КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 4 С. 605–619

Ки&М

АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ЖИВЫХ СИСТЕМ

УДК: 519.8

Анализ индуцированных шумом пачечных колебаний в двумерной модели Хиндмарш–Розе

Л. Б. Ряшко[a], Е. С. Слепухина[b]

Уральский федеральный университет,
Россия, 620083, г. Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51

E-mail: [a] Lev.Ryashko@urfu.ru, [b] eudokiya@yandex.ru

Получено 18 апреля 2014 г.

В работе исследуется стохастическая динамика двумерной модели Хиндмарш–Розе в параметрической зоне сосуществования устойчивых равновесий и предельных циклов. Изучается явление индуцированных шумом переходов между аттракторами. Под воздействием случайных возмущений равновесные и периодические режимы объединяются в пачечные: система демонстрирует чередование малых колебаний около равновесия с осцилляциями больших амплитуд. Проводится анализ этого эффекта с помощью техники функций стохастической чувствительности и предлагается метод оценки критических значений интенсивности шума.

Ключевые слова: модель Хиндмарш–Розе, возбудимость, стохастическая чувствительность, индуцированные шумом переходы, пачечные колебания

Analysis of noise-induced bursting in two-dimensional Hindmarsh–Rose model

L. B. Ryashko, E. S. Slepukhina

Ural Federal University, 51 Lenina avenue, Ekaterinburg, 620083, Russia

Abstract. — We study the stochastic dynamics of the two-dimensional Hindmarsh–Rose model in the parametrical zone of coexisting stable equilibria and limit cycles. The phenomenon of noise-induced transitions between the attractors is investigated. Under the random disturbances, equilibrium and periodic regimes combine in bursting regime: the system demonstrates an alternation of small fluctuations near the equilibrium with high amplitude oscillations. This effect is analysed using the stochastic sensitivity function technique and a method of estimation of critical values for noise intensity is proposed.

Keywords: Hindmarsh–Rose model, excitability, stochastic sensitivity, noise-induced transitions, bursting

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 605–619 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке УрФУ в рамках реализации Программы развития УрФУ для победителей конкурса «Молодые ученые УрФУ».

Введение

Основными типами нейронной активности являются состояние покоя, тонические (периодические) и пачечные (бёрстовые) колебания [Izhikevich, 2007]. Последние представляют собой чередование периодических спайков, объединенных в группу (пачку), и участка покоя. Одной из первых систем, моделирующий пачечную активность, является модель Хиндмарш–Розе (ХР) [Hindmarsh, Rose, 1984]. Первоначально была предложена двумерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, являющаяся модификацией модели потенциала действия ФитцХью-Нагумо [FitzHugh, 1961]. Затем для представления механизма пачечных колебаний, было введено третье уравнение.

По классификации Ходжкина [Hodgkin, 1948] нейронная возбудимость бывает двух типов. Класс 1 описывает модели, в которых потенциалы действия могут возбуждаться с любой произвольно низкой частотой, нарастающей с увеличением внешнего импульса. В классе 2 потенциалы действия генерируются в определенном, достаточно узком диапазоне частот, и являются относительно не чувствительными к изменению внешнего импульса. Класс 1 возбудимости проявляется в моделях с седло-узловой бифуркацией, тогда как класс 2 связывают с бифуркацией Андронова–Хопфа [Izhikevich, 2000]. К классу 2 относится, например, модель ФитцХью–Нагумо, для которой эффекты стохастической возбудимости изучались в [Pikovsky, Kurths, 1997; Lindner, Schimansky-Geier, 1999; Lindner et al., 2004; Bashkirtseva, Ryashko, 2011a; Башкирцева, Ряшко, Слепухина, 2013; Bashkirtseva et al., 2014]. Рассматриваемая в данной работе модель ХР демонстрирует другой механизм возбудимости, относящийся к классу 1.

Основные особенности динамики двумерной модели ХР описаны в [Hindmarsh, Rose, 1984]. Дальнейший анализ и бифуркационные диаграммы представлены в [Innocenti et al., 2007] и [Shilnikov, Kolomiets, 2008]. Детерминированная динамика полной трехмерной системы ХР изучалась во многих работах в различных параметрических зонах [Wang, 1993; Li-Xia, Qi-Shao, 2005; Innocenti et al., 2007; Shilnikov, Kolomiets, 2008; Storace et al., 2008; Barrio, Shilnikov, 2011; Desroches et al., 2013].

Стохастический вариант полной трехмерной модели ХР исследовался некоторыми авторами. В основном изучалось воздействие шума на систему с периодическим внешним импульсом и явление стохастического резонанса [Longtin, 1997; Wang et al., 2000; Osipov, Ponizovskaya, 2000; Reinker et al., 2003; Baltanas, Casado, 2002; Ying, Qin-Sheng, 2011]. Когерентный резонанс для трехмерной модели ХР анализировался в [Gu et al., 2002; Xia, Qi-Shao, 2005].

В данной статье изучается воздействие случайных возмущений на двумерную модель ХР. Исходная детерминированная система отличается сильной нелинейностью, вследствие которой она демонстрирует весьма разнообразные и трудно поддающиеся анализу динамические режимы. Вместе с тем случайные возмущения существенно влияют на механизмы возбуждения в нейронных системах. Даже небольшие стохастические флуктуации могут привести к значительному качественному изменению нелинейной динамики таких систем.

В системе Хиндмарш–Розе под действием случайных возмущений происходят индуцированные шумом переходы между сосуществующими предельными циклами и равновесиями. Под влиянием стохастических флуктуаций равновесные и периодические режимы объединяются в пачечные: система демонстрирует чередование малых колебаний около равновесия с осцилляциями больших амплитуд.

В рамках детерминированных систем смоделировать пачечные колебания удается с помощью систем как минимум из трех уравнений. В данной статье показано, как под действием случайных возмущений может генерироваться пачечная активность даже в двумерной модели.

Исчерпывающее вероятностное описание стохастической динамики дает уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Однако напрямую использовать его технически сложно даже в двумерном случае. Поэтому были разработаны различные асимптотики и аппроксимации. Для аппроксимации решений уравнения ФПК могут быть использованы метод квазипотенциала [Вентцель, Фрейдлин, 1979; Dembo, Zeitouni, 1995] и техника функций стохастической чувствительности [Bashkirtseva, Ryashko, 2004; Bashkirtseva, Ryashko, 2005].

Функция стохастической чувствительности [Bashkirtseva, Ryashko, 2011b] позволяет строить доверительные области (эллипсы и полосы), которые являются простыми и наглядными геометрическими моделями для пространственного описания конфигурационного расположения случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов (равновесий и предельных циклов). В данной работе с помощью метода доверительных областей проводится анализ индуцированных шумом переходов в модели ХР, приводящих к генерации пачечных режимов.

Детерминированная модель

Рассмотрим двумерную систему Хиндмарш–Розе [Hindmarsh, Rose, 1984; Shilnikov, Kolomiets, 2008]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 - a, \\ \dot{y} &= -3 - 5x^2 - y, \end{aligned} \tag{1}$$

где x — мембранный потенциал, y — восстановительная переменная и a — управляющий параметр.

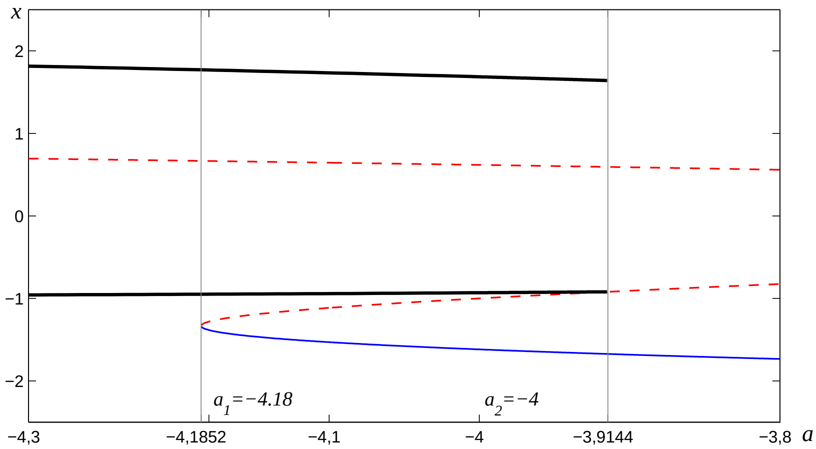


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма: устойчивые (сплошная линия) и неустойчивые (пунктир) состояния равновесия, экстремумы предельных циклов системы (жирные линии)

В зависимости от значения параметра a в системе (1) имеются либо одно, либо три состояния равновесия. На рисунке 1 представлен фрагмент бифуркационной диаграммы. При переходе параметра a слева направо через точку $\bar{a}_1 \approx -4.1852$ в системе происходит седло-узловая бифуркация: появляются два новых равновесия — седло и устойчивый узел. При $\bar{a}_1 < a < \bar{a}_2 \approx -3.9144$ в системе сосуществуют устойчивое равновесие и предельный цикл, разделенные сепаратрисой седла. Предельный цикл теряет устойчивость и исчезает в точке $\bar{a}_2$ в результате гомоклинической бифуркации.

На рисунке 2 изображен типичный фазовый портрет системы в зоне параметров $a \in (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ для значения $a = -4$. Устойчивая сепаратриса седла разделяет бассейны притяжения устойчивого равновесия и предельного цикла. В этой параметрической зоне решение детерминированной

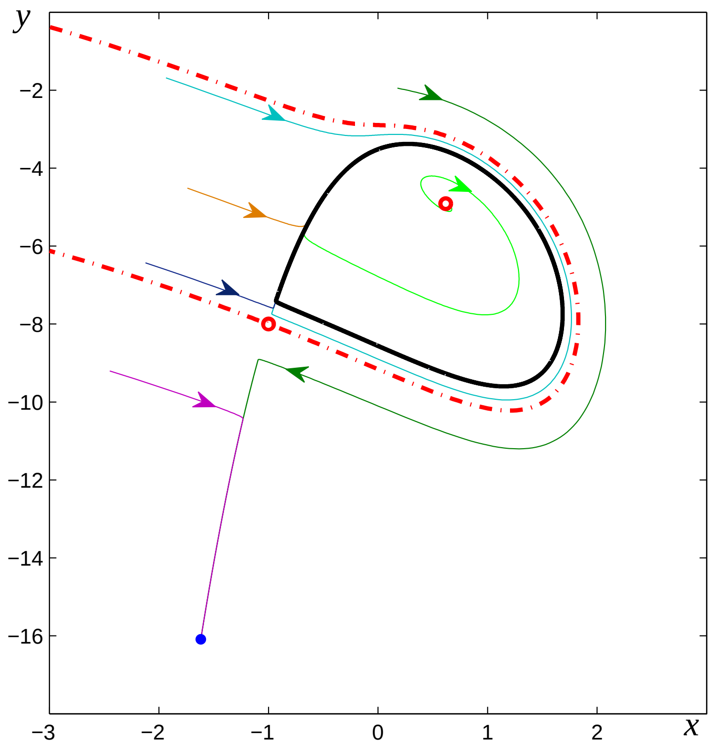


Рис. 2. Фазовый портрет системы при $a = -4$: устойчивое (закрашенный кружок) и неустойчивые (незакрашенные) равновесия, предельный цикл (жирная линия), сепаратриса (штрихпунктир), детерминированные траектории (сплошные)

системы, в зависимости от расположения начальной точки, либо стремится к устойчивому равновесию (стационарный невозбужденный режим), либо к устойчивому циклу (возбужденный периодический режим). Далее мы покажем, что пачечный режим в этой модели может возникнуть в результате воздействия случайных возмущений.

Стохастическая модель

Рассмотрим стохастическую систему:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x^3 + 3x^2 - a + \varepsilon\dot{w} \\ \dot{y} &= -3 - 5x^2 - y, \end{aligned} \tag{2}$$

где w является стандартным винеровским процессом с параметрами $\mathrm{E}(w(t) - w(s)) = 0$, $\mathrm{E}(w(t) - w(s))^2 = |t - s|$ и ε — интенсивность шума.

Исследуем воздействие случайных возмущений на систему в зоне $a \in (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$, где сосуществуют предельный цикл и равновесие. Рассмотрим два значения параметра a: в первом случае ($a_1 = -4.18$) устойчивое равновесие находится ближе к сепаратрисе, чем предельный цикл; а во втором ($a_2 = -4$) — к сепаратрисе ближе предельный цикл.

Рассмотрим значение $a_1 = -4.18$. На рисунке 3 представлены стохастические траектории, выпущенные из бассейна притяжения устойчивого равновесия, и соответствующие временные ряды для различных значений интенсивности шума. Под воздействием случайных возмущений

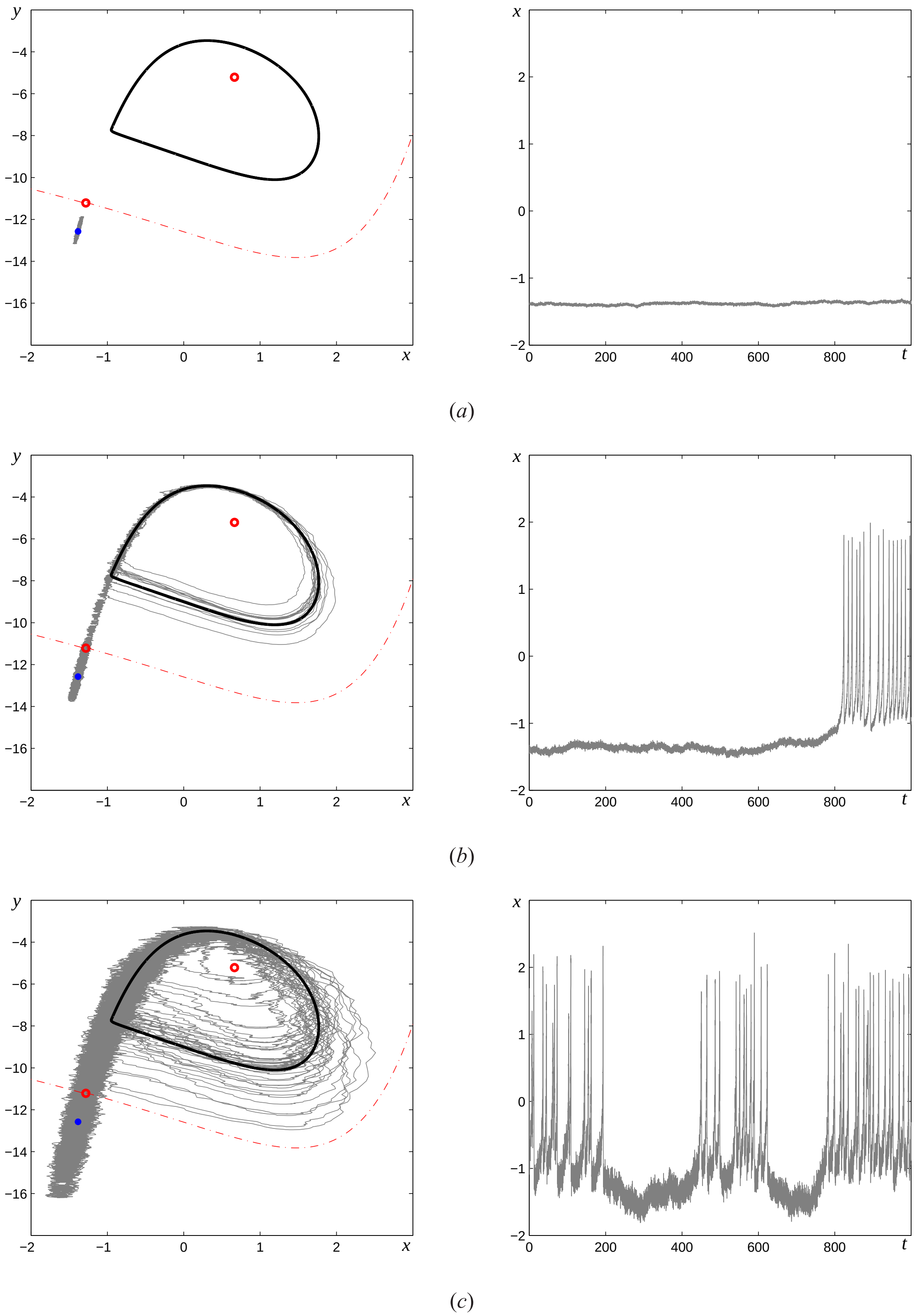
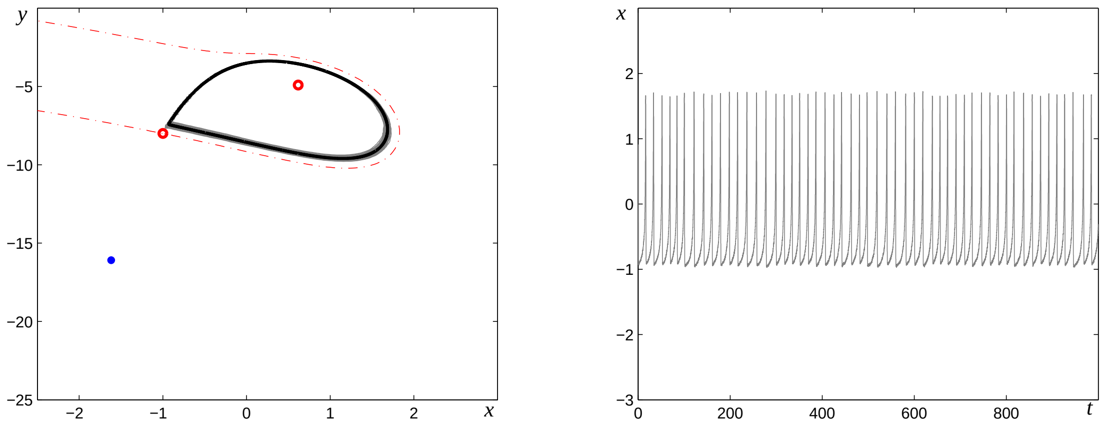
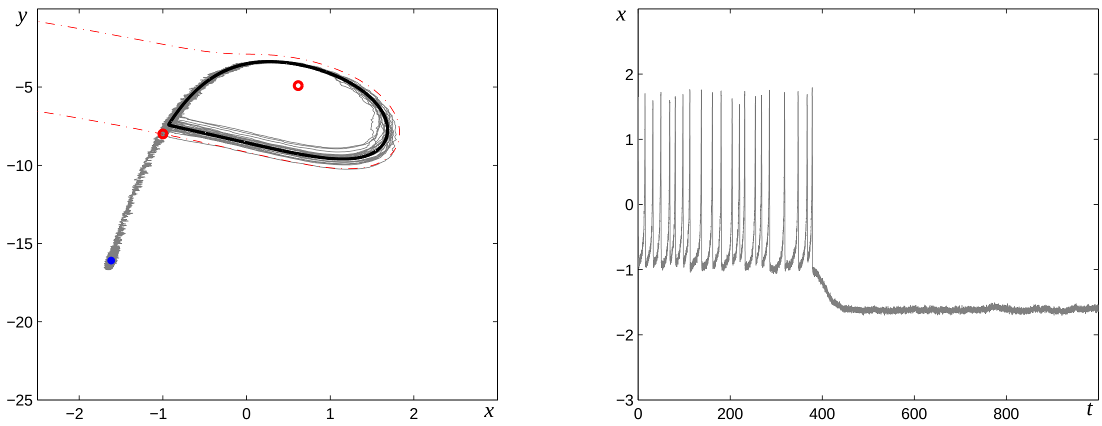


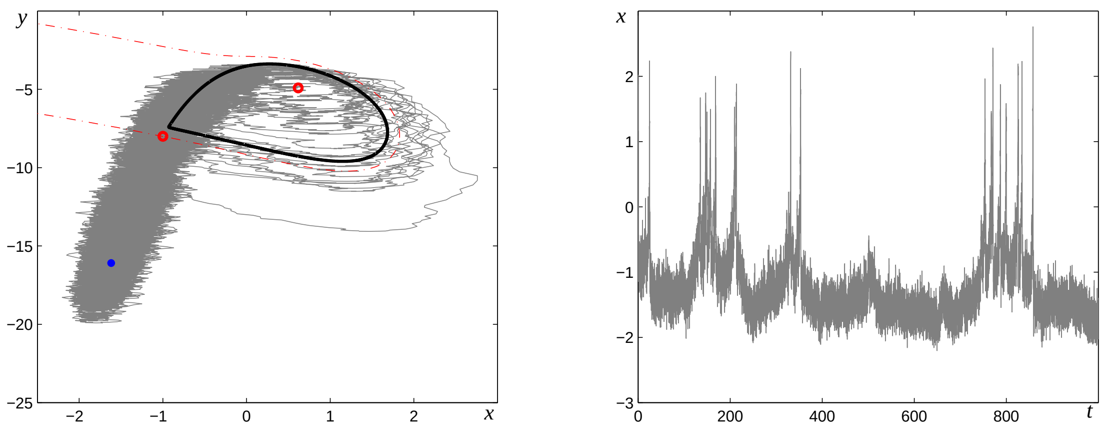
Рис. 3. Индуцированные шумом переходы для $a = -4.18$. Случайные траектории (слева) и временные ряды (справа) при (*a*) $\varepsilon = 0.04$, (*b*) $\varepsilon = 0.1$, (*c*) $\varepsilon = 0.4$: предельные цикл (жирная линия), случайные траектории (сплошные), сепаратриса (штрихпунктир), устойчивое (закрашенный кружок) и неустойчивые (незакрашенный) равновесия



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Рис. 4. Индуцированные шумом переходы для $a = -4$. Случайные траектории (слева) и временные ряды (справа) при (*a*) $\varepsilon = 0.03$, (*b*) $\varepsilon = 0.1$, (*c*) $\varepsilon = 0.8$: предельные цикл (жирная линия), случайные траектории (сплошные), сепаратриса (штрихпунктир), устойчивое (закрашенный кружок) и неустойчивые (незакрашенный) равновесия

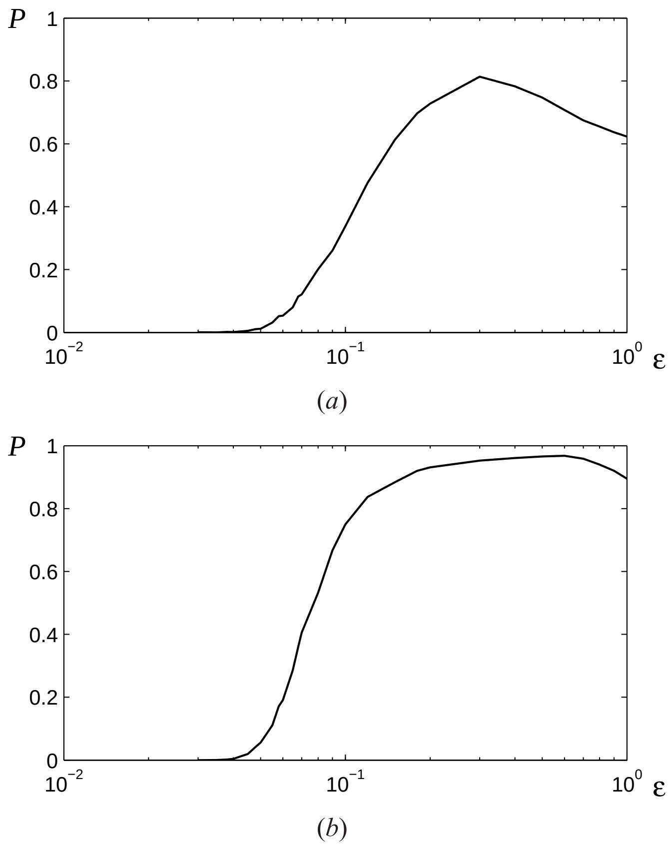
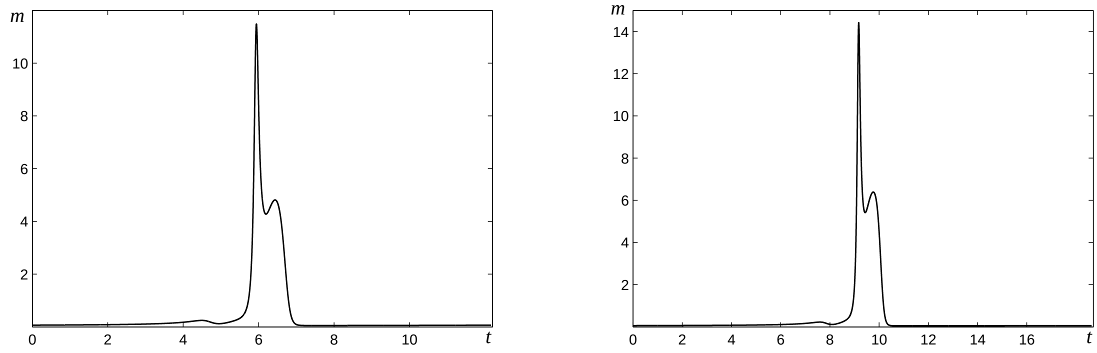


Рис. 5. Вероятность расположения случайных состояний в бассейне притяжения (*a*) предельного цикла для $a = -4.18$, (*b*) устойчивого равновесия для $a = -4$

траектории системы (2) покидают устойчивое равновесие и формируют стохастический аттрактор. При достаточно малой интенсивности шума ($\varepsilon = 0.04$) состояния этого аттрактора сконцентрированы около равновесия (см. рис. 3*a*). При интенсивности шума выше некоторого порогового значения ($\varepsilon = 0.1$) стохастические траектории могут покинут бассейн притяжения равновесия, пересечь сепаратрису, попасть в бассейн притяжения предельного цикла и сформировать стохастический цикл (см. рис. 3*b*). Наблюдается индуцированный шумом переход от равновесия к предельному циклу. При дальнейшем увеличении шума ($\varepsilon = 0.4$) происходят взаимные переходы между циклом и равновесием (рис. 3*c*).

Рассмотрим случай $a_2 = -4$. На рисунке 4 представлены стохастические траектории, выпущенные из бассейна притяжения предельного цикла, и соответствующие временные ряды для различных значений интенсивности шума. При достаточно малом шуме ($\varepsilon = 0.03$) траектории локализуются в некоторой окрестности детерминированного предельного цикла (см. рис. 4*a*). При интенсивности шума выше некоторого порогового значения ($\varepsilon = 0.1$) стохастические траектории могут покинут бассейн притяжения предельного цикла, пересечь сепаратрису и попасть в бассейн притяжения устойчивого равновесия (см. рис. 4*b*). Наблюдается индуцированный шумом переход от предельного цикла к равновесию. При дальнейшем увеличении шума ($\varepsilon = 0.8$) происходят взаимные переходы между циклом и равновесием (рис. 4*c*). Наблюдается чередование малых колебаний около равновесия с осцилляциями больших амплитуд. Таким образом, под влиянием стохастических возмущений равновесные и периодические режимы объединяются в пачечные.



(a) (b)

Рис. 6. Функция стохастической чувствительности предельного цикла для (a) $a = -4.18$, (b) $a = -4$

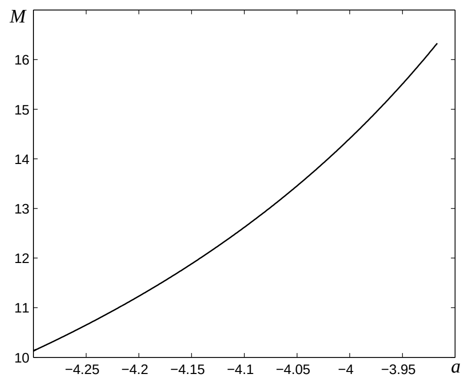


Рис. 7. Показатель стохастической чувствительности предельных циклов

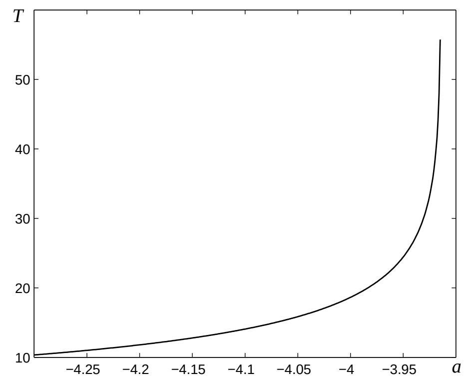


Рис. 8. Периоды предельных циклов

Явление индуцированных шумом переходов подтверждается существенными изменениями плотности распределения случайных траекторий. На рисунке 5 показан график зависимости вероятности P расположения случайных состояний в бассейне притяжения предельного цикла для $a_1 = -4.18$ (рис. 5a) и устойчивого равновесия для $a_2 = -4$ (рис. 5b) от интенсивности шума. Графики построены по результатам прямого численного моделирования. Для $a_1 = -4.18$ при $\varepsilon > 0.047$ имеем $P > 0.01$. Для $a_2 = -4$ при $\varepsilon > 0.043$ имеем $P > 0.01$. Заметим, что при $\varepsilon > 0.3$ для $a_1 = -4.18$ и при $\varepsilon > 0.6$ для $a_2 = -4$ функция $P(\varepsilon)$ начинает убывать, что подтверждает наличие обратных переходов.

Удобной количественной характеристикой величины разброса случайных траекторий вокруг детерминированного цикла при малых шумах является функция стохастической чувствительности (ФСЧ) [Башкирцева, Ряшко, 2001; Bashkirtseva, Ryashko, 2004; Bashkirtseva, Ryashko, 2011b]. Необходимый математический аппарат ФСЧ дается в приложении.

На рисунке 6 представлены графики ФСЧ предельных циклов для $a_1 = -4.18$ и $a_2 = -4$. Максимум ФСЧ соответствует нижней части цикла. Большая дисперсия стохастических траекторий объясняется высокой чувствительностью цикла в этой части.

На рисунке 7 изображен график коэффициента стохастической чувствительности M предельных циклов в зависимости от параметра a в зоне $[\overline{a}_1, \overline{a}_2]$. Коэффициент стохастической чувствительности растет с увеличением периода цикла (см. рис. 8) и при приближении к точке гомоклинической бифуркации.

ФСЧ позволяет строить доверительные области (эллипсы и полосы), которые являются простыми и наглядными геометрическими моделями для пространственного описания конфигурационного расположения случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов (равновесий и предельных циклов).

Используем метод доверительных областей для анализа эффекта индуцированных шумом переходов между аттракторами. На рисунке 9 показаны доверительные области (доверительные эллипсы вокруг равновесий и внешние границы доверительных полос вокруг циклов) для $a_1 = -4.18$ при трех рассматриваемых значениях интенсивности шума ($\varepsilon = 0.04$, $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.4$) и доверительной вероятности $P = 0.999$. При $\varepsilon = 0.04$ (рис. 9*a*) доверительный эллипс расположен вблизи устойчивого равновесия и полностью принадлежит бассейну его притяжения. При увеличении шума ($\varepsilon = 0.1$) эллипс расширяется, пересекает сепаратрису и начинает занимать бассейн притяжения предельного цикла (рис. 9*b*). Это означает, что с высокой вероятностью стохастические траектории могут покинуть бассейн притяжения равновесия и попасть в бассейн притяжения предельного цикла. При дальнейшем увеличении интенсивности шума доверительная полоса предельного цикла расширяется и при $\varepsilon = 0.4$ пересекает сепаратрису (рис. 9*c*). Это подтверждает наличие взаимных переходов между циклом и равновесием (см. рис. 3*c*).

Доверительные области для $a_2 = -4$ представлены на рисунке 10. Механизм индуцированных шумом переходов иллюстрируется с помощью доверительных областей аналогичным образом, при этом раньше начинает пересекать сепаратрису доверительная полоса цикла.

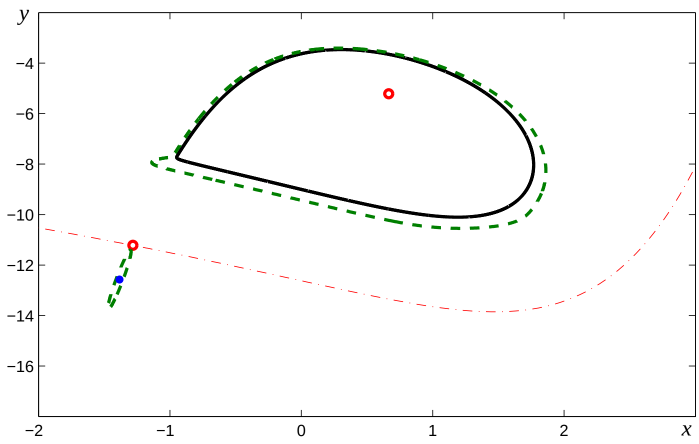
Метод доверительных полос позволяет оценить критическое значение интенсивности шума, при котором начинаются переходы: это значение, при котором доверительный эллипс или полоса касается сепаратрисы. Для $a_1 = -4.18$ сначала доверительный эллипс касается сепаратрисы при $\varepsilon_1^* \approx 0.046$, это соответствует переходу от равновесия к циклу. Затем при $\varepsilon_2^* \approx 0.34$ доверительная полоса касается сепаратрисы, что соответствует началу взаимных переходов. Для $a_2 = -4$ переход от цикла к равновесию начинается при $\varepsilon_1^* \approx 0.049$, а взаимные переходы при $\varepsilon_2^* \approx 0.66$. Полученные значения согласуются с результатами прямого численного моделирования, представленными выше.

Для значения параметра $a_1 = -4.18$ механизм индуцированных шумом переходов детально разобран для случая, когда начальная точка была выбрана вблизи равновесия. Если начальную точку брать вблизи предельного цикла, то картина будет следующей. При $\varepsilon < \varepsilon_2^*$ случайные траектории локализуются рядом с циклом. При значении интенсивности шума $\varepsilon > \varepsilon_2^*$ случайные траектории пересекают сепаратрису, переходят в окрестность равновесия, а затем снова возвращаются в окрестность цикла. Односторонних переходов от цикла к равновесию при $a_1 = -4.18$ не будет. Взаимное расположение доверительных областей указывает на то, что при данном значении параметра цикл доминирует над равновесием.

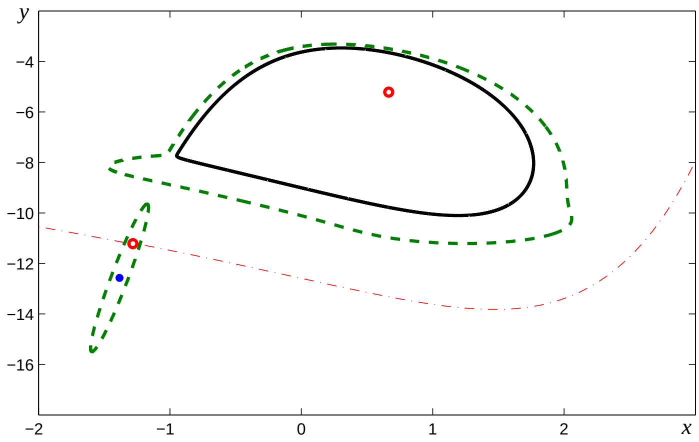
В случае $a_2 = -4$ исследован механизм индуцированных шумом переходов, когда начальная точка была выбрана вблизи предельного цикла. Если начальную точку брать рядом с равновесием, то случайные траектории при $\varepsilon < \varepsilon_2^*$ локализуются вблизи равновесия, а при $\varepsilon > \varepsilon_2^*$ пересекают сепаратрису, переходят в окрестность цикла и возвращаются в окрестность равновесия. Односторонних переходов от равновесия к циклу при $a_2 = -4$ не будет. При данном значении параметра равновесие доминирует над циклом.

Заключение

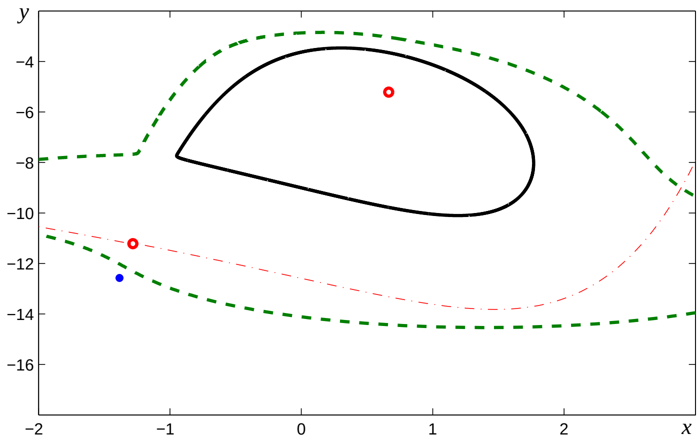
Для двумерной модели Хиндмарш–Розе исследовано явление индуцированных шумом переходов между сосуществующими устойчивыми равновесиями и предельными циклами. Показано, что под влиянием стохастических возмущений равновесные и периодические режимы



(a)



(b)



(c)

Рис. 9. Доверительные области (пунктир), сепаратриса (штрихпунктир), предельный цикл (сплошная) для $a = -4.18$ и (a) $\varepsilon = 0.04$, (b) $\varepsilon = 0.1$, (c) $\varepsilon = 0.4$. Доверительная вероятность $P = 0.999$

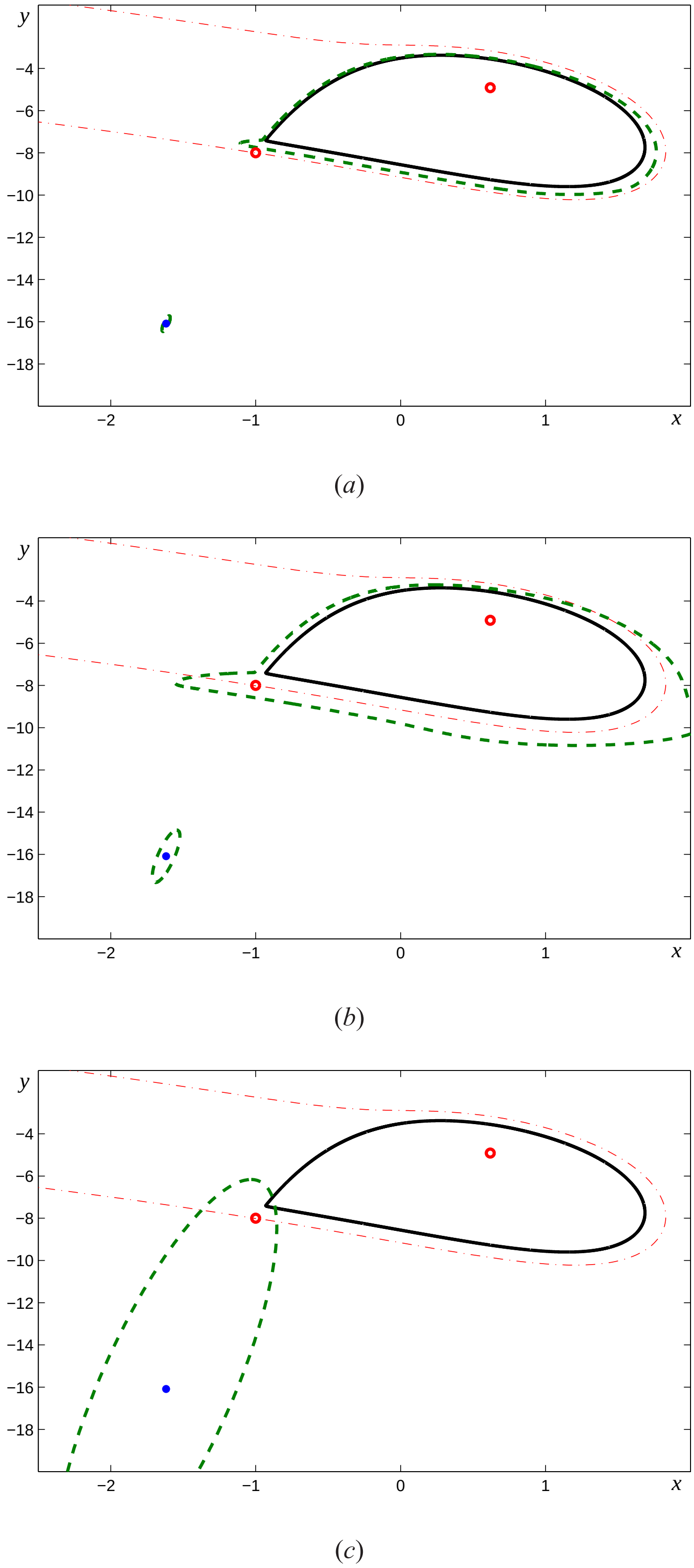


Рис. 10. Доверительные области (пунктир), сепаратриса (штрихпунктир), предельный цикл (сплошная) для $a = -4$ и (*a*) $\varepsilon = 0.03$, (*b*) $\varepsilon = 0.1$, (*c*) $\varepsilon = 0.8$. Доверительная вероятность $P = 0.999$

объединяются в пачечные: система демонстрирует чередование малых колебаний около равновесия с осцилляциями больших амплитуд. В рамках детерминированных систем моделирование пачечных колебания возможно с помощью систем как минимум из трех уравнений. В данной статье представлена двумерная стохастическая система, демонстрирующая пачечную активность. С помощью техники функций стохастической чувствительности проводится анализ индуцированных шумом переходов и предлагается метод оценки критических значений интенсивности возмущений.

Приложение

Стандартной математической моделью систем со случайными возмущениями являются стохастические дифференциальные уравнения. Рассмотрим общую n-мерную стохастическую систему уравнений Ито [Гихман, Скороход, 1982]

$$dx = f(x)\,dt + \varepsilon\sigma(x)\,dw(t), \tag{3}$$

где x — n-вектор, $w(t)$ — m-мерный стандартный винеровский процесс, $f(x)$ и $\sigma(x)$ — достаточно гладкие функции соответствующих размерностей, ε — параметр интенсивности возмущений.

Стохастическая система ХР (2) является частным случаем системы (3) при $n = 2$, $m = 1$,

$$f = \begin{bmatrix} y - x^3 + 3x^2 - a \\ -3 - 5x^2 - y \end{bmatrix}, \qquad \sigma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

В результате действия невырожденных шумов случайные траектории системы (3) покидают детерминированный аттрактор и формируют вокруг него некоторый стохастический аттрактор. Детальное вероятностное описание случайных траекторий в терминах плотности распределения дается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) [Гардинер, 1986].

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет установившийся режим, то можно ограничиться рассмотрением стационарной плотности распределения $\rho(x,\varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК. Непосредственное использование этого уравнения уже в двумерном случае весьма затруднительно, поэтому для аппроксимации стационарной плотности используются аппроксимации и асимптотики [Kurrer, Schulten, 1991; Мильштейн, Ряшко, 1995; Lindner, Schimansky-Geier, 1999]. Для аппроксимации решений ФПК может быть использован известный метод квазипотенциала [Вентцель, Фрейдлин, 1979; Dembo, Zeitouni, 1995] и техника функции стохастической чувствительности [Башкирцева, Ряшко, 2001; Bashkirtseva, Ryashko, 2004; Bashkirtseva, Ryashko, 2011b].

Рассмотрим случай стохастического равновесия. Пусть детерминированная система, соответствующая (3), имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x}$. С помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазитенциала вблизи равновесия можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику

$$\rho(x,\varepsilon) = K\exp\left(-\frac{(x-\bar{x}, W^{-1}(x-\bar{x}))}{2\varepsilon^2}\right)$$

с ковариационной матрицей $D(\varepsilon) = \varepsilon^2 W$. Для экспоненциально устойчивого равновесия $\bar{x}$ матрица W является единственным решением матричного уравнения

$$FW + WF^\top = -S, \qquad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \qquad S = GG^\top, \qquad G = \sigma(\bar{x}).$$

Матрица W является функцией стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$. Эта матрица характеризует пространственное расположение и размеры стационарно распределенных случайных состояний системы (3) около детерминированного равновесия $\bar{x}$. Для случая $n = 2$ соответствующий доверительный эллипс задается следующим уравнением:

$$(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})) = 2k^2\varepsilon^2,$$

где ε — интенсивность возмущений, $k^2 = -\ln(1 - P)$, а P — доверительная вероятность. Это означает, что случайные состояния системы (3) находятся внутри эллипса с вероятностью P.

Рассмотрим случай стохастического цикла. Предполагается, что соответствующая (3) детерминированная система ($\varepsilon = 0$) имеет T-периодическое решение $x = \xi(t)$, задающее экспоненциально устойчивый предельный цикл Γ.

Пусть Π_t — гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\xi(t)$. В этом случае с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазитенциала вблизи цикла для сечения Пуанкаре Π_t можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику

$$\rho_t(x,\varepsilon) \;=\; K\exp\left(-\frac{(x-\xi(t))^\top W^+(t)(x-\xi(t))}{2\varepsilon^2}\right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t,\varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$. Матрица $W(t)$ — функция стохастической чувствительности цикла — является решением краевой задачи

$$\dot{W} \;=\; F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \qquad W(0) = W(T), \qquad W(t)r(t) = 0 \tag{4}$$

Здесь

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t)),\; S(t) = G(t)G^\top(t),\; G(t) = \sigma(\xi(t)),$$

$$r(t) = f(\xi(t)),\; P(t) = P_{r(t)},\; P_r = I - \frac{rr^\top}{r^\top r}.$$

Система (4) благодаря экспоненциальной устойчивости цикла имеет единственное решение [Bashkirtseva, Ryashko, 2004].

В случае цикла на плоскости ($n = 2$) матрицы $W(t)$ и $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде

$$W(t) = m(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^\top(t).$$

Здесь $p(t)$ — нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$, а $m(t) > 0$ — T-периодическая скалярная функция, задающая дисперсию $D(t,\varepsilon) = \varepsilon^2 m(t)$ пучка случайных траекторий по нормали к циклу в точке $\xi(t)$.

Функция $m(t)$ удовлетворяет [Башкирцева, Перевалова, 2007] краевой задаче

$$\dot{m} = a(t)m + b(t), \;\; m(0) = m(T)$$

с T-периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \qquad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t).$$

Функция $m(t)$ определяет локальную стохастическую чувствительность цикла в точке $\xi(t)$. Удобной характеристикой стохастического цикла в целом является коэффициент стохастической чувствительности $M = \max\limits_{[0,T]} m(t)$.

Функция $m(t)$ позволяет построить доверительную полосу вокруг детерминированного цикла Г. Границы $x_{1,2}(t)$ этой доверительной полосы могут быть записаны в явной параметрической форме:

$$x_{1,2}(t) = \xi(t) \pm k\varepsilon\sqrt{2m(t)}p(t), \quad t \in [0, T].$$

Здесь параметр k связан с доверительной вероятностью P формулой $k = \mathrm{erf}^{-1}(P)$, где $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$. Случайные траектории окружены границами доверительной полосы с доверительной вероятностью P.

Доверительные полосы являются достаточно простыми и наглядными геометрическими моделями пространственного описания случайных состояний в стохастическом цикле, расположенном около детерминированного цикла Г.

Список литературы

Башкирцева И. А., Перевалова Т. В. Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя – цикл // Автоматика и телемеханика. — 2007, № 10. — С. 53–69.

Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устойчивости предельных циклов к случайным возмущениям // Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика. — 2001. — Т. 9, № 6. — С. 104–113.

Башкирцева И. А., Ряшко Л. Б., Слепухина Е. С. Бифуркация расщепления стохастических циклов в модели Фицхью-Нагумо // Нелинейная динамика. — 2013. — Т. 9, № 2. — С. 295–307.

Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. — М.: Наука, 1979. — 424 с.

Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках. — М.: Мир, 1986. — 538 с.

Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1982. — 612 с.

Мильштейн Г. Н., Ряшко Л. Б. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями // Прикл. математика и механика. — 1995. — Т. 59, № 1. — С. 53–63.

Baltanas J., Casado J. Noise-induced resonances in the Hindmarsh–Rose neuronal model // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 65, 041915. — 6 p.

Barrio R., Shilnikov A. Parameter-sweeping techniques for temporal dynamics of neuronal systems: case study of Hindmarsh–Rose model // Journal of mathematical neuroscience. — 2011. — Vol. 1, No. 6. — 22 p.

Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Analysis of excitability for the FitzHugh-Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique // Phys. Rev. E. — 2011. — Vol. 83, No. 6. — 061109. — 8 p.

Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect // Chaos. — 2011. — Vol. 21, No. 4. — 047514. — 4 p.

Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations // Chaos, Solitons and Fractals. — 2005. — No. 26. — P. 1437–1451.

Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // Mathematics and Computers in Simulation. — 2004. — Vol. 66, No. 1. — P. 55–67.

Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B., Slepukhina E. Noise-induced oscillation bistability and transition to chaos in FitzHugh-Nagumo model // Fluctuation and noise letters. — 2014. — Vol. 13, No. 1. — 1450004. — 16 p.

Dembo M., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. — Boston: Jones and Bartlett Publishers, 1995. — 346 p.

Desroches M., Kaper T., Krupa M. Mixed-mode bursting oscillations: Dynamics created by a slow passage through spike-adding canard explosion in a square-wave burster // Chaos. — 2013. — Vol. 23, No. 4. — 046106. — 13 p.

FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane // Biophys. J. — 1961. — No. 1. — P. 445–466.

Gu H., Yang M., Li L., Liu Z., Ren W. Experimental observation of the stochastic bursting caused by coherence resonance in a neural pacemaker // Neuroreport. — 2002. — Vol. 13, No. 13. — P. 1657–1660.

Hindmarsh J. L., Rose R. M. A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // Proc R Soc Lond B Biol Sci. — 1984. — V. 221, No. 1222. — P. 87–102.

Hodgkin A. L. The local electric changes associated with repetitive action in a non-medullated axon // J Physiol. — 1948. — Vol. 107, No. 2. — P. 165–181.

Innocenti G., Morelli A., Genesio R., Torcini A. Dynamical phases of the Hindmarsh–Rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos // Chaos. — 2007. — Vol. 17, No. 4. — 043128. — 11 p.

Izhikevich E. M. Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting. — Cambridge: MIT Press, 2007. — 521 p.

Izhikevich E. M. Neural Excitability, Spiking, and Bursting // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2000. — Vol. 10, No. 6. — P. 1171–1266.

Kurrer C., Schulten K. Effect of noise and perturbations on limit cycle systems // Phys. D. — 1991. — Vol. 50, No. 3. — P. 311–320.

Lindner B., Schimansky-Geier L. Analytical approach to the stochastic FitzHugh-Nagumo system and coherence resonance // Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 60, No. 6. — P. 7270–7276.

Lindner B., Garcia-Ojalvo J., Neiman A., Schimansky-Geier L. Effects of noise in excitable systems // Physics Reports. — 2004. — Vol. 392. — P. 321–424.

Li-Xia D. and Qi-Shao L. Codimension-Two Bifurcation Analysis in Hindmarsh–Rose Model with Two Parameters // Chin. Phys. Rev. — 2005. — Vol. 22, No. 6. — P. 1325–1328.

Longtin A. Autonomous stochastic resonance in bursting neurons // Phys. Rev. E. — 1997. — Vol. 55, No. 1. — P. 868–876.

Osipov V. V., Ponizovskaya E. V. Multivalued stochastic resonance in a model of an excitable neuron // Phys. Lett. A. — 2000. — Vol. 271, No. 3. — P. 191–197.

Pikovsky A. S., Kurths J. Coherence resonance in a noise-driven excitable system // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, No. 5. — P. 775–778.

Reinker S., Puil E., Miura R. M. Resonances and Noise in a Stochastic Hindmarsh–Rose Model of Thalamic Neurons // Bull Math Biol. — 2003. — Vol. 65, No. 4. — P. 641–663.

Shilnikov A., Kolomiets M. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose Model: A case study – A Tutorial // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2008. — Vol. 18, No. 8. — P. 2141–2168.

Storace M., Linaro D., de Lange E. The Hindmarsh–Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations // Chaos. — 2008. — Vol. 18, No. 3. — 033128. — 10 p.

Wang Y., Wang Z. D., Wang W. Dynamical Behaviors of Periodically Forced Hindmarsh–Rose Neural Model: The Role of Excitability and 'Intrinsic' Stochastic Resonance // J. Phys. Soc. Jpn. — 2000. — Vol. 69, No. 1. — P. 276–283.

Wang X.-J. Genesis of bursting oscillations in the Hindmarsh–Rose model and homoclinicity to a chaotic saddle // Physica D. —1993. — Vol. 63, No. 1–4. — P. 263–274.

Xia Shi, Qi-Shao Lu. Coherence resonance and synchronization of Hindmarsh–Rose neurons with noise // Chinese Physics. — 2005. — Vol. 14, No. 6. — P. 1088–1094.

Ying J., Qin-Sheng B. SubHopf/Fold-Cycle Bursting in the Hindmarsh–Rose Neuronal Model with Periodic Stimulation // Chin. Phys. Lett. — 2011. — Vol. 28, No. 9. — 090201. — 3 p.