**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 4 С. 577–584**

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 51-74:514.12

Метод расчета пространственного светораспределения системы разноориентированных светодиодных излучателей

А. А. Ашрятов[a], С. В. Прытков[b], А. О. Сыромясов[c]

Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва,
Россия, 430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68

E-mail: [a] ashryatov@rambler.ru, [b] sergeyvladi88@gmail.com, [c] syal1@yandex.ru

Получено 17 марта 2014 г.

В статье предложен метод расчета светораспределения системы разноориентированных светодиодных излучателей, основанный на совмещении систем координат, связанных с этими источниками света. В отличие от других известных подходов, указанный метод может быть применен к излучателям, светораспределение которых обладает произвольной симметрией или вовсе не имеет ее.

Ключевые слова: фотометрическое тело, точечный источник света, вторичная оптика, преобразования координат, повороты на плоскости, повороты в пространстве

Calculation of spatial distribution of differently oriented LEDs

A. A. Ashryatov, S. V. Ashryatov, A. O. Syromyasov

Ogarev Mordovia State University, 68 Bolshevistskaya street, Saransk, 430005, Russia

Abstract. — New method for calculation of spatial light distribution of differently oriented LEDs is proposed. The main idea is combination of coordinate systems associated with these light sources. Unlike other conventional approaches, this method can be applied to the emitters with light distribution with arbitrary symmetry or without symmetry at all.

Keywords: photometric body, point light source, secondary optics, coordinate transformations, rotations in plane, rotations in space

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 577–584 (Russian).

Введение

Идея формирования светораспределения светодиодного светильника посредством задания определенной совокупности направлений светодиодных излучателей (СД-излучателей) интересна по следующим причинам:

1. Такой подход позволяет создавать фотометрическое тело (ФТ) любой сложности, используя вторичную оптику с простой геометрией.

2. Обеспечив в конструкции осветительного прибора (ОП) возможность поворота отдельных СД (СД-модулей), можно оптимизировать его светораспределение, учитывая специфику условий освещения.

3. Изменяя интенсивность излучения отдельных светодиодов или их групп, можно добиться значительного изменения ФТ.

Общая постановка задачи такова. Даны несколько точечных источников света (ИС), местоположение которых совпадает, и известно светораспределение каждого из ИС по отдельности. Что то же самое, для каждого ИС задана индикатриса силы света (ИСС) — функция I, характеризующая силу света, излучаемого источником в том или ином направлении (ее графическим представлением и служит фотометрическое тело). Требуется найти суммарное ФТ системы из нескольких ИС.

Метод расчета ФТ для приборов, состоящих из нескольких светодиодов, уже предлагался ранее [Ашурков, Барцев, 2007], но в указанной работе предполагалось, что ФТ каждого из источника света (ИС) осесимметрично. Подход, развиваемый авторами в настоящей статье, не имеет этого ограничения. На форму и размеры ФТ накладывается лишь такое ограничение: лучи света, излучаемые одним ИС, не должны экранироваться поверхностями других ИС или иными конструктивными элементами осветительного прибора.

Далее принимается предположение: если ИС расположены в одной точке, то их силы света, соответствующие одному и тому же направлению, можно складывать [Тиходеев, 1936]. Так, если индикатрисы двух излучателей задаются функциями I_1 и I_2, соответственно, то индикатрису «суммарного» ИС опишет функция $I_1 + I_2$.

Расчет светораспределения на плоскости

Существующие стандарты [ГОСТ Р 54350-2011] допускают описание ФТ с помощью построения его сечений в одной или нескольких характерных плоскостях. Сведение к плоскому случаю позволяет считать силу света I функцией одного полярного угла φ; началом системы координат служит сам точечный ИС, величина $I \geq 0$ выступает в роли полярного радиуса (рис. 1).

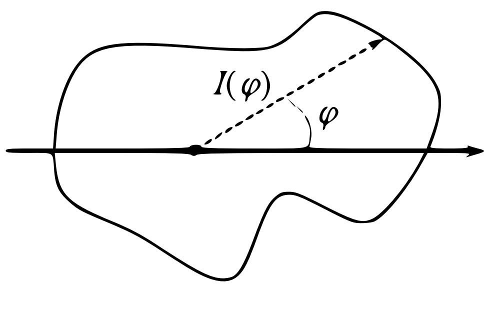

Рис. 1. ФТ задано в полярных координатах

В простейшем случае областью определения $I(\varphi)$ служит отрезок $[0°; 360°]$ или $[-180°; 180°]$. Однако для каждого конкретного ИС вопрос о границах области определения $I(\varphi)$ необходимо решать отдельно. Например, если у светильника прямого света 100% светового потока приходится на нижнюю полусферу, то логично считать, что φ принадлежит некоторому отрезку длины не более, чем 180° (вместо исходных 360°).

Поскольку ФТ является характеристикой ИС, оно описывается в *собственной* системе координат, жестко связанной с этим источником. При сложении сил света двух и более излучателей их собственные системы должны совпадать. Для этого следует выбрать некую *общую* систему координат и совместить с ней все прочие с помощью поворотов вокруг точки, где располагаются ИС.

Пусть n источников света описываются индикатрисами $I_1(\Phi)$, $I_2(\Phi)$,..., $I_n(\Phi)$, где Φ — полярные углы в собственных системах координат ИС. Далее, пусть φ_1, φ_2,..., φ_n — углы, отсчитанные против часовой стрелки, на которые следует повернуть указанные системы, чтобы совместить их с общей. Тогда суммарное распределение источников в общей системе описывается функцией

$$I(\varphi) = I_1(\varphi - \varphi_1) + I_2(\varphi - \varphi_2) + \ldots + I_n(\varphi - \varphi_n), \tag{1}$$

где φ — угловая координата в выбранной общей системе.

Как было отмечено выше, функции I_1, I_2,..., I_n могут быть определены не для всех Φ. Чтобы формула (1) оставалась справедливой при любых значениях угловой переменной φ, следует доопределить исходные I_k, $k = \overline{1, n}$, и считать, что если неравенство $I_k(\Phi) > 0$ не выполнено, то $I_k(\Phi) = 0$.

Очевидно, что при любом φ функция I принимает значение не меньшее, чем любая из исходных ИСС. Кроме того, $I > 0$, если хотя бы одна из функций I_k положительна. Поэтому носителем $I(\varphi)$ является объединение носителей функций $I_1(\varphi - \varphi_1)$, $I_2(\varphi - \varphi_2)$,..., $I_n(\varphi - \varphi_n)$.

Рассмотрим пример. Пусть фотометрические тела двух идентичных ИС, расположенных в точке O, имеют сечения в форме эллипсов с полуосями a, b, причем O является концом большой полуоси a. Введем для каждого ФТ декартову прямоугольную систему координат Oxy, оси которой сонаправлены с полуосями эллипса; тогда изучаемое сечение задается уравнением

$$\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

Перейдя от декартовых координат к полярным по формулам

$$x = I \cos \Phi,\ y = I \sin \Phi,$$

получим, что

$$I(\varphi) = \frac{2ab^2 \cos \Phi}{a^2 \sin^2 \Phi + b^2 \cos^2 \Phi},\ \Phi \in [-90°; 90°]. \tag{3}$$

Если $\Phi \notin [-90°; 90°]$, то $I(\Phi) = 0$.

Если угол между большими полуосями эллипсов равен φ_0, то в системе координат, связанной с одним из ФТ, суммарное светораспределение задается суммой $I_1(\varphi) + I_2(\varphi - \varphi_0)$, где I_1 и I_2 описываются формулой (3).

На рисунке 2 построено суммарное светораспределение двух СД, каждый из которых имеет ФТ в форме эллипса с полуосями $a = 2$ и $b = 1$. Угол φ_0 равен 60°.

Поскольку $I_1(\varphi) > 0$ при $-90° < \varphi < 90°$, $I_2(\varphi - \varphi_0) > 0$ при $-30° < \varphi < 150°$, то носителем суммарной ИСС служит отрезок $[-90°; 150°]$.

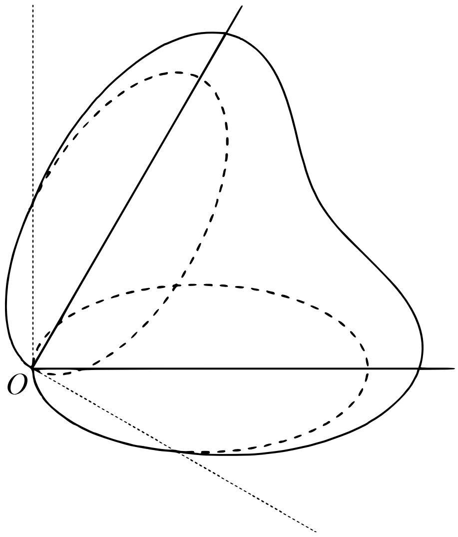

Рис. 2. Суммарное светораспределение двух эллиптических ФТ на плоскости

Фотометрические тела исходных ИС изображены пунктирными эллипсами, их оси симметрии — сплошными прямыми; одной из них соответствует полярный угол $\varphi = 0$, другой — угол $\varphi = \varphi_0$.

Отметим, что пунктирные кривые на рисунке 2 не выходят за границы сплошной; это является иллюстрацией неравенства $I \geq I_k$ при $k = 1, 2$. При $\varphi < -90° + \varphi_0$ и $\varphi > 90°$ лишь одна из функций $I_1(\varphi)$, $I_2(\varphi - \varphi_0)$ больше нуля; в указанных диапазонах суммарная ИСС совпадает с одной из исходных (сплошная и пунктирная кривые накладываются друг на друга). Искажения ФТ, вызванные суммированием сил света, наблюдаются лишь при $-90° + \varphi_0 < \varphi < 90°$, где $I_1(\varphi)$ и $I_2(\varphi - \varphi_0)$ одновременно принимают положительные значения. Направления $\varphi = -90° + \varphi_0$ и $\varphi = 90°$ отмечены пунктирными прямыми.

Расчет светораспределения в пространстве

В трехмерном случае ИСС является функцией двух переменных: $I = I(\theta, \varphi)$. Углы $\theta \in$ $\in [0°; 180°]$ и $\varphi \in [0°; 360°]$ задают направление в сферической системе координат, начало которой совмещено с ИС, I выступает в роли расстояния (рис. 3).

Переход от сферических координат к декартовым описывается соотношениями

$$x = I\cos\varphi\sin\theta,\ y = I\sin\varphi\sin\theta,\ z = I\cos\theta, \tag{4}$$

а обратный переход — формулами

$$I = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{I}\right),\ \varphi = \begin{cases} \varphi^*,\ y \geq 0, \\ 360° - \varphi^*,\ y < 0, \end{cases} \tag{5}$$

где вспомогательный угол φ_0 определяется равенством

$$\varphi^* = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Такой подход позволяет корректно определять все значения φ из отрезка $[0, 360°]$. Обойтись без учета дополнительных условий в последней из формул (5) невозможно, поскольку диапазон

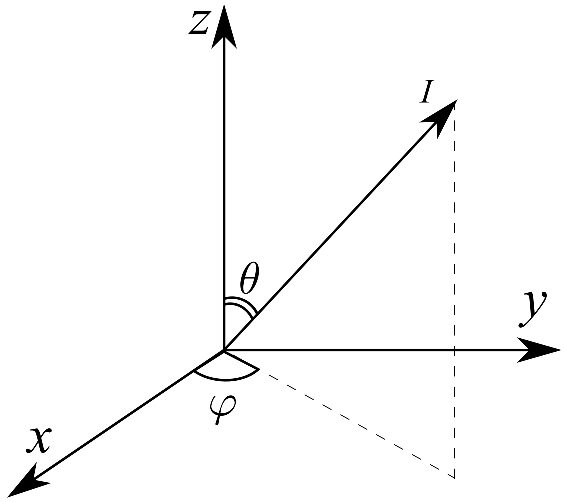

Рис. 3. Сферические координаты

значений любой из функций arcsin, arccos и arctg равен 180°. При $x = y = 0$ можно считать, что и $\varphi = 0°$.

Отметим, что в системе фотометрирования (C, γ) величина C соответствует (после замены на $C + 90°$) углу φ, а γ (после замены на $360° - \gamma$) — углу θ.

Как и в двумерном случае, для сложения сил света, излучаемого ИС, расположенными в одной точке O, собственные системы координат этих ИС требуется совместить с помощью поворотов вокруг O. Указанные преобразования можно задать, например, углами Эйлера [Постников, 2009]. В настоящей работе для совмещения координатных систем применяются последовательные вращения вокруг осей Ox, Oy, Oz на некоторые углы α_x, α_y, α_z.

Пусть базис в пространстве образован векторами $\vec{e}_1 = \{1; 0; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0; 1; 0\}$ и $\vec{e}_3 = \{0; 0; 1\}$. После преобразований они перейдут в другие векторы $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$. Координаты этих «новых» векторов в «старом» базисе содержатся в столбцах *матрицы перехода* M, которая, таким образом, полностью описывает изучаемое преобразование.

Если координаты одного и того же вектора $\vec{r}$ в «старом» и «новом» базисе содержатся в столбцах X и Y, соответственно, то они связаны равенством

$$X = MY. \tag{6}$$

Для поворотов вокруг координатных осей матрицы перехода в декартовой прямоугольной системе координат имеют вид

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & -\sin\alpha_x \\ 0 & \sin\alpha_x & \cos\alpha_x \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y \end{pmatrix},$$
$$M_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha_z & -\sin\alpha_z & 0 \\ \sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Если выполняются все три поворота, то итоговое преобразование описывается матрицей

$$M = M_x M_y M_z. \tag{8}$$

Формулы (6)–(8) справедливы в декартовой прямоугольной системе координат, но силы света различных ИС определяются угловыми координатами в сферической системе. Чтобы совместить оба подхода и рассчитать суммарное светораспределение n разноориентированных источников, расположенных в одной точке, можно действовать по следующему алгоритму:

1. Описать ФТ всех источников света, задав функции $I_k(\Theta, \Phi)$ в собственных системах координат. Здесь $k = \overline{1, n}$ — номер источника, а Θ, Φ — угловые координаты в собственной системе.

2. Выбрать общую систему координат, в которой будет происходить сложение сил света. Далее угловые координаты в общей системе обозначаются через θ, φ.

3. Для каждого ИС описать углы $\alpha_x(k), \alpha_y(k), \alpha_z(k)$, с помощью которых будет происходить совмещение собственной системы с общей, соответствующие им матрицы (7), и найти матрицу перехода $M(k) = M_x(k) \cdot M_y(k) \cdot M_z(k)$.

4. Для всех ИС найти связь между θ, φ и Θ, Φ. С этой целью вводится формальный единичный вектор $\vec{e}$, координаты которого в «новой» (общей) системе заносятся в столбец $Y = \mathrm{colon}(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$. В «старой» (собственной) системе его координаты, занесенные в столбец $X = \mathrm{colon}(x, y, z)$, имеют некоторый другой вид и зависят уже от переменных Θ, Φ. Поскольку $M(k)$ — это матрица перехода от собственной декартовой системы координат к общей, то связь между $X(\Theta, \Phi)$ и $Y(\theta, \varphi)$ устанавливается исходя из формулы (6): $X = M(k)Y$. Вычислив $M(k)Y(\theta, \varphi)$ и найдя x, y, z, можно перейти от декартовых координат к сферическим в собственной системе по формулам (5). Тем самым и будет найдена искомая связь:
$$\Theta = T_k(\theta, \varphi), \Phi = F_k(\theta, \varphi). \tag{9}$$
Для упрощения вычислений в (5) можно сразу положить $I = 1$.

5. С учетом зависимостей (9) искомое светораспределение задается функцией
$$I(\theta, \varphi) = I_1(T_1(\theta, \varphi), F_1(\theta, \varphi)) + \ldots + I_n(T_n(\theta, \varphi), F_n(\theta, \varphi)), \tag{10}$$
что аналогично формуле (1). Как и на плоскости, для корректного сложения сил света функции $I_k(\Theta, \Phi)$ должны быть определены при всех значениях Θ, Φ. Если не выполнено неравенство $I_k(\Theta, \Phi) > 0$, то необходимо считать, что $I_k(\Theta, \Phi) = 0$.

В двумерном случае совмещение собственной и общей координатных систем достигается простой заменой Φ на $\varphi - \varphi_0$, где φ_0 — угол, на который следует повернуть собственную систему. В связи с этим возникает вопрос. Можно ли найти такие углы θ_0 и φ_0, зависящие от α_x, α_y, α_z, что угловые переменные Θ, Φ и θ, φ будут связаны *одними и теми* же соотношениями
$$\varphi = \Phi - \varphi_0, \; \theta = \Theta - \theta_0$$
для любых значений Θ, Φ?

Ответ на этот вопрос отрицателен, что подтверждается простым примером. Рассмотрим два единичных вектора $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ и $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ в собственной декартовой прямоугольной системе координат. Заданные ими направления описываются углами $\Theta_1 = 90^\circ$, $\Phi_1 = 0^\circ$, и $\Theta_2 = 90^\circ$, $\Phi_2 = 90^\circ$. Предположим, что при переходе в собственную систему осуществляется поворот сначала вокруг оси Ox на угол $\alpha_x = 60^\circ$, а затем вокруг оси Oy на угол $\alpha_y = 30^\circ$. Из (6) и (7) вытекает, что векторы после поворотов имеют координаты
$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right\}, \left\{-\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right\},$$

соответственно. Согласно (5), что соответствующие сферические координаты равны,

$$\theta_1 = 120^\circ,\ \varphi_1 = 0^\circ,\ \theta_2 = \arccos\left(-\frac{3}{4}\right),\ \varphi_2 = \arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right).$$

Очевидно, что $\Theta_1 - \theta_1 \neq \Theta_2 - \theta_2$, $\Phi_1 - \varphi_1 \neq \Phi_2 - \varphi_2$. Это значит, что разным наборам Θ, Φ при одних и тех же α_x, α_y, α_z отвечают разные θ_0, φ_0.

Приведем теперь пример использования построенного алгоритма. Пусть ФТ двух источников света являются эллипсоидами с полуосями a, b, c, а точка, в которой находятся оба ИС, располагается на одном из концов полуоси c. Тогда аналогично (2) в собственных системах координат эти ФТ имеют уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-c)^2}{c^2} = 1,$$

что после подстановки (4) дает

$$I = \frac{2a^2b^2c\cos\Theta}{a^2b^2\cos^2\Theta + c^2\sin^2\Theta(a^2\sin^2\Phi + b^2\cos^2\Phi)},\ 0^\circ \leq \Theta \leq 90^\circ.$$

Далее, пусть угол между большими осями эллипсоидов равен 60°. Совмещая общую систему координат с собственной системой первого тела и задав углы $\alpha_x(2) = 60^\circ$, $\alpha_y(2) = \alpha_z(2) = 0^\circ$, сложим ИСС по описанному выше алгоритму. Приведем выражение для функции $T_2(\theta, \varphi)$, задающей зависимость Θ второго ФТ от углов общей сферической системы координат:

$$T_2(\theta, \varphi) = \arccos\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\sin\varphi\right).$$

На рисунке 4 построено суммарное ФТ в случае, когда у обоих ИС $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$. Прямые линии показывают большие оси каждого из эллипсоидов.

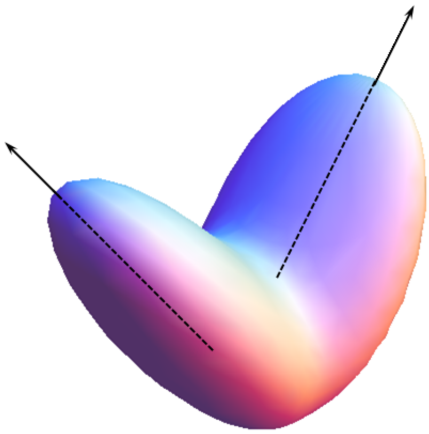

Рис. 4. Светораспределение двух ИС, ФТ которых — равные эллипсоиды

Меняя углы поворота, можно получить совершенно иные суммарные светораспределения при одних и тех же исходных ИСС.

Заключение

Итак, в настоящей работе представлен метод расчета суммарного светораспределения нескольких ИС, расположенных в одной и той же точке, но имеющих различную ориентацию в пространстве. Алгоритм основан на совмещении собственных систем координат различных ИС с помощью поворотов, которые описываются в матричной форме, переходе к общей сферической системе координат и сложении сил света, отвечающих одним и тем же значениям угловых координат.

Метод не имеет ограничений на форму фотометрических тел ИС. Он может быть основой численных алгоритмов расчета суммарного светораспределения в тех случаях, когда ФТ исходных ИС описаны не аналитически, а приближенно — на основе результатов измерений [IESNA LM-63-95].

Список литературы

Ашурков С. Г., Барцев А. А. Метод расчета фотометрического тела излучателей со светодиодами разной пространственной ориентации. — Светотехника, 2007. — № 1. — С. 43–44.

ГОСТ Р 54350-2011. Приборы осветительные. Светотехнические требования и методы испытаний. — Введен 2012-07-01. — М.: Госстандарт России: Изд-во стандартов, 2011. — 70 с.

Постников М. М. Лекции по геометрии. Ч. 1. Аналитическая геометрия : учеб. пособие / М. М. Постников. — 3-е изд., испр. — СПб.: Лань, 2009. — 416 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

Тиходеев П. М. Световые измерения в светотехнике. — М.: ОНТИ, 1936. — 519 с.

IESNA LM-63-95. IESNA Recommended Standard File Format for Electronic Transfer of Photometric Data. — New York: Illuminating Engineering Society of North America, 1995.