle 1 \rangle, \quad (5.1a)$$

$$\langle M \rangle \rightarrow \frac{2}{3} \langle M \rangle \oplus \frac{1}{3} \langle M-1 \rangle, \quad (5.1b)$$

$$\langle i \rangle \rightarrow \frac{1}{3} \langle i-1 \rangle \oplus \frac{1}{3} \langle i \rangle \oplus \frac{1}{3} \langle i+1 \rangle, \quad i \in \overline{1, M-1}. \quad (5.1c)$$

Инвариантная мера на точках отрезка удовлетворяет системе уравнений

$$f(0) = \frac{2}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1), \quad (5.2a)$$

$$f(M) = \frac{2}{3} f(M) + \frac{1}{3} f(M-1); \quad (5.2b)$$

$$f(i) = \frac{1}{3}f(i-1) + \frac{1}{3}f(i) + \frac{1}{3}f(i+1), \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (5.2c)$$

$$f(0) + \dots + f(M) = 1, \quad (5.2d)$$

$$f(i) \geq 0, \quad i \in \overline{0, M}. \quad (5.2e)$$

Решением является равномерное распределение вероятностей на точках:

$$f(0) = \dots = f(M) = \frac{1}{M+1}. \quad (5.3)$$

Таким образом, при длительной реализации такого блуждания вероятность оказаться в любой точке одинакова.

## 5.2. Тест вычисления траектории, реализующий блуждание

**Общий вид предъявляемой задачи.** Прямоугольная таблица:  $K+2$  строк,  $M$  столбцов. Верхняя и нижняя строки выделены цветом. Остальные клетки белые. В клетках вписаны цифры. Соседние цифры в каждом столбце различные.

**5.2.1. Способ заполнения таблицы цифрами 0–9.** В верхней клетке столбца цифра выбирается как реализация равномерного распределения на 0–9. В следующей клетке цифра выбирается также, но если она совпадает с первой, то проводится повторная реализация до тех пор, пока не возникнет другая цифра. В каждой последующей клетке до конца столбца реализуется равномерное распределение, пока не возникнет цифра, отличная от цифр в двух предыдущих клетках. Эта процедура реализуется независимо для каждого столбца таблицы.

**5.2.2. Дополнительные метки.** Рядом с самым правым столбцом проставляются номера клеток последовательно от 1 до  $K+2$ . Слева от самого левого столбца отмечена одна из клеток, кроме самой верхней и последней.

**5.2.3. Формальная запись.** Обозначим выбор значения случайной величины  $x$  из набора значений  $(x_1, \dots, x_n)$  с вероятностями соответственно  $p_1, \dots, p_n$ , где  $p_1 + \dots + p_n = 1$ , формулой

$$x = p_1 \oplus \dots \oplus p_n \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Если значение  $x$  выбирается не из всего набора  $(x_1, \dots, x_n)$ , а за исключением некоторых значений  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$  с вероятностями  $p_1, \dots, p_{n-k}$  в порядке общей нумерации множества значений, где  $p_1 + \dots + p_{n-k} = 1$ , то такой выбор обозначим формулой

$$x = p_1 \oplus \dots \oplus p_{n-k} \{x_1, \dots, x_n \mid x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}.$$

Обозначим  $a(i, j)$  цифру, которая стоит в строке  $i$  и в столбце  $j$ .

Тогда алгоритм заполнения цифрами столбца можно записать так.

$$a(1, j) = \frac{1}{10} \oplus \dots \oplus \frac{1}{10} \{0, \dots, 9\},$$

$$a(2, j) = \frac{1}{9} \oplus \dots \oplus \frac{1}{9} \{0, \dots, 9 \mid a(1, j)\},$$

$$a(i, j) = \frac{1}{8} \oplus \dots \oplus \frac{1}{8} \{0, \dots, 9 \mid a(i-1, j), a(i-2, j)\}, \quad i = \overline{3, K+2}, \quad j = \overline{1, M}.$$

Для начального столбца ( $j=0$ ) выбирается случайная позиция

$$v = \frac{1}{K} \oplus \dots \oplus \frac{1}{K} \{2, \dots, K+1\}.$$

После этого заполняется нулевой столбец

$$a(v, 0) = 1; \quad a(i, 0) = 0, \quad i = \overline{1, (v), K + 2}.$$

В последнем столбце таблицы проставляются номера строк таблицы:

$$a(i, M + 1) = i, \quad i = \overline{1, K + 2}.$$

Столбец № 0 дополнительный левый, он содержит отметку 1 на той клетке, с которой надо начинать траекторию. Столбец №  $M + 1$  дополнительный правый, он содержит номера строк, на которых может завершиться траектория.

#### 5.2.4. Вычисление траектории по заполненной таблице

4.1. Траектория начинается с отмеченной клетки левого дополнительного столбца.

4.2. В каждой клетке траектории выбирается в соседнем столбце справа одна из трех ближайших клеток, именно та, где стоит самая большая цифра. Траектория продолжается в эту клетку.

4.3. Если выбор падает на клетку, самую верхнюю в столбце, то производится спуск на одну клетку вниз в том же столбце.

4.4. Если выбор падает на клетку, самую нижнюю в столбце, то производится подъем на одну клетку вверх в том же столбце.

4.5. В последнем правом столбце таблицы производится переход в соседнюю клетку дополнительного правого столбца и запоминается номер строки, стоящий в этой клетке.

4.6. Этот номер выдается в качестве ответа задачи.

**5.2.5. Анализ задачи.** Реализуется блуждание пункта 5.1 на точках столбцов с номерами от 1 до  $K$ . Точки крайних строк требуют перехода в соседнюю точку того же столбца, увеличивая вероятность перехода в точки строк 1 и  $K$ . Это реализует вероятность перехода, равную  $2/3$ . В остальные точки вероятность перехода равна  $1/3$ . Таким образом, как показано в пункте 5.1, финальное распределение точек равномерное, если равномерно распределены исходные точки.

Сложность задачи равна числу основных столбцов  $M$ . На каждом шаге отрабатывается сравнение трех попарно различных десятичных цифр, что означает переработку информации объемом

$$Q = \log_2(10 \times 9 \times 8) = 9,4918530963(bit).$$

Объем информации при правильно рассчитанной траектории равен  $MQ$ .

Число возможных ответов равно  $K$ .

Это данные для формулы расчета пропускной способности мозга испытуемого при решении задачи.

**5.2.6. Пример задачи** «случайное блуждание» показан в таблицах 2 и 3.

$$K = 3, \quad M = 8.$$

Таблица 2. Пример данных задачи случайного блуждания

0	9	8	3	3	7	1	2	5	1
1	3	1	5	2	1	6	5	4	2
0	6	2	1	4	2	3	6	6	3
0	1	5	6	3	3	5	7	1	4
0	4	4	7	6	5	6	5	2	5

Ответ = 2. В таблице 3 показана траектория в этой задаче (клетки траектории отмечены литерой Т).

В каждом новом предъявлении задачи всю таблицу необходимо рассчитывать заново. Траектории в задачах, которые отличаются только начальной точкой таблицы, очень сильно зависимы в статистическом смысле.

Таблица 3. Траектория, соответствующая данным таблицы 2

0	9T	8T	3	3	7	1	2	5	0
1T	3T	1T	5T	2	1	6	5	4	1
0	6	2	1	4T	2	3	6	6T	2T
0	1	5	6	3	3T	5T	7T	1	3
0	4	4	7	6	5	6T	5	2	4

## 6. Эксперимент с задачей «случайное блуждание»

Способ предъявления задачи и вербальная установка испытуемому совпадали с изложенным выше в задаче «развертка цилиндра». Перед основной работой испытуемый проходил тренировку на задачах средней сложности. На рисунке 5 показана форма предъявления информации на экране компьютера в задаче «случайное блуждание».

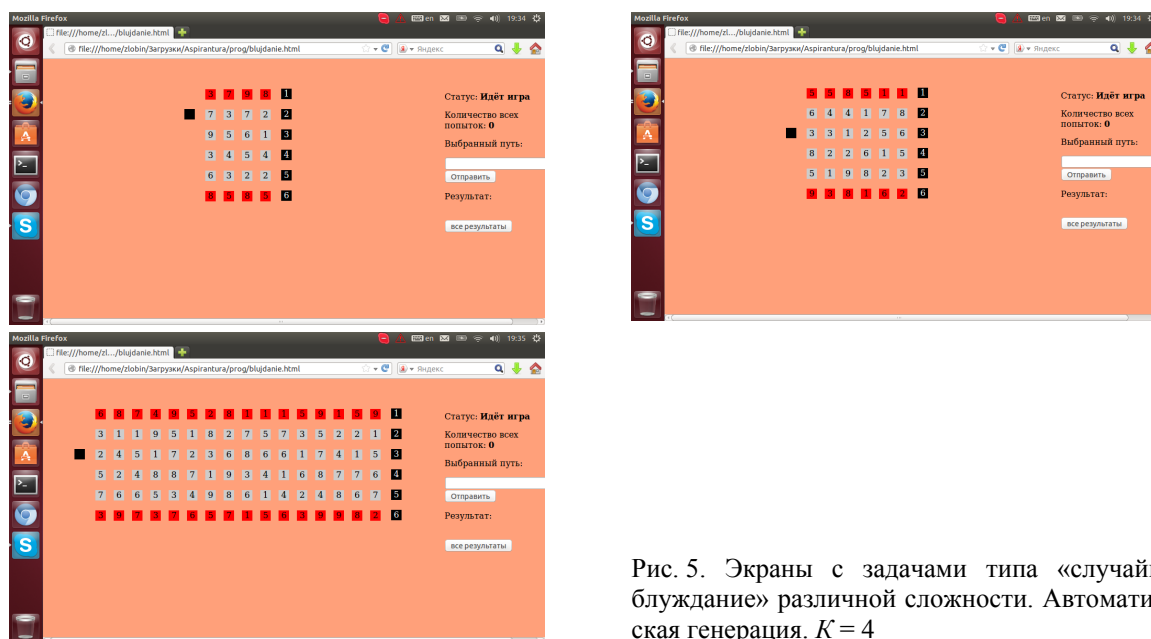


Рис. 5. Экраны с задачами типа «случайное блуждание» различной сложности. Автоматическая генерация.  $K = 4$

В эксперименте использовались серии задач с  $K = 4$ , сложности задач в которых пробежали значения 4, 6, 8, 12, 16. В соответствии с основной целью эксперимента, кроме задач «случайного блуждания», предъявлялась задача поиска максимума, описанная выше и в [Коганов и др., 2013]. Серии в этой задаче имели сложности 2, 4, 6, 8, 12, 16. Форма предъявления этой задачи показана на рисунке 6. После нахождения наибольшего из двузначных чисел в таблице испытуемый останавливал секундомер клавишей «пробел», после чего задача исчезала с экрана, и испытуемый по памяти вводил ответ в окно. После нажатия виртуальной кнопки «отправить» на экран выводилась следующая задача той же серии. Это давало возможность испытуемому выбрать удобный для себя момент предъявления очередной задачи. В каждой серии обеих задач предъявлялось по 20 вариантов заданий. Переход от одной серии к другой по завершении серии осуществлял экспериментатор в специальном окне программы. Для серии автоматически вычислялась пропускная способность описанным выше способом и ее доверительный интервал по уровню 1 сигма. Анализ результатов проводился с целью определить способ решения задачи поиска максимума: последовательный равномерный, последовательный с ускорением при росте сложности, параллельный (с одновременным сравнением нескольких пар чисел). Метод этого анализа описан выше (раздел 3) и в [Коганов и др., 2013].

Были обнаружены все три типа организации вычислений. Всего были протестированы 11 человек. Возраст 20–25 лет. Обе задачи оказались достаточно комфортны для испытуемых.

Анализ результатов показал, что задача вычисления траектории всегда решалась последовательным просмотром таблицы. Пропускная способность либо держалась на постоянном уровне с точностью до статистической погрешности, либо достоверно росла в обеих задачах, что означает последовательный способ решения с ускорением при росте сложности.

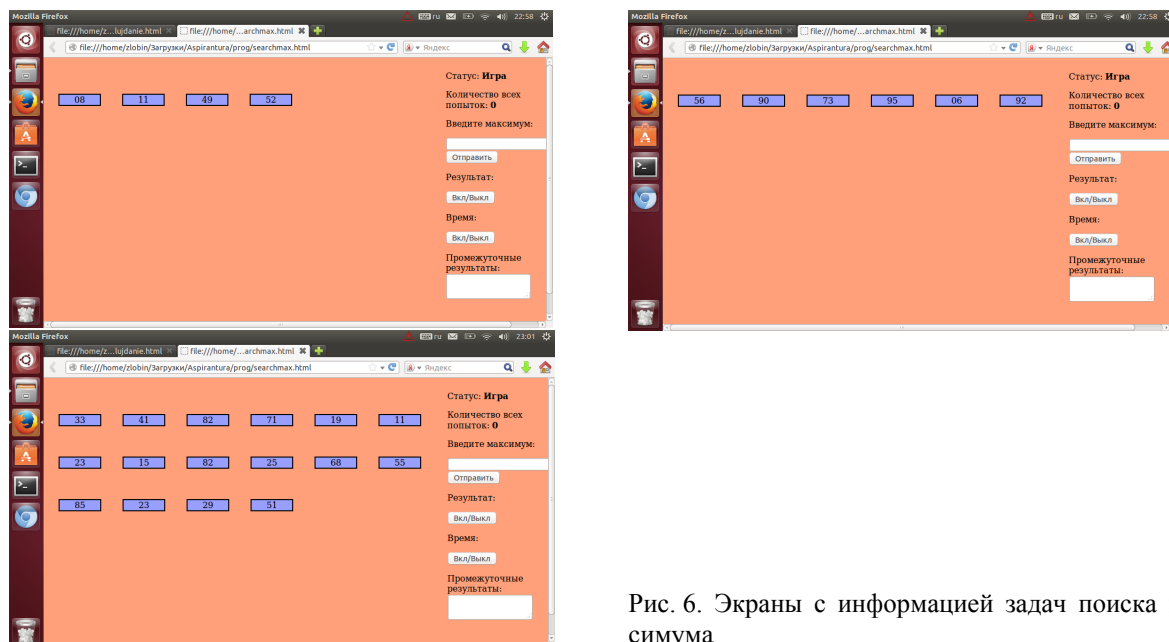


Рис. 6. Экраны с информацией задач поиска максимума

На рисунке 7 показаны диаграммы пропускной способности в зависимости от сложности задачи, в которых можно утверждать параллельный способ поиска максимума. Буква X означает точку, отброшенную из анализа тенденции. Буквы A, B, C помечают отдельные связанные отрезки. На рисунке 8 показаны диаграммы пропускной способности испытуемых, показавших последовательный равномерный способ решения обеих задач.

На рисунке 9 показаны диаграммы пропускной способности испытуемых, показавших последовательный способ решения обеих задач с ускорением по мере роста сложности. Ускорение работы, видимо, связано с повышением концентрации внимания при высокой сложности задачи. У одного испытуемого id.47 в задаче блуждания при сложности 16 большое число ошибок привело к недостоверности результата. На диаграмме id.47b эта точка исключена.

На рисунке 10 показаны результаты испытуемых, у которых не удалось однозначно установить способ решения задачи. Причина состоит в наличии одиночных выбросов пропускной способности. Если их отбросить, то получится один вариант, а если учесть — другой. Испытуемого id.40 можно отнести как к параллельному, так и к последовательно ускоренному типу, в зависимости от того, как интерпретировать выброс B на диаграмме задачи блуждания. Испытуемого id.44 можно отнести как к параллельному, так и к последовательно равномерному типу в зависимости от интерпретации выброса A в задаче максимума. Испытуемого id.50 можно отнести и к равномерному, и к ускоренному последовательному типу в зависимости от интерпретации выбросов на интервалах B.

Общая статистика следующая. Из 11-ти испытуемых параллельную обработку задачи максимума показали 3 человека, последовательный равномерный способ работы показали 2 человека, последовательный способ решения с ускорением показали 3 человека. Нечеткие результаты с возможными альтернативными вариантами способа решения показали 3 человека.

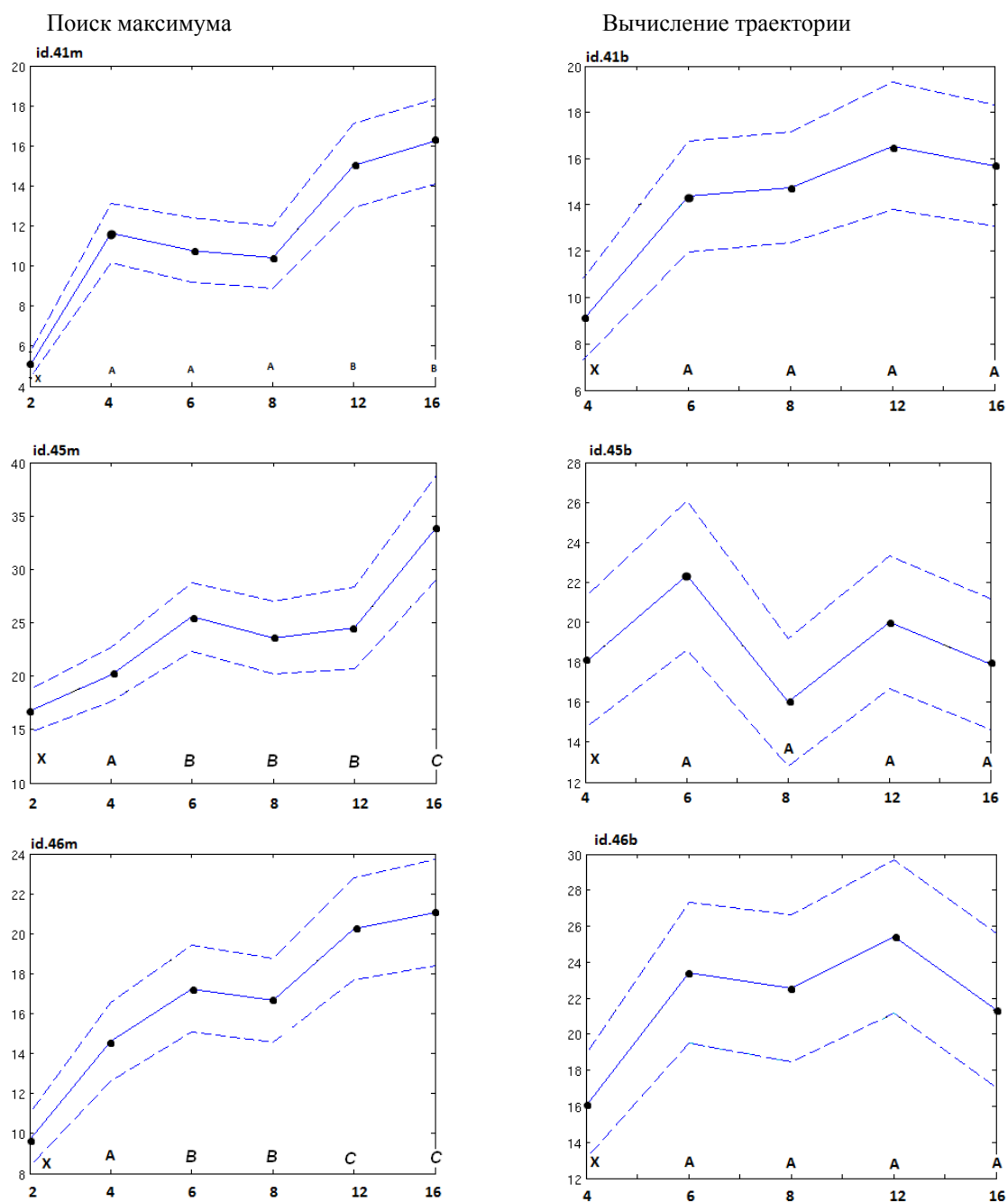


Рис. 7. Диаграммы пропускной способности (бит/с) в зависимости от сложности задачи у испытуемых, которые показали параллельный способ поиска максимума. Буква *X* означает точку, отброшенную из анализа тенденции. Буквы *A*, *B*, *C* помечают отдельные связанные отрезки. Видно, что в задаче поиска максимума имеется возрастающая последовательность интервалов, а в задаче вычисления траектории точки ложатся в один связанный отрезок

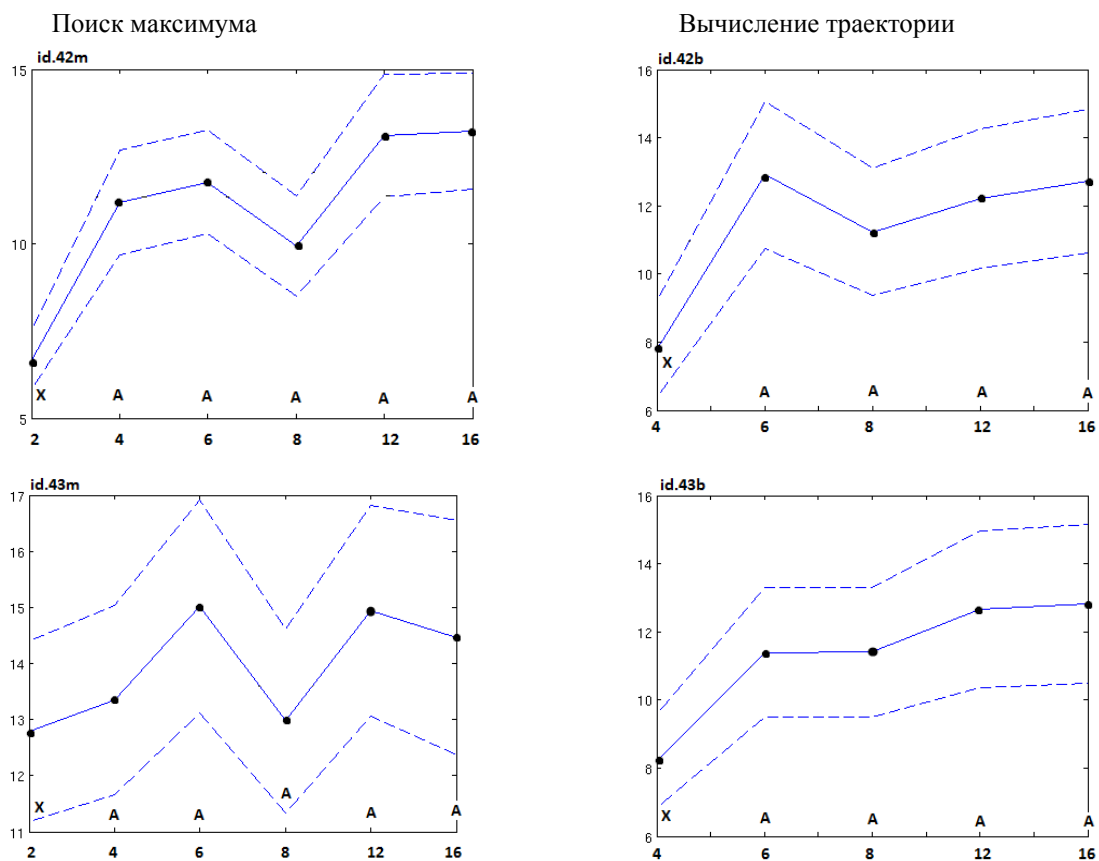


Рис. 8. Диаграммы пропускной способности (бит/с) в зависимости от сложности задачи у испытуемых, которые показали последовательный равномерный способ решения обеих задач. Буквенные пометки имеют тот же смысл, что и на рисунке 7. Видно, что в обеих задачах точки ложатся на один связанный отрезок

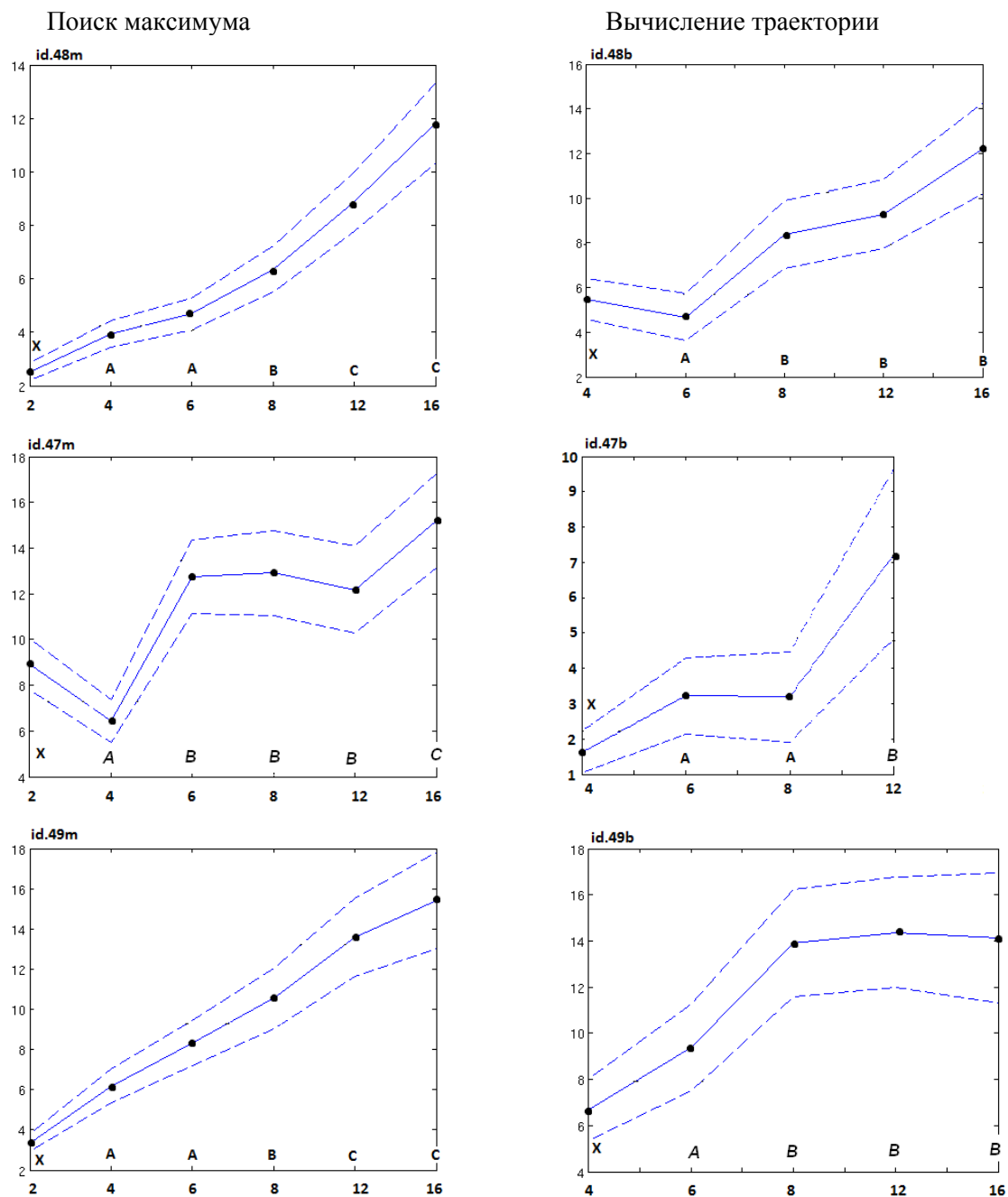


Рис. 9. Диаграммы пропускной способности (бит/с) в зависимости от сложности задачи у испытуемых, которые показали последовательный способ решения обеих задач с ускорением по мере роста сложности. Буквенные пометки имеют тот же смысл, что и на рисунке 7. Виден рост пропускной способности на обеих задачах. В опыте id.47b серия сложности 16 дала недостоверный результат

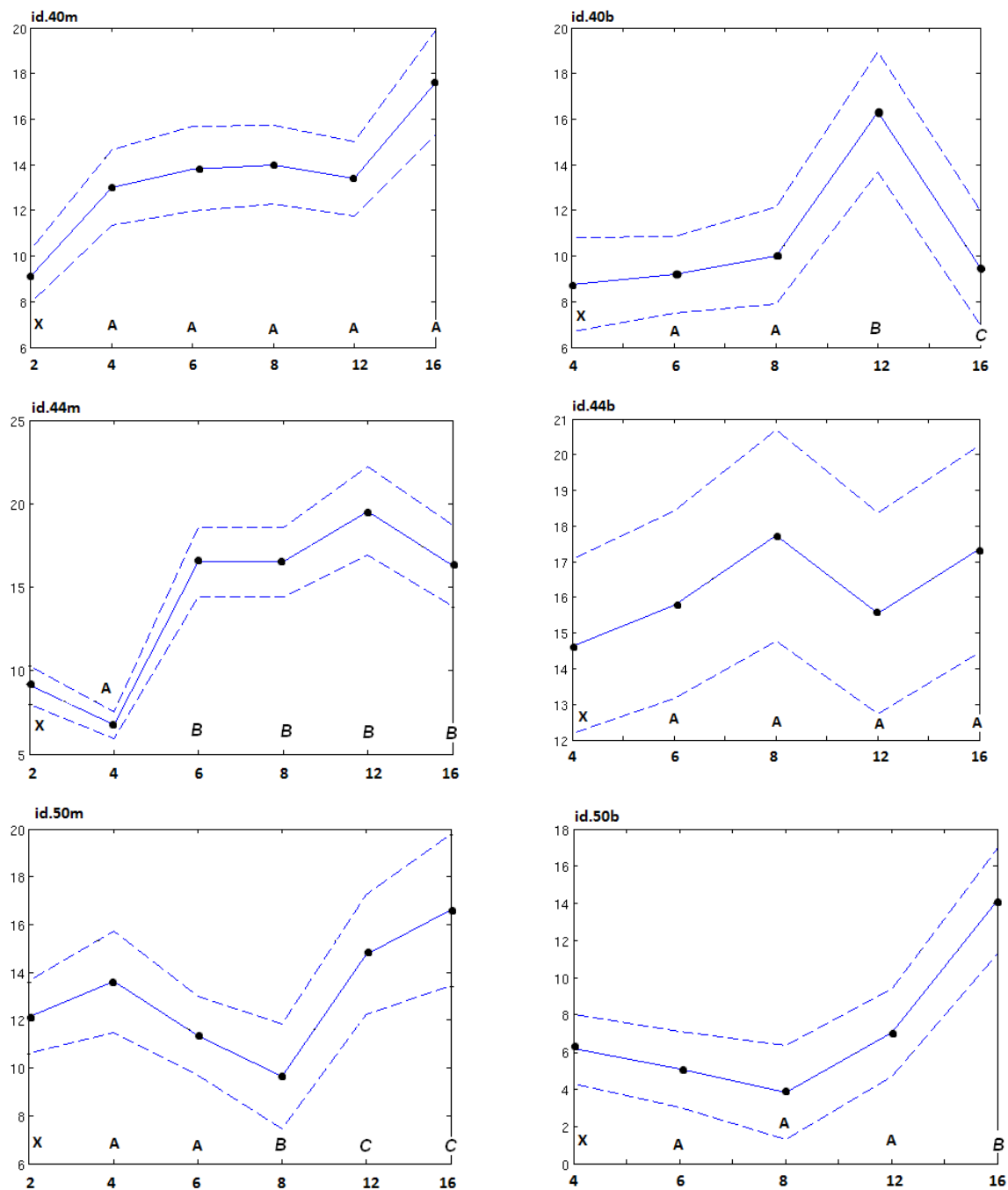


Рис. 10. Диаграммы пропускной способности (бит/с) в зависимости от сложности задачи для испытуемых, показавшие нечеткие тенденции изменения пропускной способности. Установить способ решения задачи для них надежно нельзя. Буквенные пометки имеют тот же смысл, что и на рисунке 7. id.40: параллельный / последовательно ускоренный тип, выброс *B* на диаграмме задачи блуждания. id.44: параллельный / последовательно равномерный тип, выброс *A* в задаче максимума. id.50: равномерный / ускоренный последовательный тип, выбросы *B* на диаграммах обеих задач

## 7. Оценка уровня значимости в оценке пропускной способности

**7.1. Уровень доверия интервала для оценки (2.7) при заданном значении параметра  $b$ .** Заметим, что этот параметр имеет смысл числа стандартных отклонений для оценки вероятности ошибки испытуемого. Именно эта погрешность учтена во втором члене формулы (2.7). Статистическая погрешность, связанная с оценкой среднего времени, в этой формуле не учитывается. Рассмотрим последнюю погрешность отдельно.

Исследуем, как влияет на статистическую погрешность оценки пропускной способности метод измерения времени решения задачи. Воспользуемся тем обстоятельством, что среднее время решения задачи вычисляется как усреднение по независимым измерениям времени решения отдельных задач. Поэтому распределение погрешности  $\xi$  этого параметра теоретически должно быть близко к нормальному распределению  $T = T_0 + \xi$ . Оценка пропускной способности (2.7) имеет общий вид

$$W = \frac{U}{T} = \frac{U}{T_0} - \frac{U}{T_0^2} \xi + \frac{U}{2T_0^3} \xi^2 + \dots \quad (7.1)$$

Таким образом, погрешность оценки пропускной способности распределена нормально с точностью до члена  $U\xi^2 / (2T_0^3)$ . Приняв в качестве оценки значения  $\xi$  значение оценки стандартного отклонения, можно оценить эту точность. Оценим порядок этой погрешности. Исходя из исходных данных эксперимента,

$$\begin{aligned} Q &\sim 10 \text{ (бит/элемент)}, \\ A &\sim 10 \text{ (число элементов)}, \\ (Kf - 1) / (K - 1) &\sim 1, \\ U &= QA(Kf - 1) / (K - 1) \sim 100 \text{ (бит)}, \\ N &\sim 20 \text{ (число предъявлений задач одной сложности)}. \end{aligned}$$

Исходя из результатов эксперимента,

$$T \sim 10 \text{ (с)}.$$

Наблюдаемая вариация измеренного времени  $t$  решения одиночной задачи для средней сложности приблизительно равна  $\Delta t \sim \pm 3(s)$ . Можно принять этот интервал за оценку двух стандартных отклонений, что для нормального распределения соответствует уровню значимости 0,85. Иными словами, мы допускаем превышение этой вариации для 15 % задач в достаточно длинной серии.

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma T &\sim \frac{\Delta t}{2\sqrt{N}} \sim 0.3(s), \\ W &\sim 10 \text{ (бит/с)}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Тогда абсолютная погрешность нормальной части оценки пропускной способности по отношению к полному значению равна

$$D = \frac{U}{2T_0^3} \sigma^2 \sim \frac{100 \cdot 0,09}{2 \cdot 1000} \approx 0,0045 \text{ (бит/с)}. \quad (7.3)$$

Относительная погрешность:

$$\frac{D}{W} \sim 0,00045. \quad (7.4)$$

Таким образом, с ошибкой не более 0,05 % относительно полного значения можно считать, что оценка пропускной способности имеет нормальное распределение погрешности в связи с флуктуацией оценки среднего времени решения задачи. Дисперсия этого нормального

распределения определяется вторым членом разложения (7.1):

$$\sigma_T W =_{\text{def}} \sigma \left\{ \frac{U}{T_0^2} \xi \right\} = \frac{U}{T_0^2} \sigma \{ \xi \} \sim 0,3 \text{ (бит/с)}. \quad (7.5)$$

Относительная вариация нормальной компоненты погрешности

$$\frac{\sigma_T W}{W} \sim 0,03, \quad (7.6)$$

$$\frac{D}{\sigma_T W} \sim \frac{0,0045}{0,3} = 0,015,$$

$$\frac{D}{D + \sigma_T W} \sim \frac{0,0045}{0,345} = 0,013. \quad (7.7)$$

Значение (7.7) означает, что в стандартном отклонении оценки пропускной способности, которое обусловлено вариацией среднего времени решения задачи, доля ненормальной составляющей не более 2 %.

Однако надо признать, что экспериментального исследования реального статистического распределения среднего времени решения задачи и распределения значения пропускной способности не было проведено. Приведенные выше рассуждения следует считать предварительными. Постановка такого эксперимента затруднена необходимостью получения большой выборки значений (2.7), что означает многократный эксперимент с каждым испытуемым на каждой серии задач. С учетом утомляемости это требует многодневной работы с каждым человеком.

Поэтому при обработке результатов по формуле (2.7) член, соответствующий дисперсии среднего времени, не был учтен. В принципе, по (7.6) это может дать занижение доверительного интервала примерно на 3 % относительно измеряемой величины. Далее будет показано, как в оценке (2.7) этот дефект скомпенсирован. Но тот факт, что та часть вариации пропускной способности, которая определяется разбросом среднего времени решения, имеет практически нормальное распределение, важен для дальнейшего анализа.

Теперь рассмотрим доверительный интервал, указанный в формуле (2.7) в форме второго слагаемого. Эта оценка получена из модели процесса возникновения ошибок в серии задач как последовательности Бернулли. При этом использовалась не оценка вероятности ошибки по Байесу, а заведомо завышенная оценка дисперсии ( $\sigma = 1/2$ ), соответствующая равновероятным верным и неверным ответам, что дало завышенный доверительный интервал. Для использованных выше обозначений и оценочных значений можно записать

$$\sigma_f W < \frac{bQAK}{2T(K-1)\sqrt{N}} \approx \frac{U}{2\sqrt{N}} \sim 11 \text{ (бит/с)}, \quad (7.8)$$

$$\frac{\sigma_f W}{W} \sim 0,11. \quad (7.9)$$

Реальная частота ошибок в опыте составляла  $1-f \sim 0,1$ . Это соответствует  $\sigma \approx 0,3$  и  $\sigma_f W \sim 6,6$  (бит/с),  $\sigma_f W / W \sim 0,07$ . Можно заметить, что использованное завышение доверительного интервала (7.8) практически с избытком компенсирует отсутствие учета дисперсии среднего времени (7.6).

Отношение величины флуктуаций пропускной способности, вызванных нестабильностью времени решения задачи, к флуктуациям, вызванным вариацией числа ошибок, составляет

$$\frac{\Delta_T W}{\Delta_f W} \sim \frac{0,3}{11} \cong 0,027,$$

$$\frac{\Delta_T W}{\Delta_f W + \Delta_T W} \sim \frac{0,3}{11,3} \cong 0,0265. \quad (7.10)$$

Относительная погрешность (7.10) в оценке стандартного отклонения без учета вклада от вариации среднего времени решения задач не превосходит 3 %.

Модель испытания Бернулли дает биномиальное распределение частоты ошибок, которое близко к нормальному распределению при достаточно большой выборке. С учетом того, что флуктуации среднего времени решения тоже порождают распределение, близкое к нормальному (как показано выше), можно утверждать, что распределение погрешности оценки пропускной способности близко к нормальному.

#### 7.1.1. Анализ оценки доверительного интервала в формуле (2.7). Введем обозначения.

Наблюдаемая частота верных ответов  $m$  из  $N$ :

$$f = \frac{m}{N}.$$

Условная плотность вероятности реальной частоты верных ответов  $g$  при наблюдаемой частоте  $f$ :

$$p_N(g|f) = \binom{m}{N} g^m (1-g)^{N-m}.$$

Функция распределения этой биномиальной плотности вероятности

$$\begin{aligned} P_{N,m}(g) &= \frac{1}{\Xi} \int_0^g p_N(x|f) dx = \binom{m}{N} \left( \sum_{i=0}^{N-m} \binom{i}{N-m} (-1)^i \frac{g^{m+i+1}}{m+i+1} \right), \\ \Xi &= \int_0^1 p_N(x|f) dx = \binom{m}{N} \left( \sum_{i=0}^{N-m} \binom{i}{N-m} (-1)^i \frac{1}{m+i+1} \right), \\ 0 &\leq g \leq 1; \\ P_{N,m}(g) &= 0, \quad g < 0; \quad P_{N,m}(g) = 1, \quad g > 1. \end{aligned}$$

$\Phi[\mu, \sigma](x)$  — функция распределения нормальной случайной величины  $x$  с математическим ожиданием  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Стандартным доверительным интервалом с уровнем значимости  $2\alpha \in (0;1)$  для этого распределения вероятности назовем интервал  $[\mu - a; \mu + a]$ , для которого

$$\Phi[\mu, \sigma](\mu - a) = \alpha; \quad \Phi[\mu, \sigma](\mu + a) = 1 - \alpha.$$

Равновероятностным доверительным интервалом с уровнем значимости  $\alpha \in (0;1)$  для распределения  $P_{N,m}(g)$  (и для произвольного распределения  $P$ , имеющего математическое ожидание  $f$ ) назовем интервал  $[f - a; f + b]$ , для которого

$$P(f - a) = \alpha, \quad P(f + b) = 1 - \alpha.$$

Заметим, что в общем случае равновероятностные доверительные интервалы не симметричны относительно математического ожидания случайной величины. Но если плотность распределения симметрична относительно математического ожидания, то и доверительный интервал симметричен. Для биномиального распределения симметричный случай соответствует  $f = 0,5$ ,  $N = 2m$ .

Дисперсия распределения  $P_{N,m}(g)$  соответствует дисперсии усреднения  $N$  испытаний Бернулли:

$$\begin{aligned} D_{N,m} &= \frac{f(1-f)}{N} = \sigma^2(f), \\ \max_{0 \leq f \leq 1} \sigma(f) &= \sigma(0,5) = \frac{1}{2\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Строго говоря, при заданном уровне значимости  $2\alpha$  надо использовать равновероятностный доверительный интервал для указанного биномиального распределения. Но это связано с громоздким численным решением соответствующих уравнений для границ интервала, которые нельзя получить в алгебраической форме. Поэтому обычно используется приближенный симметричный доверительный интервал для нормального распределения с той же дисперсией. Условия применимости такой аппроксимации исследованы в [Brown, 2001]. Они следующие:  $Nf > 5$ ,  $f - a > 0$ ,  $f + a < 1$  — в принятых выше обозначениях. В данной работе был принят доверительный интервал нормального распределения, рассчитанный для максимальной дисперсии  $\max \sigma(f) | 0 \leq f \leq 1$ , независимой от частоты правильных решений. Это значительно увеличивает его длину, что полезно для неявного учета других факторов нестабильности результата, как показано выше. Тем не менее условия применимости для такого интервала выполнены. Для значений  $N = 20$ ,  $f \approx 0.9$ ,  $b = 1$ , получаем  $Nf = 18 > 5$ ,  $f + 1/(2\sqrt{N}) = 0.967 < 1$ ,  $f - 1/(2\sqrt{N}) = 0.843 > 0$ . Отметим, что второе условие нарушается уже для всех  $b > 1.492$ , что означает некорректность такой оценки доверительного интервала для достаточно высоких уровней значимости. Зато при этом мы оцениваем реальный уровень значимости использованного доверительного интервала снизу, что очень важно для корректности оценки достоверности результата.

В дальнейшем, предполагается ввести в программное обеспечение эксперимента более точную оценку доверительного интервала и автоматический учет большей совокупности влияющих факторов. Один из возможных путей такого уточнения — табуляция актуальных значений точных границ равновероятностных доверительных интервалов распределения Бернулли. Другой путь — использование в нормальной оценке доверительного интервала величину дисперсии для реального значения частоты верных ответов. В обоих случаях потребуется отдельный учет дисперсии времени решения.

**7.2. Достоверность определения тенденции изменения пропускной способности при решении задачи испытуемым по методу, изложенному в разделе 3.** Мы оценим вероятность того, что будет зарегистрирован рост  $W$  при условии, что реальная пропускная способность была неизменной. Такое возможно за счет флуктуации измерений, проанализированной выше. В случае регистрации роста  $W$  можно утверждать, что значения в последнем связанном интервале отличаются от значений в первом связанном интервале не менее чем на полусумму доверительных интервалов. При этом все отклонения происходят в одну сторону. Далее, для простоты анализа предположим равенство всех доверительных интервалов. Если предположить  $W = \text{const}$ , то наименьшее отклонение от измерений на этих связанных отрезках дает среднее значение пропускной способности по этим интервалам. Отклонение от него по всем точкам превышает половину доверительного интервала, и на каждом связанном интервале все отклонения происходят в одну сторону. Если в этих связанных отрезках соответственно  $s_1$  и  $s_2$  точек и вероятность выхода за доверительный интервал в одной точке равна  $2\beta$ , то получение такой диаграммы возможно с вероятностью не выше

$$P(s_1, s_2) < \beta^s, \quad s = s_1 + s_2. \quad (7.11)$$

Для принятой модели  $2\beta = 1 - 0.7 = 0.3$ . Таким образом, вероятность случайной регистрации роста при его реальном отсутствии оценивается сверху:

$$P(s_1, s_2) < (0.15)^s, \quad s = s_1 + s_2 \geq 2.$$

Поэтому можно утверждать, что вероятность неслучайного характера зарегистрированной тенденции не ниже

$$1 - P(1, 1) < 1 - (0.15)^2 = 0.9775. \quad (7.12)$$

Реально эта вероятность выше, поскольку имеется еще дополнительное контрольное требование монотонности промежуточных связанных отрезков, и для большинства диаграмм  $s > 2$ .

Предположение о равенстве доверительных интервалов для всех точек диаграммы не меняет верхнюю оценку вероятности ошибочного определения тенденции для случая нормального распределения погрешности. Это следует из такого рассмотрения. Пусть реальные доверительные интервалы по двум позициям из первого и последнего связанных отрезков имеют вид  $\pm(D+h)$  и  $\pm(D-h)$ , где  $0 < h < D$ . Замена их на усредненный интервал соответствует двум равным доверительным интервалам  $\pm D$ . Вероятность выхода за усредненный интервал для этих двух позиций диаграммы в силу независимости флуктуаций равна произведению вероятностей для каждой позиции. Поскольку доверительный интервал равен стандартному отклонению, то  $\sigma_1 = D+h$ ,  $\sigma_2 = D-h$ . Если предположить, что реальное значение пропускной способности постоянное и равно  $D$ , то в единицах стандартного отклонения значение  $D$  для первой точки равно  $b_1 = D/(D+h)$ , а для второй точки —  $b_2 = D/(D-h)$ . Пусть  $\Phi(x)$  — функция стандартного нормального распределения, а  $N(x)$  — плотность этого распределения. Вероятность выхода за интервал, соответствующий заданному значению параметра  $b$ , в фиксированную сторону (например, в сторону больших значений) равна  $P(b) = (1 - \Phi(b))$ . Вероятность двух выходов в независимых испытаниях так распределенной величины с параметрами  $b_1, b_2$ , равна

$$P(b_1)P(b_2) = (1 - \Phi(b_1))(1 - \Phi(b_2)) = Q(h). \quad (7.13)$$

Найдем экстремум этой функции:

$$\frac{d}{dh}Q(h) = \frac{d}{dh} \left\{ \left( 1 - \Phi\left(\frac{D}{D+h}\right) \right) \left( 1 - \Phi\left(\frac{D}{D-h}\right) \right) \right\} = 0.$$

С учетом  $\Phi'(b) = N(b)$  можно записать

$$N\left(\frac{D}{D+h}\right) \frac{D}{(D+h)^2} \left( 1 - \Phi\left(\frac{D}{D-h}\right) \right) - N\left(\frac{D}{D-h}\right) \frac{D}{(D-h)^2} \left( 1 - \Phi\left(\frac{D}{D+h}\right) \right) = 0. \quad (7.14)$$

Эта производная обращается в 0 в точке  $h=0$  и на бесконечности. Нулевой точке соответствует максимум  $Q(h)$ , поскольку на бесконечности эта функция обнуляется. Таким образом, оценка вероятности флуктуации, полученная для случая  $h=0$ , выше вероятности для любого другого значения  $h$ .

Заметим, что установленный факт верен не только для нормального распределения флуктуаций, но (при малых отклонениях от стандартного отклонения) и для произвольного распределения, имеющего плотность, с нормированной дисперсией. Рассмотрим линейное приближение произвольной функции распределения  $\Phi(x)$  с нормированной дисперсией в точке  $b=1$ :

$$\Phi(1+x) \approx \Phi(1) + \alpha x. \quad (7.15)$$

Вероятность выхода за значение  $x$  равно  $1 - \Phi(x)$ . Обозначим  $\varphi = 1 - \Phi(1)$ . Тогда

$$(1 - \Phi(b_1))(1 - \Phi(b_2)) = \varphi^2 - \alpha\varphi(b_1 + b_2 - 2) + \alpha^2(b_1 - 1)(b_2 - 1), \\ b_1 + b_2 > 2, \quad (1 - b_1)(1 - b_2) < 0.$$

Поэтому

$$(1 - \Phi(b_1))(1 - \Phi(b_2)) < (1 - \Phi(1))^2. \quad (7.16)$$

Это означает, что вероятность случайной регистрации тенденции, рассчитанная для гипотезы равных дисперсий, выше той же вероятности для реальных неравных дисперсий. Полученная выше оценка достоверности сохраняет силу.

**7.3. Дополнительные операции, которые возникают при решении задач испытываемым по чисто техническим причинам.** К ним относятся, во-первых, моторная реакция, которую

должен реализовать человек, получив мысленный ответ задачи, для выдачи ответа. Во-вторых, реализуется моторика глаза при считывании исходных данных. В-третьих, для задачи вычисления траектории возникают операции перевода зрения на новую позицию в текущем столбце при выходе траектории на границу столбца. Безусловно, эти дополнительные операции занимают некоторое время, дополнительное к времени выполнения операций сравнения чисел, на которых основана математическая суть задачи.

**7.3.1.** Операция выдачи ответа одна и та же во всех задачах и увеличивает время решения на некоторую константу. Поэтому она не может повлиять на тенденцию изменения среднего времени решения задач. Однако на тенденцию пропускной способности она повлиять может, поскольку пропускная способность меняется как обратная к времени решения величина. Проведем анализ этой операции. Это завершающая стадия решения задачи. Она состоит из распознавания числа, которое является ответом, и реализации нажатия кнопки. Такая операция хорошо исследована в инженерной психологии [Котик, 1978; Крылов, 1991; Суходольский, 1964]. Характерное время реакции человека с распознаванием зрительного образа, при условии отсутствия предпочтительной вероятности ожидаемого значения, около 300 мс. При наличии сильно предпочтительной вероятности реакция снижается до 10 мс. При наличии ритма появления изображений и предпочтительной вероятности некоторого изображения реакция на ожидаемый образ может снижаться до 1 мс. Поэтому очень важно в тесте, предполагающем быстрое решение некоторой логической задачи, обеспечить равномерное статистическое распределение ответов по множеству возможных ответов в серии задач. Иначе испытуемый, стремясь ускорить решение и заметив предпочтительные ответы, может попытаться угадать ответ, не решая задачи. В нашем случае можно с уверенностью утверждать, что имел место первый случай распознавания, и поэтому время этапа выдачи ответа около 0.3 с. Оценим влияние этой задержки на пропускную способность, оцененную по формуле (2.1). Оценка разброса значений (2.7) в данном случае не существенна:

$$T = \frac{QAg}{W}. \quad (7.17)$$

Обозначим  $W_0$  уточненное значение пропускной способности  $W$  для логической операции решения задачи с учетом нелогической задержки  $\tau$  на последнем этапе:

$$W_0 = \frac{QAg}{T - \tau}, \quad (7.18)$$

$$W = W_0(1 - \delta), \quad (7.19)$$

$$\delta = \frac{\tau W}{QAg}. \quad (7.20)$$

Влияние задержки  $\tau$  особенно сильно сказывается при малых временах решения задачи, что соответствует малой сложности задачи. Можно было бы ожидать, что это объясняет снижение оценки пропускной способности при малых сложностях задач. Однако подстановка реальных чисел в формулы (7.19) и (7.20) показывает, что влияние завершающего этапа решения задачи слишком мало, чтобы объяснить наблюдаемое явление. Более того, ни на одной из экспериментальных диаграмм не меняется регистрируемая тенденция. Рассмотрим характерные значения для сложности  $n = 4$  в задаче блуждания и  $n = 2$  в задаче максимума:

$$g = 0.9, W = 8 \text{ (бит/с)}, A = n = 4, Q = 9.5, \delta = 0.07, \\ g = 0.9, W = 5 \text{ (бит/с)}, A = n = 2, Q = 7.5, \delta = 0.011.$$

Заметим, что для устранения эффекта спада пропускной способности при минимальной сложности требуется  $\tau \sim 10$  с, что заведомо невозможно для операции выдачи ответа. Наиболее вероятной представляется гипотеза снижения быстродействия логического центра мозга при низкой сложности задачи.

**7.3.2.** Операция моторики считывания информации занимает одинаковое время для всех задач одной сложности. При этом надо отметить, что на это время влияет форма подачи информации. Возможно, эта форма влияет и на готовность человека применить параллельный способ решения задачи. Для установления этого факта нужно провести специальные эксперименты с задачей поиска максимума, где будут использованы разные пространственные группировки чисел в разных сериях. Однако при фиксированной форме подачи материала время считывания данных пропорционально числу последовательно выполненных операций, независимо от того, одиночные они или параллельные. Это означает, что время чтения информации и время ее переработки операциями сравнения пропорциональны при любом способе решения задачи. Заметим, что это свойство связано со спецификой задач поиска максимума и вычисления траектории. Оно не может быть распространено на другие задачи, где могут появиться внутренние вычисляемые переменные.

**7.3.3.** Операции перевода зрения по столбцу возникают в задачах вычисления траектории, когда текущая точка траектории выходит на границу очередного столбца. Фактически это увеличивает сложность задачи по отношению к общему числу сравнений. При этом снижается пропускная способность по операциям сравнения. Теоретически общее число выходов на границу таблицы в серии задач одной сложности пропорционально длине траектории, т. е. сложности. Доля выходов на границу в серии задач регистрировалась программой в ходе эксперимента. Она оказалась практически постоянной, не зависящей от сложности. Это означает, что на среднее время и на оценку пропускной способности эти выходы влияют как коэффициент. На тенденцию это повлиять не может.

Таким образом, все известные виды дополнительных операций, возникающие в предложенных тестах, не влияют на тенденцию изменения пропускной способности, хотя и изменяют абсолютное значение этой характеристики.

Предложенный метод оценки достоверности результата можно использовать в рабочем варианте использования системы тестирования. В дальнейшем возможно также введение этой или более точной оценки в стандартное математическое обеспечение теста.

## 8. Заключение

Разработаны тестовые задачи для регистрации пропускной способности мозга человека при последовательном способе решения логических или вычислительных задач. В сочетании с тестом, содержащим задачу, допускающую эффективное параллельное вычисление, этот тест дает возможность выявлять испытуемых, использующих параллельные вычисления при решении задач. Отличие от ранее реализованных тестов заключается в статистически равномерном распределении ответов в серии задач.

Все тестовые задачи реализованы в форме программ для персонального компьютера, что позволяет проводить эксперимент с большими группами испытуемых. Разработана система оценки достоверности полученных результатов.

Результаты тестирования показали, что примерно 27 % испытуемых прибегает к параллельным вычислениям при большой сложности задачи, если задача допускает эффективное распараллеливание. Кроме того, около 27 % испытуемых, не прибегавших к параллельным вычислениям, повышали скорость вычислений для задач высокой сложности. Около 18% испытуемых показали равномерную последовательную работу. Эти результаты близки к ранее поставленным опытам на других сериях задач. По принятым критериям регистрации роста пропускной способности способ работы некоторых испытуемых (около 27 %) не удалось однозначно идентифицировать. Достоверность результатов выше 97 % по каждому испытуемому с установленным способом работы.

## Список литературы

- Злобин А. И., Коганов А. В., Ракчеева Т. А.* Метод исследования пропускной способности человеческого мозга при обработке символической информации // XX Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование», Пушкино МО, 2013 // Тезисы докладов. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». С. 171. ISBN 978-5-93972-950-5.
- Злобин А. И., Коганов А. В., Ракчеева Т. А.* Исследование скорости переработки информации человеком в серии задач растущей сложности // IX Курдюмовские чтения: Международная междисциплинарная научная конференция «Синергетика в общественных и естественных науках», труды, 17–21 апреля 2013 г. // Тверь: Тверской государственный университет. С. 57–60. ISBN 978-5-7609-0822-3.
- Коганов А. В., Пятецкий-Шапиро И. И., Фейгенберг И. М.* Зависимость скорости решения от сложности и способа кодирования исходных данных / Вопросы экспериментального исследования скорости реагирования. — Тарту, 1971.
- Коганов А. В.* Коллективы автоматов в детерминированных и случайных средах и приложение к психологическим тестам. Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н., — М., 1972.
- Коганов А. В.* Исследование возможности параллельного выполнения логических операций человеком // Параллельные вычисления и задачи управления. Труды Международной конференции РАСО-2001, Москва, 2–4 октября 2001 г., на компакт-диске. М.: ИПУ РАН, 2001.
- Коганов А. В.* Растущие индукторные пространства и анализ параллельных алгоритмов // Программные продукты и системы, приложение к международному журналу «Проблемы теории и практики управления». 2010. — № 2. — С. 33–38. ISSN 0236-235X.
- Коганов А. В., Злобин А. И., Ракчеева Т. А.* Исследование возможности параллельной переработки информации человеком в серии задач высокой сложности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 5. — Институт компьютерных исследований (УГУ), Институт машиноведения РАН им. А. А. Благодина. — С. 845–861. ISSN 2076-7633.
- Котик М. Л.* Курс инженерной психологии. — Таллин: Валгус, 1978.
- Крылов А. А.* Организация целостной деятельности функциональных механизмов обработки информации. Хрестоматия по инженерной психологии. — М.: Высшая школа, 1991.
- Суходольский Г. В.* К вопросу о формировании у человека-оператора навыка слежения за движущейся целью // Проблемы общей и инженерной психологии. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. — С. 80–89.
- Brown, Lawrence D., Cai, T. Tony Das Gupta, Anirban* (2001) Interval Estimation for a Binomial Proportion // Statistical Science 16(2): 101–133. doi: 10.1214/ss/1009213286. MR 1861069. Zbl 02068924.