

УДК 517.972; 519.6; 539.3

Сплошные среды из тонких пластин

В. А. Грачев, Ю. С. Найштут^а

Самарский государственный архитектурно-строительный университет
Россия, 443001, г. Самара, Молодогвардейская ул., д. 194

E-mail: ^аneustadt99@mail.ru

Получено 25 августа 2014 г.,
после доработки 15 сентября 2014 г.

Представлена фрактальная система из тонких шарнирно соединенных пластинок, которая может быть изучена методами механики сплошной среды с внутренними степенями свободы. Конструкция является трансформирующейся: в начальном положении это практически одномерное многообразие малого диаметра, после развертки система занимает значительный объем. Геометрия сплошной среды исследуется методом подвижного репера. На основе уравнений структуры Картана выводятся соотношения, позволяющие определить геометрию введенных многообразий. В доказательствах существенно используется тот факт, что составляющие фрактал пластинки являются тонкими, а их длина мала по сравнению с габаритами системы. Изучается механика введенных сплошных сред, если шарниры между пластинками являются идеальными жесткопластическими и выполнены из материалов с памятью формы. Опираясь на теоремы о предельных нагрузках, вычисляются внутреннее давление, необходимое для развертывания пакета в объемную конструкцию, а также затраты тепла для возврата системы в первоначальное состояние.

Ключевые слова: фрактальная система, тонкие пластинки, сплошная среда, репер Картана, предельная нагрузка, жесткопластическое тело, память формы

Solids composed of thin plates

V. A. Grachev, Yu. S. Nayshtut

Samara State Architectural and Building University, 194 Molodogvardeyskaya Str., Samara, 443096, Russia

Abstract. — The paper demonstrates a fractal system of thin plates connected with hinges. The system can be studied using the methods of mechanics of solids with internal degrees of freedom. The structure is deployable — initially it is close to a small diameter one-dimensional manifold that occupies significant volume after deployment. The geometry of solids is studied using the method of the moving hedron. The relations enabling to define the geometry of the introduced manifolds are derived based on the Cartan structure equations. The proof substantially makes use of the fact that the fractal consists of thin plates that are not long compared to the sizes of the system. The mechanics is described for the solids with rigid plastic hinges between the plates, when the hinges are made of shape memory material. Based on the ultimate load theorems, estimates are performed to specify internal pressure that is required to deploy the package into a three-dimensional structure, and heat input needed to return the system into its initial state.

Keywords: fractal system, thin plates, continuum solid, Cartan moving hedron, ultimate load, rigid plastic solid, shape memory

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 5, pp. 655–670 (Russian).

В связи с появлением в последние годы новых высокопрочных материалов возобновился интерес к трансформирующимся предварительно напряженным системам (*rapidly deploy-able systems*) [Gantes, 2001; You, Z., Chen, Y., 2011]. Ранее подобные конструктивные решения использовались преимущественно в архитектурно-строительных сооружениях. Яркими примерами служат Эйфелева башня, стержневые гиперboloиды Шухова, своды Фуллера, сферы Хобермана, висячие мосты, многочисленные легкие покрытия и перекрытия [Шухов, 1977; Margolius, 2004; Lynn, 2004].

Геометрически башни Эйфеля и Шухова — это трехмерные тела, составленные (представляющие объединение) из стержней, то есть из трехмерных многообразий, у которых два размера (ширина и толщина) много меньше третьего (длины). Пересечения стержней (общие точки) образуют узлы системы. Если в процессе движения системы перемещения точек в узлах непрерывны, то узел называют жестким, если непрерывность нарушается, то говорят о шарнирном узле. Кинематика стержневой системы может быть изучена, на основе одномерной модели. Трехмерный стержень заменяется линией, образующейся из объемного тела при стремлении к нулю толщины и ширины. Узлы в новой модели — это точки пересечения линий. Следовательно, башни Эйфеля и Шухова — это одномерные конструкции с большим количеством жестких узлов, незначительно изменяющие свою форму под нагрузкой. Математически движение линий-стержней описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с набором алгебраических ограничений, характеризующих соединения стержней в узлах. Подобная система не допускает в процессе эксплуатации смещений узлов без приложения внешних сил, она может существенно менять свою форму только в период монтажа, когда некоторые из узлов остаются шарнирными. Близки конструктивно к высотным башням своды и купола Фуллера, которые образованы путем разбивки тел правильной формы (сфера, икосаэдр, додекаэдр). В процессе возведения системы Фуллера имеют множество шарниров, превращаясь в подвижные механизмы с большим числом степеней свободы. Поэтому их сборка сопряжена с применением дополнительных устройств (в частности, пневматических), которые фиксируют проектное положение системы на период эксплуатации. Использовать конструкции Фуллера в качестве машин, постоянно совершающих полезную работу, затруднительно. Аналогичные проблемы сопровождают разработки Хобермана, которые могут, подобно машинам, периодически перемещать свои узлы. Геометрия расположения узлов и стержней у Хобермана базируется (как и у Фуллера) на телах правильной формы. Поэтому основная сфера их применения — либо строительные конструкции, являющиеся механизмами только во время возведения, либо машины с небольшим количеством степеней свободы, обеспечивающих ограниченное число возможных движений.

Стержневые конструкции в последние годы находят новые приложения не только в архитектуре, но и при проектировании космических аппаратов [Pellegrino, 2001; Tzonis, 2007].

По-видимому, сфера использования новых трансформирующихся (кинетических) строительных конструктивных решений из стержней (с применением появившихся высокопрочных материалов) — это уникальные объекты архитектуры и космоса, для которых задачи проектирования и возведения в основном разработаны достаточно подробно.

Следует иметь в виду, что прочностные характеристики современных материалов в десятки раз превосходят прочность сталей, из которых изготовлены сооружения Эйфеля, Шухова, Хобермана. Новые материалы порождают новые конструктивно-технологические решения. Одна из инженерных задач в этой области может быть сформулирована следующим образом: из близких по форме деталей образовать каркас (фрактал) для связанного с ним трехмерного многообразия. Под действием внутренних сил многообразию должно изменять свою форму предписанным образом (многократно выполнять определенную работу) и допускать несложное управление.

Другими словами, задача в том, чтобы сконструировать легко управляемую трехмерную (полевую) машину из большого количества сравнительно простых однообразных плоских деталей, движение которой может быть изучено средствами континуальной механики.

Или по п. 46 книги Э. Шрёдингера «Что такое жизнь?» [Шрёдингер, 2009] — создать апериодическое (несложно управляемое) деформируемое тело, изменяющее свою форму предписанным образом.

Что-то похожее на эту машину представляют стенты (рис. 1).

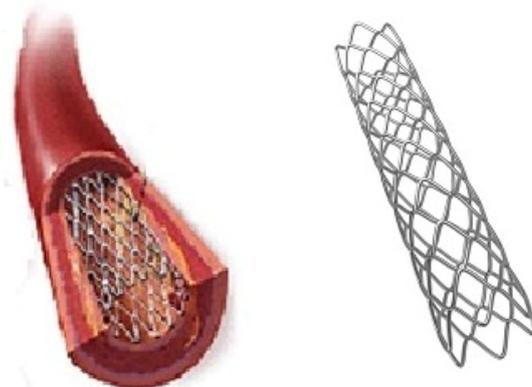


Рис. 1. Стент в кровеносном сосуде (слева) и его конструкция (справа)

Набор тонких стержней, расположенных на поверхности цилиндра, внедряется в кровеносные сосуды. Шарниров в этой системе очень много, она сама по себе слишком подвижна. Чтобы производить нужную работу (расширять сосуд определенным образом), ее необходимо прикрепить к здоровой стенке. Возникает вопрос, как изменить конструкцию стента, чтобы приблизиться к поставленной выше инженерной задаче, то есть расширить сосуд без постоянного соединения стента и стенки сосуда. Рисунки стентов подсказывают поиск простейших механизмов, позволяющих подойти к решению поставленной задачи. Можно считать, что стент — это не только набор стержней, но и совокупность шарнирно сочлененных мягких многозвенников. В мягком многозвеннике все стержни абсолютно гибкие, поэтому стент может изменять свою форму произвольным образом. Кроме того, рисунки стентов позволяют рассматривать их конструкцию (ансамбль) как собранную из шестизвенников.

Зададимся вопросом: можно ли создать подвижный шестизвенник из цилиндрических шарниров и абсолютно жестких плоских деталей произвольных размеров? Ответ на вопрос: нельзя. Если же шестизвенник из жестких звеньев обладает определенным типом симметрии, то известны замечательные подвижные шестизвенники Брикара и Шаца, которые допускают сложные движения [Phillips, 2006].

На основе шестизвенников Брикара в работе [Грачев, Найштут 1999] предлагалась конструкция многозвенника с дополнительными шарнирами, показанная на рисунке 2а, служащая основой для решения поставленной инженерной задачи.

Механизм собирается из тонких пластинок, соединенных цилиндрическими шарнирами. Центр тяжести многогранника обозначен как O . Многозвенник симметричен относительно плоскости \vec{e}_1, \vec{e}_3 , проходящей через шарниры, расположенные на пересечении пластинок типов 2, 6, 9. Пластины типа 3 имеют по четыре шарнира, остальные снабжены двумя цилиндрическими шарнирами. Если $\psi_1 = 0$ (начальное положение), то многогранник становится плоской фигурой, показанной на рисунке 2а справа. Одинаковые пластины в таком положении совпадают.

Объединим многогранники в единую систему (пакет) по рисунку 2b, расположив их центры тяжести в узлах прямоугольной сетки с шагом m в направлении x и с шагом n в направлении y . Укладку многозвенников ведем «диагональным» методом, последовательно располагая их центры тяжести в узлах прямоугольной сетки. Совпадающие пластины различных многогранников склеиваются, образуя «плоский слой». Склеив несколько слоев по соприкасающимся поверхностям, получим пакет, который после приложения сил к пластинкам типа 3 разворачивается в трехмерный объем. В работе [Грачев, Найштут, 1999] показано, что описанный механизм

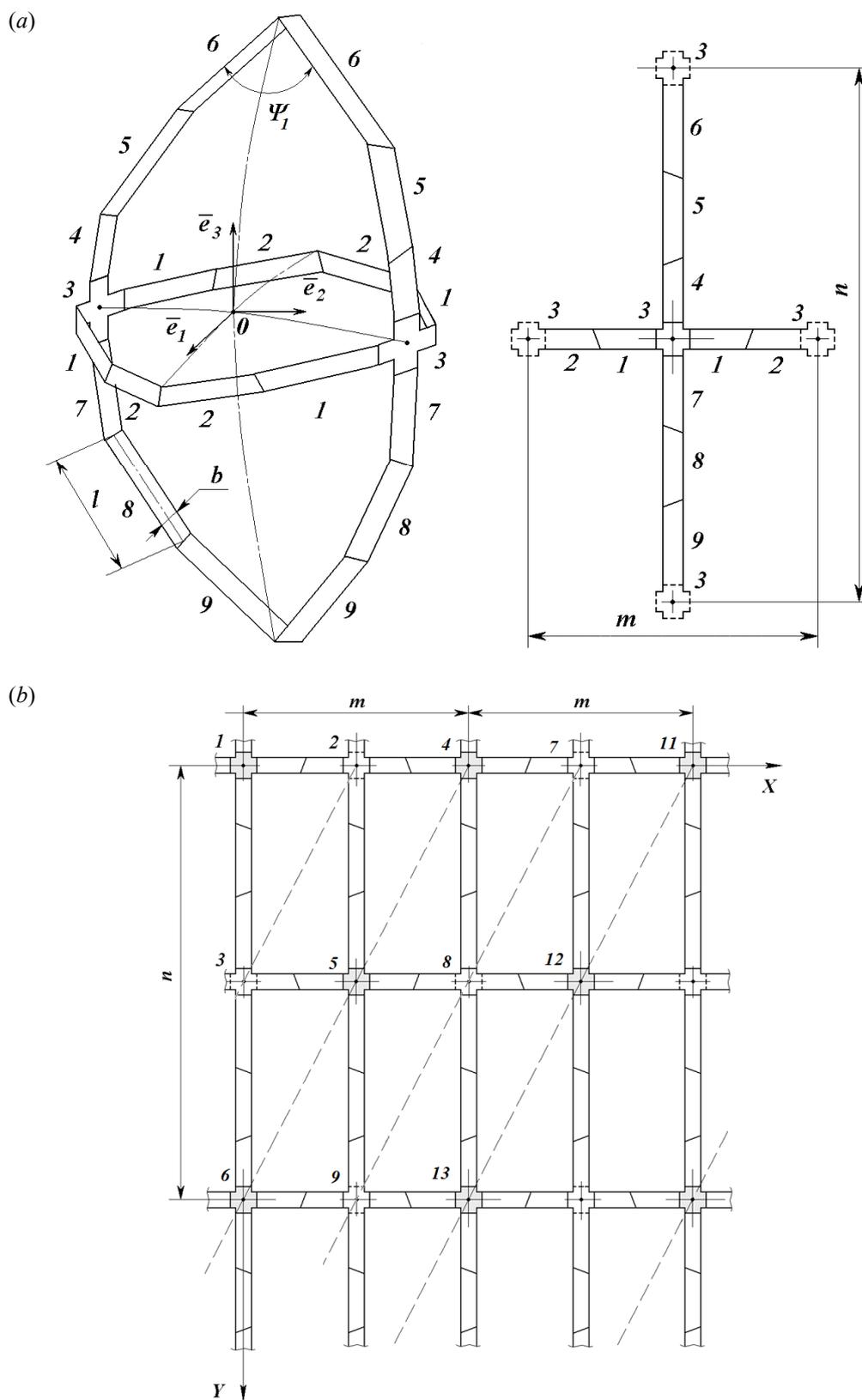


Рис. 2. (a) Симметричный многозвенник; (b) схема сборки пакета

может занимать после развертки практически любой объем, если количество пластинок в каждом многозвеннике не менее 22, а число многозвенников в наборе велико. Пластинки могут быть жесткими, но длинными и тонкими $l/b > 5$, $b/\delta > 10$. Здесь l — длина, b — ширина, а δ — толщина пластинки.

Однако описанная конструкция обладает недостатком, который трудно устранить. Несмотря на то что в ходе развертки система может ограничивать значительный объем и обладает высокой несущей способностью (если пластинки изготовлены из прочного материала), процесс ее сборки и трансформации неустойчив из-за большого количества степеней свободы отдельного многогранника. Количество степеней свободы многозвенника возрастает, если его конструкция содержит различные типы симметрии. Так, симметричный многозвенник на рисунке 2 имеет не 12, а 14 степеней свободы. Возникает задача уменьшить количество пластинок в многозвеннике, сохранив возможность объемного деформирования.

В настоящей работе эта задача решается путем замены 22-звенника на симметричный 12-звенник, в котором собраны длинные тонкие пластинки, имеющие незначительную жесткость на кручение. Углы закручивания являются дополнительными степенями свободы, обеспечивающими развертку системы не только по рисунку 2, но и более сложного типа.

Симметричный двенадцатизвенник из тонких пластин и связанная с ним метрика

Рассмотрим систему пластинок, показанную на рисунке 3. Она состоит из двух симметричных шестизвенников, пластинки которых (1, 2, 3 и 4, 5, 6) соединены цилиндрическими шарнирами.

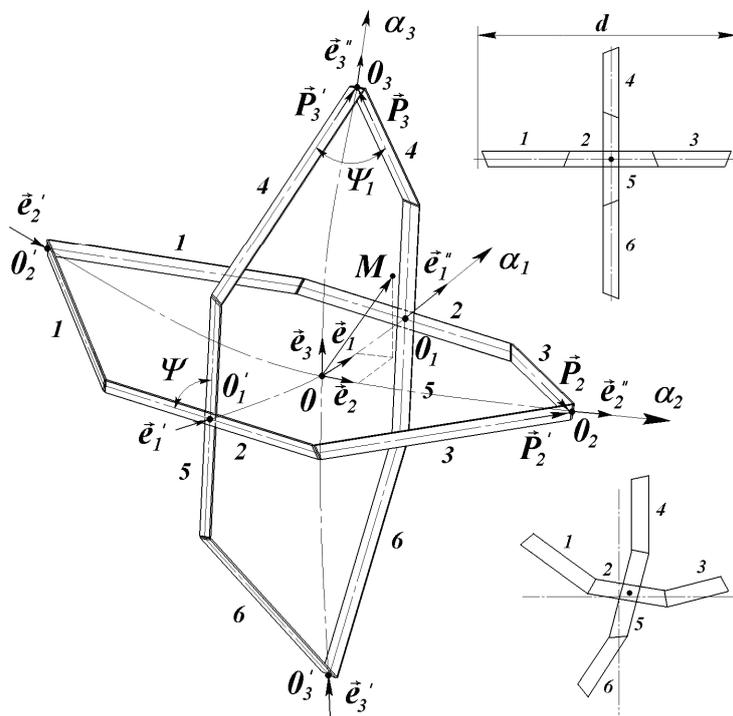


Рис. 3. Основные геометрические параметры двенадцатизвенника

На рисунке 3 показаны только срединные поверхности пластинок. На линии центров тяжести пластинок 2 и 5 находятся цилиндрические шарниры, которые позволяют поворачиваться одному шестизвеннику относительно другого на угол ψ . Смещение центров тяжести пластинок 2

и 5 относительно друг друга невозможно. В правой части рисунка показаны в уменьшенном масштабе виды многозвенника по стрелке \vec{e}'_1 , когда $\psi_1 = 0$ и если $\psi_1 \neq 0$.

Вообще говоря, шестизвенник с произвольно расположенными цилиндрическими шарнирами геометрически неизменяем. Но в работе [Грачев, Найштут, 2012] установлено, что каждый свободно располагаемый в пространстве симметричный шестизвенник имеет семь степеней свободы. Следовательно, конструкция на рисунке 3 имеет в свободном пространстве восемь степеней свободы, а исключая из движения жесткое перемещение твердого тела — две степени свободы (ψ_1, ψ). Центр тяжести двенадцатизвенника обозначим буквой O , точку пересечения средних линий трапеций 2 и 5 назовем O_1 . Пусть средние линии симметричных трапеций 3 пересекаются в точке O_2 , а трапеции 4 в точке O_3 . Вектор нормали к пластинке 2 в точке O_1 назовем \vec{e}_1 , векторы, направленные вдоль средних линий пластин 3, обозначим \vec{p}_2 , \vec{p}_2^\perp , а вдоль пластин 4 назовем \vec{p}_3 , \vec{p}_3^\perp . В точках O_2 и O_3 определим единичные векторы:

$$\vec{e}_2^\parallel = \frac{\vec{p}_2 + \vec{p}_2^\perp}{|\vec{p}_2 + \vec{p}_2^\perp|}, \quad \vec{e}_3^\parallel = \frac{\vec{p}_3 + \vec{p}_3^\perp}{|\vec{p}_3 + \vec{p}_3^\perp|}, \quad (1)$$

а также \vec{e}_1^\parallel — нормаль к пластине 2 в точке O_1 . Прделавав аналогичные построения для симметричной части двенадцатизвенника, определим точки $O_1^\perp, O_2^\perp, O_3^\perp$ и векторы $\vec{e}_1^\perp, \vec{e}_2^\perp, \vec{e}_3^\perp$.

Проведем через точки $O_1 O O_1^\perp$ линию кратчайшей длины α_1 так, чтобы она была касательной к векторам \vec{e}_1 , \vec{e}_1^\perp . Аналогичным образом построим линии α_2, α_3 . Примем эти линии за координатные. Пусть параметр α_1 изменяется при переходе от точки O_1 к точке O_1^\perp на величину A . То же самое происходит с параметром α_2 при переходе от точки O_2 к точке O_2^\perp и с параметром α_3 при переходе от точки O_3 к точке O_3^\perp . Здесь A — характерный размер ячейки, за который можно принять размер d по рисунку 3.

В последующем изложении будут изучаться большие наборы двенадцатизвенников, собранные по типу рисунка 2, когда размеры m и n малы по сравнению с габаритами всей конструкции.

Основная математическая задача, которая возникает, состоит в описании движения узлов многозвенников под действием внешней нагрузки.

Поскольку размеры m и n значительно больше толщины пластинок, перемещения граней удобно описывать как совместное непрерывное движение многозвенников, погруженных в окружающее трехмерное пространство. Операция непрерывного погружения двумерного многообразия в трехмерное (гомогенизация) часто применяется в физике деформируемых (твердых) сред. Она используется в настоящей работе. Вначале производится погружение двумерных многогранников в метрическое пространство, а затем в гладкое трехмерное многообразие. Погружение осуществляется путем линейной аппроксимации перемещений узлов на внутренние точки связанного с многозвенником многообразия. Аналогами многозвенников в физике являются не найденные экспериментально «колесики и веревочки» Максвелла (светоносный эфир), позволившие создать теорию электромагнитных полей, на основе механических моделях. В настоящей работе, наоборот, реальная механическая модель позволяет «сконструировать» трехмерное математическое поле, с помощью которого упрощается анализ исходной двумерной задачи.

Расстояния $O_1 O_1^\perp$ можно отождествить с дифференциалом дуги, определив в точке O три координатных вектора:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1^\perp + \vec{e}_1^\parallel}{|\vec{e}_1^\perp + \vec{e}_1^\parallel|}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2^\perp + \vec{e}_2^\parallel}{|\vec{e}_2^\perp + \vec{e}_2^\parallel|}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{e}_3^\perp + \vec{e}_3^\parallel}{|\vec{e}_3^\perp + \vec{e}_3^\parallel|}. \quad (2)$$

Расстояния между точками $O_1O_1^l, O_2O_2^l, O_3O_3^l$, найденные по правилам евклидовой геометрии, обозначим соответственно как s_1, s_2, s_3 .

Произведем «гомогенизацию» внутреннего пространства двенадцатизвенника малых размеров, дополнив поверхности пластин S_p точками трехмерной среды D так, чтобы в подвижной системе отсчета (связанной с реперами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) перемещения в D были непрерывны.

Например, для точки M , характеризуемой вектором $d\vec{r}$, имеем

$$d\vec{r} = \vec{e}_1\omega_1(\psi, \psi_1, d\alpha_1) + \vec{e}_2\omega_2(\psi, \psi_1, d\alpha_2) + \vec{e}_3\omega_3(\psi, \psi_1, d\alpha_3). \quad (3)$$

Справедливы равенства

$$\begin{aligned} \omega_1(\psi, \psi_1, d\alpha_1) &= s_1 d\alpha_1/A, \quad \omega_2(\psi, \psi_1, d\alpha_2) = s_2 d\alpha_2/A, \\ \omega_3(\psi, \psi_1, d\alpha_3) &= s_3 d\alpha_3/A. \end{aligned} \quad (4)$$

Говоря иначе, при сведении дискретной модели к континуальной на линиях α_i вводятся точки, лагранжевы координаты которых изменяются непрерывно при переходе от O_i к O_i^l ($i=1,2,3$).

В равенствах (3), (4) функции $\omega_i(\psi, \psi_1, d\alpha_i)$ — внешние дифференциальные формы, линейные относительно $d\alpha_i$. Формулы (3) и (4) определяют векторное положение точек сплошной среды, совместимое с лагранжевыми координатами α_i и евклидовой метрикой трехмерного пространства D . Введенная метрика зависит от конфигураций пластин, геометрии двенадцатизвенника малых размеров и двух переменных углов ψ, ψ_1 . Наличие двух переменных углов позволяет создать «непрерывную» карту M из тринадцати двенадцатизвенников, «склеив» одинаковые грани. На рисунке 4 показана проекция этой карты на оси α_1, α_2 .

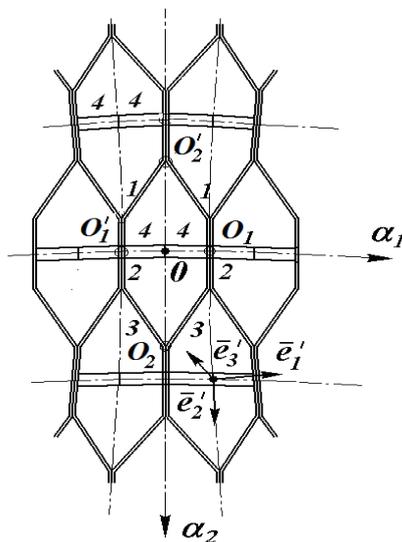


Рис. 4. Карта соединения двенадцатизвенников

Так получается погружение сети многозвенников в гладкое многообразие.

Для того чтобы обеспечить непрерывность карты по граням 1, 2, 3, окружающие центральный многозвенник двенадцатигранники должны «затратить» шесть степеней свободы.

Столько же степеней свободы потребуется, чтобы (при склеенных гранях 4 и 6) добиться симметричного расположения граней типа 5 по отношению к граням типа 2. Склеенная карта, «израсходовав» все степени свободы, не является непрерывной: грани 2 и 5 не могут образовать

вать одну плоскость в дискретной модели. Но если размер A мал, а пластинки тонкие, то в рамках континуальной модели последняя задача оказывается выполнимой без нарушения метрики, определяемой формулой (3).

Связность подвижных триедров карты M в континуальной модели

По аналогии с рисунком 3 построим для карты M (рис. 4) подвижные триедры в центрах тяжести каждого двенадцатизвенника. Естественно, появятся координатные линии $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и возможность по интерполяции построить триедры в точках $O_1^I, O_2^I, O_3^I, O_1, O_2, O_3$.

В дальнейшем будем считать пластины тонкими:

$$\delta / A \rightarrow 0. \quad (5)$$

Это допущение позволяет заменить объемные элементы пластинок двумерными срединными поверхностями. Если пластины являются абсолютно жесткими, то при изменении углов ψ, ψ_1 нормали \vec{n}_2, \vec{n}_5 к поверхностям 2 и 5 не совпадают. Условие (5) позволяет считать жесткость пластин на кручение малой по сравнению с жесткостью на растяжение или изгиб. Тонкие пластины в этих условиях могут закручиваться без силового воздействия.

Обозначим двугранные углы поворота в центрах тяжести пластин 1, 2, ...6 относительно «своих» средних линий, показанных на рисунке 3 пунктирными линиями, буквами φ_i ($i=1,2,\dots,6$). Соответствующие углам векторы $\vec{\varphi}_i$ направлены вдоль средних линий пластин и симметричны относительно плоскости O_3O_2O . Будем считать их дополнительными (к ψ, ψ_1) степенями свободы. Они обеспечивают симметричное относительно плоскости O_3O_2O движение континуального аналога многозвенника. Важно, что введение этих углов не меняет метрики континуальной модели (3), но позволяет записать соотношения связности:

$$d\vec{e}_i = \omega_{ij}(\psi, \psi_1, \varphi_i) \vec{e}_j, \quad (6)$$

$$\omega_{ij}(\psi, \psi_1, \varphi_i) = 2 \frac{\vec{e}_i(O_k) - \vec{e}_i(O_k^I)}{A} \vec{e}_k d\alpha_j.$$

Здесь $\vec{e}_i(O_j)$ — векторы, вычисленные для точек O_j, O_j^I в предположении, что геометрия карты M остается евклидовой для континуального аналога многозвенника.

Выражения $\omega_{ij}(\psi, \psi_1, \varphi_i)$ — внешние дифференциальные формы.

Пластинки 2 и 5 могут поворачиваться относительно друг друга. Другими словами, можно добиться ситуации, когда в точке расположения шарнира между пластинками 2 и 5 векторы и $\vec{n}_5(\psi, \psi_1, \vec{\varphi}_5)$ параллельны в процессе деформации многозвенника

$$\vec{n}_2(\psi, \psi_1, \vec{\varphi}_2) \parallel \vec{n}_5(\psi, \psi_1, \vec{\varphi}_5). \quad (7)$$

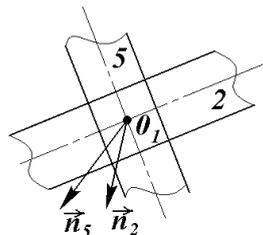


Рис. 5. Расположение нормалей при пересечении жестких пластинок 2 и 5

В формуле (7) выражения $\vec{n}_2(\psi, \psi_1, \vec{\varphi}_2)$ и $\vec{n}_5(\psi, \psi_1, \vec{\varphi}_5)$ обозначают повернутые относительно своих средних линий векторы \vec{n}_2 и \vec{n}_5 на углы φ_2 и φ_5 . Векторы \vec{n}_2 и \vec{n}_5 вычисляются в предположении, что пластинки многозвенника являются абсолютно жесткими.

Отметим также, что при вычислении по формуле (6) удобнее использовать не функции φ_i ($i=1, 3, 4, 6$), а повороты узлов O_2, O_3, O_2^1, O_3^1 на векторы $\vec{\varphi}_i^1$ относительно осей $(\vec{p}_2 - \vec{p}_2^1), (\vec{p}_3 - \vec{p}_3^1)$ (см. рис. 3).

Записанное в проекциях соотношение (7) равносильно двум алгебраическим уравнениям связи.

Наконец, примем во внимание тот факт, что вычисленные в свободной карте по рисунку 4 смещения точек континуальной модели и перемещения тех же точек при деформации сети (из множества карт) одинаковы с точностью до движения абсолютно жесткого тела.

Последнее означает, что дифференциальные формы ω_i, ω_{ij} должны удовлетворять уравнениям структуры [Картан, 1962]

$$d\omega^i = [\omega_k^i \cdot \omega^k], \quad d\omega_{ij} = [\omega_{ik} \cdot \omega_{kj}], \quad \omega_k^i = -\omega_{ik}. \quad (8)$$

В формулах (8) внешнее произведение дифференциальных форм выделяется квадратными скобками. По повторяющемуся индексу производится суммирование во всех последующих формулах, а буква d перед формой обозначает внешний дифференциал.

Формулы (8) можно записать в виде

$$d\omega_j^i - [\omega_j^k \omega_k^i] = \frac{1}{2} R_{jlm}^i [\omega^l \omega^m]. \quad (9)$$

Здесь R_{jkm}^i — тензор кривизны Римана–Кристоффеля [Фавар, 2010]. В трехмерном пространстве тензор кривизны имеет шесть независимых компонент, что позволяет ввести симметричный тензор Риччи, $R_{nl} = R_{nkl}^k$. Таким образом, шесть уравнений структуры (8) или равносильные ему равенства

$$R_{nl} = 0 \quad (10)$$

связывают параметры ψ, ψ_1, φ_i шестью дифференциальными зависимостями, обращающими в нуль тензор Риччи. Вместе с ограничениями (7) получается замкнутая система восьми уравнений, позволяющая описать движение континуальной модели связанных многозвенников.

Отметим также, что уравнения структуры (8) или (10) — это записанные в иной форме условия неразрывности деформаций, которые обеспечивают интегрируемость системы (3)–(6). Для системы (7), (8) можно ставить задачу Коши и определить функции ψ, ψ_1, φ_i внутри области $D: (a \leq \alpha_i \leq b)$, если известно в пространстве положение граничной поверхности S , определяемой соотношением $S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, где S — непрерывная функции координат. Восемь внутренних параметров обеспечивают, таким образом, при идеальных шарнирах и нулевой крутильной жесткости пластин предписанное изменение формы тела D , когда известно положение его границы (независимо от приложенных сил). В рамках механики сплошной среды, когда за «внутренние» переменные принимают перемещения тел-точек, такое поведение невозможно: если область D — евклидова, равенства (8), (10) выполняются тождественно и уравнения (3) имеет много решений. Для выделения действительных решений используются дополнительные уравнения равновесия и определяющие соотношения между напряжениями и деформациями. В рассматриваемом случае кинематика может изучаться отдельно от силового взаимодействия. Следовательно, область D представляет собой континуальную машину с одной «обобщенной» степенью свободы — граничной поверхностью S .

Трехмерные тела, собранные из двенадцатизвенников

Ранее на рисунке 2 был показан один из способов построения произвольного тела D из многозвенников. Техническая реализация этого построения может оказаться сложной.

На рисунке 6 показана другая возможность. Рассмотрим два набора полос из трапеций, ориентированных вдоль линий $0 \leq \alpha_1 \leq B$ и $0 \leq \alpha_2 \leq B$ на плоскости. Плоскую область $\alpha_1 \times \alpha_2$ назовем S' . Острые углы трапеций близки к прямым: то есть возможно сведение конечномерной модели к континуальной.

Полосы направления α_1 обозначены нечетными номерами, а направления α_2 — четными. Полосы нумеруются двумя цифрами: первая цифра — номер полосы, вторая — номер слоя.

Собираем пакет в такой последовательности: раскладываем один слой нечетных полос типа 1/1, 3/1, 5/1.... Затем слой четных полос типа 2/1, 4/1, 6/1..., соединив их в точках пересечения шарнирами \otimes . Далее размещаем второй слой нечетных полос 1/2 ..., слои четных полос 2/2... и соединяем их цилиндрическими шарнирами. Операцию можно повторить несколько раз, получив пакет требуемой толщины. Если после сборки каждой пары полос область S' накрыть прочной пленкой, прикрепив ее к шарнирам \otimes , то полученная конструкция может принимать форму произвольного трехмерного тела при нагнетании воздуха во внутреннее пространство. Таким образом, система полос в сочетании с плотными пленками представляет собой многоконтурную конструкцию, которая допускает эксплуатацию при аварии отдельных отсеков.

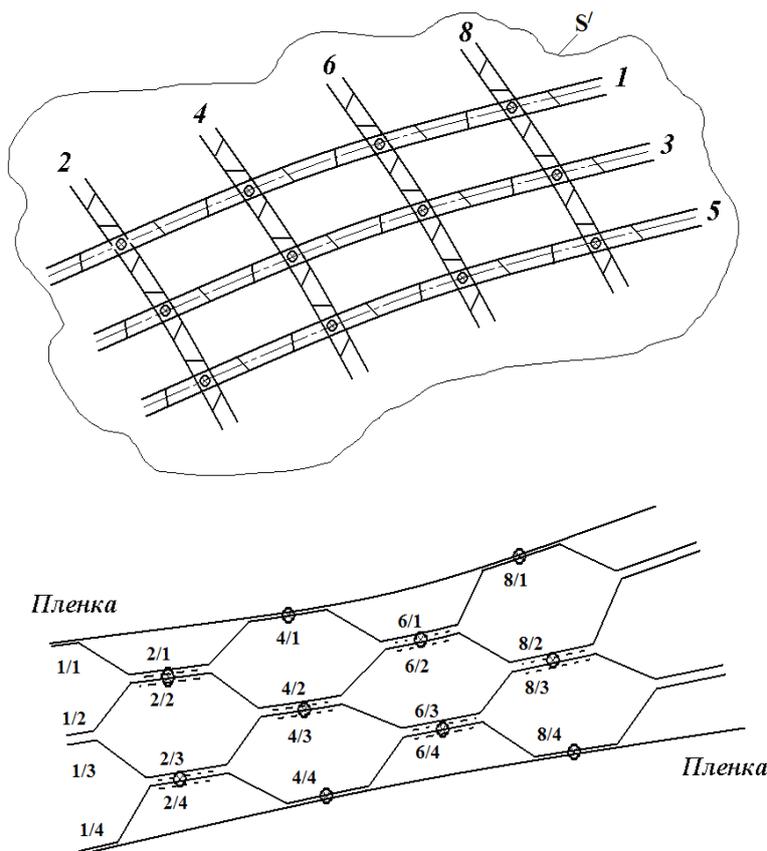


Рис. 6. Трехмерные тела из полос

Конструкция на рисунке 6 остается работоспособной, если убрать часть полос одного направления. В частности, можно оставить четные полосы с номерами, кратными 4.

Другая особенность сплошных сред из полос (или ячеек) показана на рисунке 7.

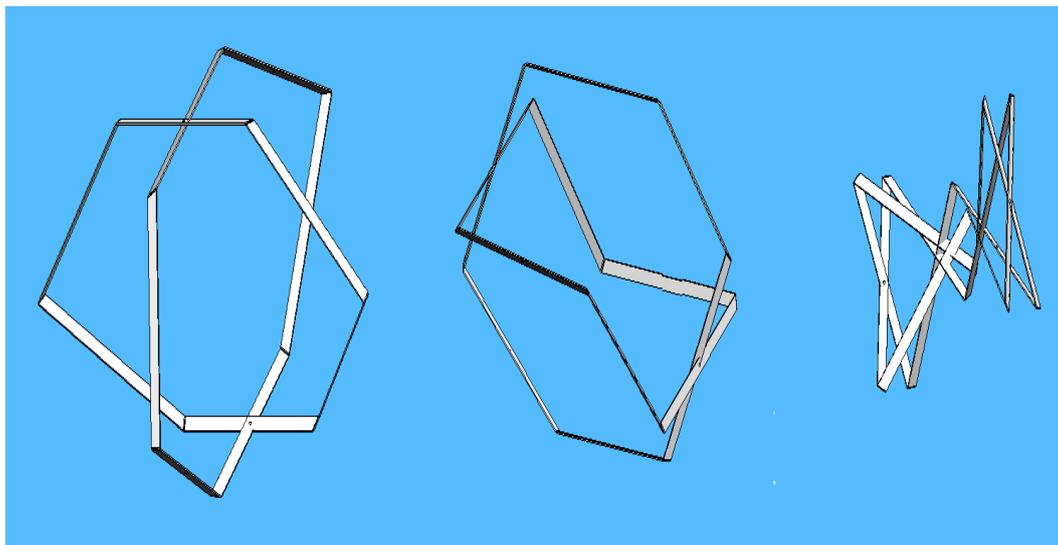


Рис. 7. Преобразование двенадцатизвенника в «одномерную» фигуру

Она состоит в том, что двенадцатизвенник может быть сложен в «одномерную» фигуру с диаметром порядка $2A$. На рисунке 7 эта возможность проиллюстрирована с помощью программы Solid Works, показывающей модель двенадцатизвенника из пластин одного размера при различных значениях угла ψ_1 . Более того, произвольный пакет «схлопывается» в малое тело тех же размеров, поскольку точки O_1 и O'_1 всех многозвенников оказываются на расстояниях порядка $2A$ друг от друга. Столь плотная упаковка набора тонких пластин позволяет проектировать прочные предварительно напряженные системы, которые подобно воздушному шару изменяют свой объем в широких пределах, но в развернутом виде обладают прочным и жестким каркасом. Близки к рассматриваемым в статье средам некоторые «конструкции» живой природы. В частности, субарахноидальное (паутинное) заполнение головного мозга в сочетании с ликвором позволяет разместить в черепной коробке высших позвоночных животных сложнейшую систему управления организмом.

Поведение сплошных сред из пластин под нагрузкой

Как отмечено ранее, трехмерное тело D с «каркасом» из пересекающихся лент на рисунке 6 (когда пластины соединяются идеальными шарнирами) занимает в пространстве форму, определяемую граничной поверхностью. Рассмотрим далее случай, когда шарниры не являются идеальными, а представляют собой жесткопластическое соединение с памятью формы (вариант — шарниры с кулоновым трением). На рисунке 8 представлен симметричный двенадцатизвенник. Каждый шестизвенник состоит из двух типов трапеций. В пластинках возникают моменты, которые соответствуют жесткопластическому изгибу. На рисунке изображены моменты только в концевых сечениях характерных длинных пластинок.

В качестве внутренних переменных примем двугранные углы ψ_i , обобщенными силами являются моменты в шарнирах M_i . Определим «гомогенизированные» внутренние обобщенные силы формулами

$$m_i = M_i / A^3.$$

Так как симметричный двенадцатизвенник имеет в свободном пространстве восемь степеней свободы, то углы $\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ не являются независимыми, а существуют три гео-

метрических уравнения связи

$$\Psi_i(\psi, \psi_1 \dots \psi_4) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (11)$$

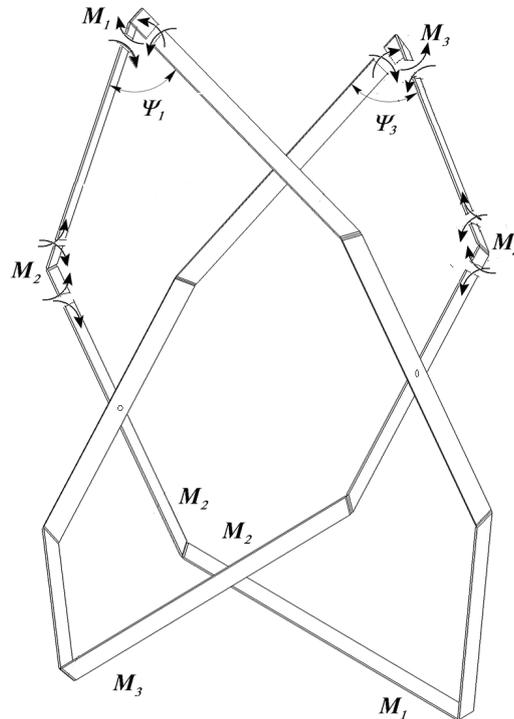


Рис. 8. Изгибающие моменты в пластинках двенадцатизвенника

Принцип виртуальных мощностей при отсутствии нагрузок на граничной поверхности и постоянной температуре сплошной среды T запишется в виде [Жермен, 1983]

$$\int_D m_i \psi'_{i,t} d\Omega + \int_D p v'_{i,t} d\Omega = 0. \quad (12)$$

В формуле (12) $d\Omega = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$, p — внутреннее давление в ячейках, выражение $v' = [(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2) \cdot \bar{e}_3] s'_1 s'_2 s'_3 / A^3$ представляет собой виртуальный (допускаемый связями) элементарный объем введенной сплошной среды в точке с координатами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а величины $\psi'_{i,t}$ и $v'_{i,t}$ — виртуальные скорости изменения функций ψ'_i и v' . Переменная величина t обозначает время. Определяющие уравнения между обобщенными силами и перемещениями примем в форме закона Прандтля–Рейса [Качанов, 1969; Койтер, 1961]

$$\psi_{i,t} = \lambda \frac{\partial f}{\partial m_i}, \quad (13)$$

если $f = k$, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, то $\lambda > 0$; если $f < k$ или $f = k$, $\frac{\partial f}{\partial t} < 0$, то $\lambda = 0$.

Выпуклая функция $f(m_i)$ определяется экспериментально по рисунку 9, число k — предел текучести материала на сдвиг при температуре T .

Сформулированная задача об активном нагружении равносильна проблеме минимума функционала [Мосолов, Мясников, 1981]:

$$L(\psi_{i,t}) = \int_D \Pi(\psi_{i,t}) d\Omega + \int_D p v'_{i,t} d\Omega. \quad (14)$$

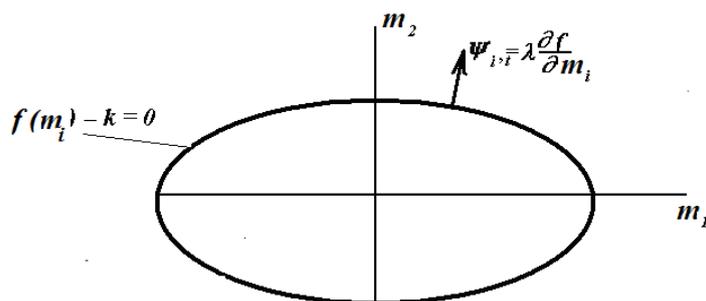


Рис. 9. Поверхность нагружения для жесткопластичного материала $\Phi(m_i) = f(m_i) - k$

Здесь диссипативный потенциал $\Pi(\psi_{i,t})$ — это преобразование Юнга функции

$$f^*(m_i) = 0, \text{ если } f \leq k, \text{ и } f^*(m_i) = \infty, \text{ если } f > k.$$

Таким образом,

$$\Pi(\psi_{i,t}) = \sup_{m_i} (\psi_{i,t} m_i - f^*(m_i)).$$

Переменные M_i выбираются из множества непрерывных ограниченных функций, а $\phi_{i,t}$ — пространство мер в объеме D . Если материал шарниров обладает памятью формы, то в интервале температур $[T_1, T_2]$ существуют две поверхности нагружения $\Phi(m_i)$, $\Phi_\epsilon(m_i)$ по рисунку 10. Поверхности $\Phi(m_i)$, $\Phi_\epsilon(m_i)$ подобны. Если для $\Phi(m_i)$ имеет место равенство

$$f(m_i) - k = 0, \text{ то для } \Phi_\epsilon(m_i) \text{ справедливо } f(m_i) - \epsilon k = 0.$$

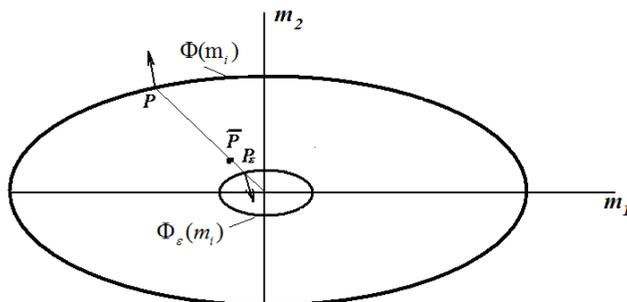


Рис. 10. Две поверхности нагружения для материалов с памятью формы $\Phi(m_i)$, $\Phi_\epsilon(m_i)$

Пусть в процессе деформации обобщенные силы находятся вблизи поверхности $\Phi_\epsilon(m_i)$ (например, в точке \bar{P}). И этом случае при уменьшении нагрузки точка \bar{P} передвигается в положение P_ϵ , выполняются соотношения (11), (12), а также первый и второй законы термодинамики

$$\int_D \dot{q} d\Omega = \int_D \Pi_\epsilon(\psi_{i,t}) d\Omega + \int_D p_\epsilon v d\Omega.$$

Второй закон термодинамики в форме Клаузиуса принимает вид

$$\int_D \dot{q} d\Omega \leq T_2 \dot{H} = \int_D \Pi_\epsilon(\psi_{i,t}) d\Omega.$$

Здесь \dot{H} — скорость изменения энтропии тела, а \dot{q} — скорость подвода тепла при температуре T_2 , когда поверхность $\Phi_\epsilon(m_i)$ стягивается в точку. В написанных формулах диссипа-

ция $\Pi_\varepsilon(\phi_{i,t})$ подсчитывается на поверхности $\Phi(m_i)$. Говоря иначе, при стремлении точки \bar{P} к началу координат в выражении $\Pi_\varepsilon(\psi_{i,t})$ принимается $k = \bar{k}$ (здесь \bar{k} — предел текучести материала при температуре T_2 , а $p_\varepsilon = 0$).

В работе [Грачев, Найштут, 2013] доказаны теоремы о предельной нагрузке в задачах об активном нагружении и восстановлении формы. Именно в первом случае для нагрузки p существует число k_u , что при внутреннем давлении $k_u p$ среда движется со скоростями $\psi_{i,t}^0$ и имеет место равенство

$$\int_D \Pi(\psi_{i,t}^0) + k_u \int_D p v_{i,t}^0 d\Omega = 0. \quad (15)$$

Во втором случае справедливо следующее: если при температуре T_2 подводить тепло в соответствии с равенством

$$\int_D \dot{q} d\Omega = \int_D \Pi_2(\psi_{i,t}^2) d\Omega, \quad (16)$$

то происходит восстановление формы

$$\psi_i^0 = -\psi_i^2. \quad (17)$$

Эти теоремы позволяют оценить внутреннее давление для развертывания пакета на рисунке 6 и количество тепла для восстановления первоначальной формы. Для определенности возьмем функцию $\Phi(m_i)$ в виде $\Phi(m_i) = a_i^2 m_i^2 - 2k^2$, тогда $\Pi(\psi_{i,t}) = k\sqrt{2\psi_{i,t}^2 / a_i^2}$. Все пластинки примем одинаковыми с острым углом у основания, близким к прямому. Пусть сетка полос остается ортогональной в процессе деформирования. Ячейка двенадцатизвенника имеет одну степень свободы (если исключить ее перемещение как абсолютно твердого тела), так как

$$2\psi_1 + 4\psi_2 = 0, \quad 2\psi_3 + 4\psi_4 = 0, \quad \psi_1 = \psi_3. \quad (18)$$

Скорость изменения объема равна

$$v_{i,t} = \frac{\partial}{\partial t}(s_1 s_2 s_3 / A^3) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(1 + \cos \psi_1)^2 \sin \psi_1}{6} \right) = r(\psi_1) \psi_{1,t},$$

$$r(\psi) = \frac{5}{32} \cos \frac{\psi}{2} + \frac{1}{4} \cos \psi + \frac{3}{32} \cos \frac{3\psi}{2}.$$

Используя (18), получим по формуле (15) оценку кинематического коэффициента в виде

$$k_u \leq \frac{k}{p r(\psi_1)} \sqrt{2 \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{4a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{4a_4^2} \right)}. \quad (19)$$

Формула $\bar{p} = k_u p$ определяет внутреннее давление, которое необходимо для развертывания сотовой системы.

Пусть требуется вернуть конструкцию в первоначальный вид путем нагревания шарниров, изготовленных из материалов с памятью формы. Так как предел текучести при температуре T_2 равен \bar{k} , то из соотношения (18) найдем

$$\dot{q} \geq \frac{\bar{k}}{k} \Pi(\psi_{i,t}^0). \quad (20)$$

Отметим полезное следствие формул (15) и (16). Так как развернутая под давлением $\bar{p} = k_u p$ форма многообразия зависит только от положения его граничной поверхности, то

можно получить такую же форму, если нагнетать внутреннее давление лишь в часть ячеек. Изменится только значение k_u , но не форма многообразия. Такое же замечание справедливо при обратной деформации материалов с памятью формы. Таким образом, периодически нагнетая внутреннее давление и нагревая шарниры, получается «полевая машина», сохраняющая свою работоспособность, когда часть ее объема выходит из строя.

Ясно, что формулы типа (19), (20) удастся получить в очень простых ситуациях, когда проблема минимума негладкого функционала (14) является одномерной. Если переменных несколько, то минимум функционала (14) достигается, как правило, на разрывных виртуальных перемещениях, при этом решение минимальной задачи для ψ_i не единственное. Численное решение подобных задач представляет определенные трудности, которые преодолены лишь частично [Glowinsky, 2008]. Существенно, что в задачах, рассмотренных в настоящей работе, поиск точных конфигураций, на которых достигается минимум, не столь важен. Нужно уметь только надежно вычислять предельные нагрузки. А для решения последней задачи разработаны разнообразные эффективные методы [Каменяж 1997; Мосолов, Мясников, 1981].

Возможные применения

Остановимся в заключение на возможных технических реализациях описанных механизмов. Ранее сказано об объектах космической отрасли. В настоящее время проектируются оригинальные мачты для работы в околоземном пространстве [Stohlman, Pellegrino, 2010]. Интересны некоторые архитектурные проекты [Otto, 2001]. Работы этого направления носят уникальный характер. Но теоретические основы для таких проектов разработаны достаточно подробно. Видимо, не менее перспективно применение управляемых сплошных сред в создании микророботов.

На первый взгляд заманчиво проектировать механизмы из деталей в виде пластинок наноразмеров. Эти машины могли бы выполнять работу, которую в живых системах производят белки. Но белки, имеющие аналогичные габаритные размеры, являются высоко специализированными наномашинами, и вряд ли, искусственные аналоги превзойдут их по производительности [Чернавский, Чернавская, 1999]. Но есть другая область, это микромашины с габаритом от одного до десяти миллиметров и простым управлением, которые могли бы, проникая в кровеносные сосуды или другие внутренние органы человека и животных, выполнять полезную работу. Эти машины могут работать в малодоступных местах, являясь не только приводом других механизмов, но и создателем более сложных «апериодических» деформируемых структур.

На этом пути просматриваются только первые обнадеживающие результаты. Сложная проблема создания прочной микропластинки с цилиндрическими шарнирами на концах и малой крутильной жесткостью, видимо, в принципе разрешима. Если эту задачу удастся решить технически, то размеры «земляного червя», созданного в MIT (USA) [Kim, Laschi, Timmer, 2013] после усовершенствований [Грачев, Найштут, 2012], могут быть сведены к миллиметровым.

Интерес к проблеме стимулируется и тем, что в последние годы появилась альтернативная возможность создания апериодических микроструктур на основе оригами [Demaine, O'Rourke, 2007]. Техническая проблема состоит в создании большого количества надежных линейных шарниров в нано пленках. Этот вопрос актуален среди многих коллективов, развивающих лазерную технику.

Задача моделирования сплошных сред из тонких пластинок, по существу, междисциплинарная (математика, физика, инженерное дело, биология, медицина), отвечающая новейшим технологическим достижениям. И если удастся преодолеть возникающие технические сложности, то не исключено появление нового класса микромашин.

Авторы благодарят Г. Г. Малинецкого за конструктивные замечания.

Список литературы

- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Трансформирующиеся среды из прямолинейных полос. — СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. — 43 с.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Сетчатые развертывающиеся оболочки из полос, образованных трапециевидными пластинами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 63–73.
- Грачев В. А., Найштут Ю. С. Теоремы о предельной нагрузке для жесткопластических сплошных сред с внутренними степенями свободы и их приложение к континуальным сетчатым оболочкам // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 423–432.
- Жермен П. Курс механики сплошных сред. — М.: Высшая школа, 1983. — 399 с.
- Каменярж Я. А. Предельный анализ пластических тел и конструкций. — М.: Наука, Физматлит, 1997. — 512 с.
- Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1962. — 237 с.
- Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969. — 420 с.
- Койтер В. Т. Общие теоремы теории упругопластических сред. — М. Изд-во иност. лит., 1961. — 79 с.
- Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
- Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. 2 изд. — М.: УРСС, 2010. — 530 с.
- Чернавский Д. С., Чернавская Н. М. Белок-машина. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 248 с.
- Шрёдингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физика. — М.: Римис, 2009. — 176 с.
- Шухов В. Г. Избранные труды. Строительная механика — М.: Наука, 1977. — 193 с.
- Demaine E., O'Rourke J. Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra, Cambridge University Press, 2007. — 496 p.
- Gantes C. J. Deployable Structures: Analysis and Design. WIT Press, Southampton, Boston, 2001. — 352 p.
- Glowinsky R. Lectures on numerical methods for nonlinear variational problems. Springer, 2008. — 493 p.
- Greg L. Folding in architecture. Chichester, West Sussex; Hoboken, NJ: Wiley-Academy, 2004. — 111 p.
- Kim S., Lacshi C., Trimmer B. Review: Soft robotics a new perspective in robot evolution // Trends in biotechnology. — 2013. — Vol. 31(5). — P. 287–294.
См. также <http://www.youtube.com/watch?v=EXkf62qGFII>
- Margolius I. Architects + Engineers = Structures. Wiley-Academy, London, 2002. 104 p.
- Otto F. Finding Form. Towards an Architecture of the Minimal. Bodo Rasch. 3rd ed. 2001. 240 p.
- Pellegrino S. Deployable structures. Springer-Verlag, Wien, New York, 2001. 360 p.
- Phillips J. Freedom in machinery. Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, 2006. 253 p.
- Stohlman O. R., Pellegrino S. Shape accuracy of a joint-dominated deployable mast // 51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 12–15 April 2010, Orlando, FL, AIAA-2010-2605.
- Tzonis A. Santiago Calatrava: Complete Works, Expanded Edition, Rizzoli, 2007. — 480 p.
- You Z., Chen Y. Motion Structures: Deployable Structural Assemblies of Mechanisms. Spon Press (Taylor and Francis group), 2011. — 168 p.