**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 4 С. 559–568**

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 531.38

Моделирование полурегулярных прецессий гиростата в случае переменного гиростатического момента

Е. К. Щетинина[a], А. А. Возняк

Донецкий национальный университет экономики и торговли имени Михаила Туган-Барановского,
Украина, 83050, г. Донецк, ул. Щорса, д. 31

E-mail: [a] elena-0607@bk.ru

Получено 08 апреля 2014 г.

На основе уравнений Кирхгофа–Пуассона, описывающих движение гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, выполнено моделирование полурегулярных прецессий первого типа в предположении переменности гироскопического момента. Найдены новые классы рассматриваемых движений гиростата и указаны их аналитические свойства.

Ключевые слова: гиростат, гиростатический момент, полурегулярные прецессии первого типа

Modeling semiregular precessions of gyrostat in the case variable gyrostatic moment

E. K. Shchetinina, A. A. Wozniak

Donetsk National University of Economics and Trade named after Mykhailo Tugan-Baranovsky, 31 Shchorsa str., Donetsk, 83050, Ukraine

Abstract. — Modeling semiregular precessions of the first type assuming the variability of the gyroscopic moment is made on the basis on the Kirchhoff-Poisson’s equations, that describe the motion of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces. New classes of such motions of a gyrostat and their analytic properties are specified.

Keywords: gyrostat, gyrostatic moment, semiregular precession of the first type

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 559–568 (Russian).

Введение

При моделировании движений современных технических конструкций необходимо учитывать свойства управляющих элементов. Модель системы связанных твердых тел, называемая гиростатом, наиболее часто используется в аналитической механике, поскольку она позволяет установить достаточно наглядно уравнения движения, из которых можно получить важные для практических приложений результаты. В обзорных публикациях [Борисов, Мамаев, 2001; Горр, Ковалев, 2013] подробно описана модель гиростата и указаны уравнения его движения в различных силовых полях. Следует подчеркнуть, что наряду с моделью гиростата в технических системах (см., например, [Амелькин, 2011]) используется и модель гиростата в задаче о движении тела с жидким заполнением [Моисеев, Румянцев, 1965]. Изучение движения гиростата в различных силовых полях проводится в двух направлениях. Первое направление характеризуется свойством постоянства гиростатического момента, и поэтому уравнения движения гиростата и под действием силы тяжести, и под действием потенциальных и гироскопических сил допускают три первых интеграла. Это свойство позволило получить значительные результаты в задаче о движении гиростата с неподвижной точкой [Борисов, Мамаев, 2001; Горр, Ковалев, 2013]. Второе направление относится к случаю, когда гиростатический момент зависит от времени. Уравнения движения для этого варианта рассматривались в работах [Liouville, 1858; Жуковский, 1949; Румянцев, 1970; Харламов, 1972]. В силу переменности гиростатического момента эти уравнения в общем случае не допускают интеграла энергии, и поэтому к ним не применимы некоторые классические методы анализа. Несмотря на это в последние годы задача о движении неавтономного гиростата с неподвижной точкой интенсивно изучается. К настоящему времени изучены равномерные вращения, маятниковые и прецессионные движения гиростата под действием силы тяжести [Ковалева, Позднякович, 2000; Волкова, 2009; Волкова, Гашененко, 2009; Волкова, Гашененко, 2011]. В задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом особое значение имеют результаты, посвященные прецессиям гиростата с переменным гиростатическим моментом [Возняк, 2012; Горр, Мазнев, 2010; Мазнев, 2010; Мазнев, 2011; Мазнев, 2012; Мазнев, Котов, 2012], поскольку этот тип движений находит широкое применение при моделировании движений механических систем. В данной работе продолжены исследования [Возняк, 2012], посвященные анализу полурегулярных прецессий гиростата — движений, для которых скорость прецессии постоянна. Получены новые решения уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и изучены их аналитические свойства.

Постановка задачи

Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [Харламов, 1972; Мазнев, 2010] как

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - L(t)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times (B\boldsymbol{\nu} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\lambda}(t) = L(t). \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $A = \left(A_{ij}\right)$ — тензор инерции гиростата [Харламов, 1972]; $L(t)$ — проекция момента сил, действующих со стороны тела-носителя на ось вращения носимого тела; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — единичный вектор направления гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, где $\lambda(t)$ — ограниченная дифференцируемая функция времени t; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ — вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $B = \left(B_{ij}\right)$, $C = \left(C_{ij}\right)$ — постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\lambda(t)$ обозначает производную по времени.

Уравнения (1), (2) имеют два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k — произвольная постоянная.

Рассмотрим полурегулярные прецессии первого типа относительно вектора $\boldsymbol{\nu}$ [Горр, Ковалев, 2013]. Поскольку они характеризуются условиями постоянства угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$ и скорости прецессии, то имеют место соотношения

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$
$$\boldsymbol{\nu} = \left(a_0' \sin\varphi, a_0' \cos\varphi, a_0\right), \quad \left(a_0 = \cos\theta_0,\ a_0' = \sin\theta_0,\ \theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu})\right),$$

где $\boldsymbol{a}$ — единичный вектор, неизменный в теле-носителе ($\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$), m — постоянная. Когда выполнены равенства (4), геометрический интеграл из системы (3) и уравнение Пуассона из (2) становятся тождествами.

При рассмотрении уравнения (1) подставим в него $L(t) = \dot{\lambda}(t)$ и будем исследовать полученное уравнение на инвариантных соотношениях (4), то есть функция $\lambda(t)$ подлежит определению.

В случае, когда $\lambda(t) = \text{const}$, уравнения (1), (2) являются инвариантными относительно замены Тиссерана. Поэтому представляет интерес проверка этого свойства в случае переменного гиростатического момента. Обозначим через $\boldsymbol{\omega}^*(t)$ первое слагаемое векторного равенства для $\boldsymbol{\omega}$ из (4). Тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^*(t) + m\boldsymbol{\nu}. \tag{5}$$

Подставим выражение (5) в векторные уравнения из (1), (2). С помощью несложных преобразований получим

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}}^* = A\boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\omega}^* - \dot{\lambda}(t)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}^* \times (B^*\boldsymbol{\nu} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}) + \boldsymbol{\nu} \times (C^*\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}) - \underline{\lambda(t)\, m\,(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha})}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}^*, \tag{6}$$

где

$$B^* = B + mS\,p(A)\,\delta - 2mA, \quad C^* = C + mB - m^2 A. \tag{7}$$

Из уравнений (6) вытекает, что для уравнений (1), (2) преобразование (5) не является инвариантным. Слагаемое, которое подчеркнуто в первом уравнении (6), иллюстрирует это свойство преобразования (5).

Тем не менее замена Тиссерана (5) позволяет свести задачу изучения полурегулярных прецессий (4) для уравнений (1), (2) к задаче исследования маятниковых движений для уравнений (6), в которых матрицы B^* и C^* имеют вид (7). Это обстоятельство хотя и не позволяет использовать ранее полученные результаты [Волкова, Гашененко, 2009; Мазнев, 2010], но существенно упрощает анализ условий существования прецессий первого типа. Положим в уравнениях (6)

$$\boldsymbol{\omega}^* = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} \tag{8}$$

и рассмотрим скалярные уравнения, которые вытекают из (6) (подвижную систему координат выберем так, чтобы $\alpha_2 = 0$):

$$\alpha_3\dot{\lambda}(t) + A_{33}\ddot{\varphi} - a_0' m\alpha_1\lambda(t)\cos\varphi + C_2'\cos 2\varphi - C_2'\sin\varphi - \kappa_1'\cos\varphi + \kappa_1\sin\varphi = 0, \tag{9}$$

$$\dot{\lambda}(t)\left(a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3\right) + a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}\cos\varphi + (\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0)\ddot{\varphi} + \left(\beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi}-$$
$$-\left(B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi + a_0\gamma_1'\cos\varphi - a_0\gamma_1\sin\varphi\right)\dot{\varphi} = 0, \tag{10}$$

$$a_0'\alpha_1\dot{\lambda}(t)\cos\varphi - a_0'\alpha_1\lambda(t)\dot{\varphi}\sin\varphi + \left(\beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi\right)\ddot{\varphi}-$$
$$-\left(\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi\right)\dot{\varphi} + (B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi+$$
$$+a_0\gamma_1'\sin\varphi - B_0)\dot{\varphi} + a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi+$$
$$+G_0 - a_0'm\lambda(t)\left(a_0\alpha_1\sin\varphi - a_0'\alpha_3\right) = 0. \tag{11}$$

В уравнениях (9)–(11) введены обозначения

$$\begin{gathered}
C_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left(C_{22}^* - C_{11}^*\right), \quad C_2' = a_0'^2 C_{12}^*,\\
\kappa_1 = a_0'\left(s_2 - a_0C_{23}^*\right), \quad \kappa_1' = a_0'\left(s_1 - a_0C_{13}^*\right),\\
\beta_0 = a_0A_{33}, \quad \beta_1 = a_0'A_{23}, \quad \beta_1' = a_0'A_{13},\\
B_2 = \frac{a_0'^2}{2}\left(B_{22}^* - B_{11}^*\right), \quad B_2' = a_0'^2 B_{12}^*,\\
\gamma_0 = a_0B_{33}^*, \quad \gamma_1 = a_0'B_{23}^*, \quad \gamma_1' = a_0'B_{13}^*, \quad B_0 = -\frac{a_0'^2}{2}\left(B_{11}^* + B_{22}^*\right),\\
\delta_1 = a_0'\left[\left(2a_0^2 - 1\right)C_{23}^* - a_0s_2\right], \quad \delta_1' = a_0'\left[\left(2a_0^2 - 1\right)C_{13}^* - a_0s_1\right],\\
G_0 = \frac{a_0'^2}{2}\left[2s_3 + a_0\left(C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{33}^*\right)\right].
\end{gathered} \tag{12}$$

На основании формулы для ω из (4), обозначений (12) интеграл моментов из (3) примет вид

$$\lambda(t) = \frac{1}{a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0\alpha_3}\Big[\frac{1}{2}B_2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi+$$
$$+a_0\gamma_1'\sin\varphi + k_0 - \left(\beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0\right)\dot{\varphi}\Big], \tag{13}$$

$$k_0 = k - \frac{1}{2}m\left(A_{11} + A_{22} + A_{33}\right) + \frac{1}{4}\left[2a_0^2B_{33}^* + a_0'^2\left(B_{11}^* + B_{22}^*\right)\right]. \tag{14}$$

Следовательно, задача об исследовании условий существования прецессий первого типа (4) для уравнений (1), (2) сведена к изучению решения уравнений (9)–(11) с интегралом (13).

Редукция системы (9)–(11)

Поскольку в статье [Возняк, 2012] рассмотрен особый случай $\alpha_1 = 0$, $a_0 = 0$, при котором формула (13) теряет смысл, то в дальнейшем считаем $a_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$.

При исследовании системы (9)–(11) отметим, что интеграл (13) является следствием уравнения (10). Поэтому в ряде случаев вместо уравнения (10) удобно принять функцию (13), в выражении которой введено обозначение (14).

Пусть

$$
\begin{aligned}
&M_1(\varphi) = a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0\alpha_3, \quad N_1(\varphi) = \beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi + \beta_0,\\
&Q_1(\varphi) = \left(a_0'\alpha_1\beta_0 - a_0\alpha_3\beta_1'\right)\cos\varphi + a_0\alpha_3\beta_1\sin\varphi + a_0'\alpha_1\beta_1,\\
&S_1(\varphi) = \beta_1'\cos\varphi - \beta_1\sin\varphi, \quad R_1(\varphi) = \beta_1\cos\varphi + \beta_1'\sin\varphi,\\
&P_1(\varphi) = a_0\alpha_1\sin\varphi - a_0'\alpha_3,\\
&M_2(\varphi) = \frac{1}{2}B_2\cos 2\varphi + \frac{1}{2}B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + a_0\gamma_1'\sin\varphi + k_0,\\
&N_2(\varphi) = B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0\gamma_1\cos\varphi + a_0\gamma_1'\sin\varphi - B_0,\\
&L_2(\varphi) = C_2'\cos 2\varphi - C_2\sin 2\varphi - \kappa_1'\cos\varphi + \kappa_1\sin\varphi,\\
&Q_2(\varphi) = a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1\cos\varphi + \delta_1'\sin\varphi + G_0,\\
&M_3(\varphi) = \frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2\cos 3\varphi + \frac{1}{4}a_0'\alpha_1B_2'\sin 3\varphi + a_0\alpha_3B_2'\cos 2\varphi - a_0\alpha_3B_2\sin 2\varphi +\\
&+\left(a_0^2\alpha_3\gamma_1' - \frac{3}{4}a_0'\alpha_1B_2 - a_0'\alpha_1k_0\right)\cos\varphi - \left(a_0^2\alpha_3\gamma_1 + \frac{3}{4}a_0'\alpha_1B_2'\right)\sin\varphi - a_0a_0'\alpha_1\gamma_1.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

На основании соотношения (13) найдем

$$
\begin{aligned}
&\lambda(t) = \frac{1}{M_1(\varphi)}\left(M_2(\varphi) - N_1(\varphi)\dot\varphi\right),\\
&\dot\lambda(t) = \frac{1}{M_1^2(\varphi)}\left(Q_1(\varphi)\dot\varphi^2 + M_3(\varphi)\dot\varphi - M_1(\varphi)N_1(\varphi)\ddot\varphi\right),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $N_i(\varphi)$, $M_i(\varphi)$ имеют значения (15).

Подставим функции (16) в уравнения (9), (11)

$$
\begin{aligned}
M_1(\varphi)\left(A_{33}M_1(\varphi) - \alpha_3N_1(\varphi)\right)\ddot\varphi + \alpha_3Q_1(\varphi)\dot\varphi^2 + \left(\alpha_3M_3(\varphi) + a_0'm\alpha_1M_1(\varphi)N_1(\varphi)\cos\varphi\right)\dot\varphi +\\
+M_1(\varphi)\left(L_2(\varphi)M_1(\varphi) - a_0'm\alpha_1M_2(\varphi)\cos\varphi\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
&M_1(\varphi)\left(S_1'(\varphi)M_1(\varphi) - a_0'\alpha_1N_1(\varphi)\right)\ddot\varphi +\\
&+\left(a_0'\alpha_1Q_1(\varphi)\cos\varphi + a_0'\alpha_1M_1(\varphi)N_1(\varphi)\sin\varphi - M_1^2(\varphi)R_1(\varphi)\right)\dot\varphi^2 +\\
&+\left(a_0'\alpha_1M_3(\varphi)\cos\varphi - a_0'\alpha_1M_1(\varphi)M_2(\varphi)\sin\varphi + M_1^2(\varphi)N_2(\varphi) +\right.\\
&\left.+\,a_0'mM_1(\varphi)N_1(\varphi)P_1(\varphi)\right)\dot\varphi + M_1(\varphi)\left(M_1(\varphi)Q_2(\varphi) - a_0'mM_2(\varphi)P_1(\varphi)\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Следовательно, изучение условий существования прецессий гиростата (4) для уравнений (1), (2) сведено к изучению решения уравнений (17), (18).

Первое решение для прецессии (4)

В общем случае нахождение общего решения уравнений (17), (18) достаточно сложная задача. Поэтому представляет интерес на первом этапе получение некоторых частных случаев существования таких решений. Например, в статье [Возняк, 2012] при рассмотрении случая $\alpha_1 = 0$ предполагается, что одно из уравнений системы (17), (18) является тождеством для любых значений $\dot\varphi$ и φ. Здесь рассмотрим случай, когда $\alpha_1 \neq 0$ и уравнение (17) — тождество по указанным переменным ($\dot{\varphi}$ и φ). Тогда в силу (7), (15) получим условия

$$\begin{gathered}
A_{23} = 0, \quad \alpha_3 A_{13} - \alpha_1 A_{33} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad s_2 = a_0 C_{23}, \\
B_{12} = 2mA_{12}, \quad C_{12} = -m^2 A_{12}, \\
\alpha_3^2 \left[B_{22} - B_{11} + 2m\left(A_{11} - A_{22}\right)\right] = 2m\alpha_1^2 A_{33}, \\
\alpha_3^2 \left[C_{22} - C_{11} + m\left(B_{22} - B_{11}\right) - m^2\left(A_{22} - A_{11}\right)\right] = m^2 \alpha_1^2 A_{33}, \\
k_0 = \frac{a_0^2 \alpha_3}{\alpha_1}\left(B_{13} - A_{13}\right) - \frac{a_0'^2 \alpha_1^2}{2\alpha_3^2} m A_{33}.
\end{gathered} \tag{19}$$

В силу того, что вектор $\boldsymbol{\alpha}$ является единичным вектором, из второго равенства системы и условия $\alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1$ получим

$$\alpha_1 = \frac{A_{13}}{\sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}}, \quad \alpha_3 = \frac{A_{33}}{\sqrt{A_{13}^2 + A_{33}^2}}. \tag{20}$$

Таким образом компоненты (20) зависят только от тензора инерции.

Условия (19) позволяют рассмотреть не только частный случай $A_{12} = 0$, при котором $B_{12} = 0$, $C_{12} = 0$, но и общий случай $A_{12} \neq 0$. Для него из пятого и шестого равенств системы (19) вытекает

$$m = \frac{B_{12}}{2A_{12}}, \quad 4A_{12}C_{12} + B_{12}^2 = 0,$$

а остальные равенства остаются без изменений.

Рассмотрим уравнение (18) при наличии соотношений (19). Полагая $\alpha_3^2 B_{22}^* - mA_{33} \neq 0$, из (18) получим

$$\dot{\varphi} = \mu_1 \sin\varphi + \mu_0, \tag{21}$$

где

$$\mu_1 = \frac{a_0' \alpha_3^2 \left(C_{13} + mB_{13}\right)}{\alpha_3^2 B_{22}^* - mA_{33}}, \quad \mu_0 = \frac{\alpha_3^2 \left[\alpha_3\left(s_1 - a_0 C_{13}^*\right) - s_3\alpha_1 + a_0\alpha_1\left(C_{33}^* - C_{22}^*\right)\right]}{\alpha_3^2 B_{22}^* - mA_{33}}, \tag{22}$$

где в силу (7)

$$B_{22}^* = B_{22} + m\left(A_{11} - A_{22} + A_{33}\right), \quad C_{22}^* = C_{22} + mB_{22} - m^2 A_{22}, \quad C_{33}^* = C_{33} + mB_{33} - m^2 A_{33}.$$

Используя условия (19) и обозначения (15), из первой формулы системы (16) найдем

$$\lambda(t) = \sigma_1 \sin\varphi + \sigma_0 - \frac{A_{33}}{\alpha_3}\dot{\varphi}, \tag{23}$$

где

$$\sigma_1 = -\frac{a_0' \alpha_1 m}{\alpha_3^2} A_{33}, \quad \sigma_0 = \frac{a_0}{m\alpha_1}\left(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13}\right). \tag{24}$$

В силу соотношений (21)–(24) из формулы (23) вытекает, что функция $\lambda(t)$ не может вырождаться в постоянную. Итак, решение (21), (23) уравнений (17), (18) существует при выполнении условий (19). Для нахождения первоначальных переменных $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ необходимо обратится к формулам (4) и учесть в них зависимости $\varphi(t)$, $\lambda(t)$, вытекающие из (21), (23). Очевидно, что $\varphi(t)$ и $\lambda(t)$ являются элементарными функциями времени и их нахождение не представляется сложным.

Второе решение

Рассмотрим случай $\alpha_1 = 0$, $a_0 \neq 0$. Предполагаем, что ни одно из уравнений (17) и (18) не обращается в тождество. Выбором системы координат можно добиться выполнения условия $\beta_1 = 0$, т. е. равенства $A_{23} = 0$. Тогда рассматривая линейные комбинации уравнений (17), (18) получим

$$a_0\beta_1'\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}R_2(\varphi) + R_3(\varphi), \tag{25}$$

$$a_0\beta_1'\dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}P_2(\varphi) + P_3(\varphi), \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} R_3(\varphi) &= -n_3\cos 3\varphi - m_3\sin 3\varphi + n_2\cos 2\varphi + m_2\sin 2\varphi - n_1\cos\varphi - m_1\sin\varphi + n_0,\\ P_3(\varphi) &= n_3\sin 3\varphi - m_3\cos 3\varphi - n_2\sin 2\varphi + m_2\cos 2\varphi - p_1\sin\varphi + m_1\cos\varphi - p_0, \end{aligned} \tag{27}$$

$$R_2(\varphi) = q_2\sin 2\varphi - q_1\sin\varphi + q_1'\cos\varphi + q_0, \quad P_2(\varphi) = q_2\cos 2\varphi + q_1\cos\varphi - p_1'\sin\varphi + p_0'. \tag{28}$$

В равенстве (27), (28) введены обозначения

$$\begin{aligned} & n_3 = \frac{1}{4}a_0'^2 mB_2, \quad m_3 = \frac{1}{4}a_0'^2 mB_2', \quad n_2 = \frac{1}{2}a_0a_0'^3\left(C_{23} + m^2A_{23}\right),\\ & m_2 = \frac{1}{2}a_0a_0'^3\left(C_{13} + m^2A_{13}\right),\\ & n_1 = \frac{1}{4}\left(4a_0^2C_2 + a_0'^2 mB_2 + 4a_0G_0 + 4a_0'^2k_0m\right),\\ & m_1 = \frac{1}{4}\left(4a_0^2C_2' + a_0'^2 mB_2'\right),\\ & n_0 = \frac{1}{2}a_0a_0'\left[2a_0s_2 + \left(1 - 3a_0^2\right)C_{23}^* - a_0'^2 mB_{23}^*\right],\\ & p_1 = \frac{1}{4}\left(4a_0^2C_2 + a_0'^2 mB_2 - 4a_0G_0 - 4a_0'^2k_0m\right),\\ & p_0 = \frac{1}{2}a_0a_0'\left[2a_0s_1 + \left(1 - 3a_0^2\right)\left(C_{13}^* - a_0'^2 mB_{13}^*\right)\right], \quad q_2 = \frac{1}{2}a_0'^2 m\beta_1',\\ & q_1 = a_0B_2', \quad q_1' = a_0a_0'^2\left(mA_{33} - B_{22}^*\right), \quad q_0 = -a_0^2\gamma_1,\\ & p_1' = a_0a_0'^2\left(mA_{33} - B_{22}^*\right), \quad p_0' = \frac{1}{2}\left(2a_0^2\gamma_1' - a_0'^2 m\beta_1'\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Из уравнения (26) вытекает

$$\dot{\varphi} = \frac{P_2(\varphi) \pm \sqrt{P_2^2(\varphi) - 4a_0\beta_1'P_3(\varphi)}}{2a_0\beta_1'}. \tag{30}$$

Второе значение $\dot{\varphi}$ получим, дифференцируя по времени обе части равенства (26) и исключая в итоговом уравнении $\ddot{\varphi}$ с помощью уравнения (25),

$$\dot{\varphi} = \frac{n_3\cos 5\varphi + m_3\sin 5\varphi + \ldots}{q_2\sin 4\varphi + \ldots},$$

где многоточием обозначены члены, содержащие тригонометрические функции меньшего аргумента, чем первые слагаемые. Так как $\beta_1' \neq 0$, то из последнего равенства и равенства (30) следует, что функция $\dot{\varphi}$ имеет вид

$$\dot{\varphi} = \varepsilon_1\sin\varphi + \varepsilon_0. \tag{31}$$

Подставим выражение (31) в уравнения (25), (26). Учитывая функции (27), (28) и обозначения (29), потребуем, чтобы полученные равенства были тождествами по φ. Тогда найдем следующие условия:

$$\begin{gathered}
A_{23} = 0, \quad B_{23} = 0, \quad C_{23} = 0, \quad s_2 = 0,\\
B_{12} - 2mA_{12} = 0, \quad C_{12} + m^2 A_{12} = 0,\\
8mA_{13}^2 \left[C_{22} - C_{11} + m^2 (A_{22} - A_{11})\right] + \left[B_{22} - B_{11} - 2m (A_{22} - A_{11})\right] \times\\
\times \left[B_{22}^2 - B_{11}^2 + 4A_{13} \left(C_{13} + m^2 A_{13}\right) - 2m (A_{22} - A_{11}) (B_{11} + B_{22})\right] = 0,\\
4a_0 A_{13} \left[C_{22} - C_{11} + m^2 (A_{22} - A_{11})\right]^2 - 2a_0 (B_{13} - 2mA_{13}) \times\\
\times \left[B_{22} - B_{11} - 2m (A_{22} - A_{11})\right] \left[C_{22} - C_{11} + m^2 (A_{22} - A_{11})\right] +\\
+ \left[s_1 - a_0 \left(C_{13} + mB_{13} - m^2 A_{13}\right)\right] \left[B_{22} - B_{11} - 2m (A_{22} - A_{11})\right]^2 = 0,\\
k_0 = \frac{1}{a_0'^2 m} \left(\varepsilon_0 q_1' - a_0 \beta_1' \varepsilon_0 \varepsilon_1 - n_3 - a_0^2 C_2 - \frac{1}{4} a_0'^2 m B_2 - a_0 G_0\right).
\end{gathered} \tag{32}$$

Используя формулы для $\dot{\varphi}$ из (31), $\lambda (t)$ из первого равенства системы (16), в силу (32) получим решение уравнений (17), (18)

$$\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0, \qquad \lambda (t) = \lambda_1 \sin\varphi + \lambda_0, \tag{33}$$

где

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{a_0'}{A_{13}} \left[B_{11} - B_{22} + 2m(A_{22} - A_{11})\right], \quad \varepsilon_0 = \frac{2a_0 \left[C_{22} - C_{11} + m^2 (A_{11} - A_{22})\right]}{B_{22} - B_{11} - 2m (A_{22} - A_{11})},\\
\lambda_1 = \frac{1}{a_0' B_2} \left(a_0'^2 A_{13} B_{13} B_2 + A_{33} B_2^2 - 2a_0'^2 A_{13}^2 C_2\right), \quad \lambda_0 = \frac{1}{2a_0} (B_2 + 2k_0 - 2a_0 \varepsilon_0 A_{33}),\\
B_2 = \frac{a_0'^2}{2} \left[B_{22} - B_{11} - 2m (A_{22} - A_{11})\right], \quad C_2 = \frac{a_0'^2}{2} \left[C_{22} - C_{11} + m^2 (A_{22} - A_{11})\right].
\end{gathered} \tag{34}$$

Следовательно, при $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$, $a_0 \neq 0$ уравнения (17), (18) имеют решение $\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0$, то есть $\varphi (t)$ является элементарной функцией времени. Например, при $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2 > 0$ она такова:

$$\varphi (t) = \arcsin \frac{\varepsilon_0 \left[\varepsilon_1 (\cos\upsilon - 1) + \kappa_0 \sin\upsilon\right]}{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1 (\cos\upsilon - 1) + \kappa_0 \sin\upsilon}, \quad \left(\kappa_0 = \sqrt{\varepsilon_0^2 - \varepsilon_1^2},\ \upsilon = \kappa_0 t\right). \tag{35}$$

Зависимость $\lambda (t)$ найдем подстановкой (35) во второе выражение из системы (33). Функции $\omega_i = \omega_i (t)$, $\nu_i = \nu_i (t)$ определим из (4):

$$\begin{aligned}
&\nu_1 = a_0' \sin\varphi (t), \quad \nu_2 = a_0' \cos\varphi (t), \quad \nu_3 = a_0,\\
&\omega_1 = a_0' m \sin\varphi (t), \quad \omega_2 = a_0' m \cos\varphi (t),\\
&\omega_3 = \varepsilon_1 \sin\varphi (t) + (\varepsilon_0 + a_0 m).
\end{aligned} \tag{36}$$

Построенное решение (33), (36) уравнений (1), (2) существует при выполнении условий $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$ и равенств (32), (34).

Особый интерес представляет вариант построенного решения в случае, когда гиростат совершает прецессию (4) под действием силы тяжести, т. е. в случае $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$. Тогда из (32)–(34) имеем

$$\dot{\varphi} = \varepsilon_1 \sin\varphi + \varepsilon_0, \quad \lambda (t) = \lambda_1 \sin\varphi + \lambda_0, \tag{37}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{a_0' m}{A_{13}} (A_{22} - A_{11}), \quad \varepsilon_0 = -a_0 m,$$
$$\lambda_1 = \frac{a_0' m}{A_{13}} \left[(A_{11} - A_{22}) A_{33} - A_{13}^2 \right], \quad \lambda_0 = \frac{1}{m} \left(a_0 m^2 A_{22} - s_3 \right). \tag{38}$$

Решение (37), (38) имеет место при выполнении условий

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad A_{23} = 0, \quad A_{12} = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_1 = 0. \tag{39}$$

Отметим характерные свойства решения (37), (38). Во-первых, в силу первых трех равенств единичный вектор гиростатического момента $\boldsymbol{\alpha}$ сонаправлен с вектором $\boldsymbol{a}$, который образует постоянный угол с вертикалью. Во-вторых, такому же свойству удовлетворяет и вектор $\boldsymbol{s}$. В-третьих, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{s}$ лежат в главной плоскости эллипсоида инерции, построенного для неподвижной точки.

Так как скорость собственного вращения гиростата линейно зависит от синуса угла этого вращения, то $\varphi(t)$ является элементарной функцией времени. В силу формул (36) и второй формулы из (37) основные переменные задачи (1), (2) являются элементарными функциями времени. Если гиростат по распределению масс удовлетворяет условию Гриоли ($A_{22} = A_{11}$), то прецессия становится регулярной прецессией. Если гиростат по распределению масс удовлетворяет условию Гесса $\left(A_{13}^2 = (A_{11} - A_{22}) A_{33}\right)$, то гиростатический момент будет постоянным. Естественно оба эти варианта мы исключаем из рассмотрения. Нетрудно убедиться в том, что для решения (37), (38) не может выполняться условие $a_0^2 = \frac{a_0'^2}{A_{13}^2} (A_{22} - A_{11})^2 + 1$, то есть прецессия гиростата не может быть прецессионно-изоконическим движением [Горр, Ковалев, 2013].

Для решения (33)–(34) вектор гиростатического момента направлен по вектору $\boldsymbol{a}$, но вектор $\boldsymbol{s}$ может быть не коллинеарным вектору $\boldsymbol{a}$. Однако прецессия (36) с функциями (33), которые получены при условиях (32), может описывать изоконическое движение [Горр, Ковалев, 2013], так как для величин ε_1, ε_0 из (34) может выполняться условие изоконичности $\varepsilon_0^2 = m^2 + \varepsilon_1^2$. При этом подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости.

Выводы

В статье построены два решения уравнений класса Кирхгофа–Пуассона в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом, которые описывают полурегулярные прецессии гиростата относительно вертикальной оси.

Авторы выражают благодарность Г. В. Горру за помощь в постановке задачи и внимание к работе.

Список литературы

Амелькин Н. И. О свойствах стационарных движений тела, несущего систему двухстепенных силовых гироскопов // Прикл. математика и механика. — 2011. — Т. 75, Вып. 3. — С. 355–369.

Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 384 с.

Возняк А. А. Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Труды ИПММ НАН Украины. — 2012. — Т. 24. — С. 45–57.

Волкова О. С. Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ИПММ НАН Украины. — 2009. — Т. 19. — С. 30–35.

Волкова О. С., Гашененко И. Н. Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. — 2009. — Вып. 39. — С. 42–49.

Волкова О. С., Гашененко И. Н. Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Современные проблемы математики, механики и информатики, Кизилова Н. Н., Жолткевич Г. Н. (ред.). — Харьков: Изд-во: «Апостроф», 2011. — С. 74–84.

Горр Г. В., Ковалев А. М. Движение гиростата. — Киев: Наук. думка, 2013. — 408 с.

Горр Г. В., Мазнев А. В. О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Труды ИПММ НАН Украины. — 2010. — Т. 21. — С. 64–75.

Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. — Собр. соч. Т. 1. — М., 1949. — С. 31–152.

Ковалева Л. М., Позднякович А. Е. Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. — 2000. — Вып. 30. — С. 100–105.

Мазнев А. В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. — 2010. — Вып. 40. — С. 91–104.

Мазнев А. В. Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Доклады НАН Украины. — 2011. — № 8. — С. 66–72.

Мазнев А. В. Один случай прецессии общего вида гиростата с переменным гиростатическим моментом // Доклады НАН Украины. — 2012. — № 3. — С. 72–77.

Мазнев А. В., Котов Г. А. Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А: Природничі науки. — 2012. — Вип. 1. — С. 79–83.

Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Изд-во: Наука, 1965. — С. 68–125.

Румянцев В. В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестник Моск. ун-та. Математика, механика. — 1970. — № 2. — С. 83–96.

Харламов П. В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. — 1972. — Вып. 4. — С. 52–73.

Liouville J. Developpement sur un chapitre de la Me canique de Poisson // J. math. pures et appl. — 1858. — Vol. 3. — P. 1–25.