

УДК: 519.6

Построение математической модели дорожного перекрестка на основе гидродинамического подхода

Я. А. Холодов^а, А. Е. Алексеенко, М. О. Васильев, А. С. Холодов

Московский физико-технический институт,
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^аkholodov@crec.mipt.ru

Получено 22 июля 2014 г.,
после доработки 08 августа 2014 г.

Целью данной работы является построение макроскопической гидродинамической модели, описывающей автомобильное движение на автодорожном перекрестке и учитывающей как распределение светофорных фаз, так и существующую дорожную разметку на перекрестке.

Ключевые слова: автомобильное движение, гиперболические системы уравнений, транспортные потоки, феноменологические модели, светофорные фазы, дорожная разметка

Developing the mathematical model of road junction by the hydrodynamic approach

Y. A. Kholodov, A. E. Alekseenko, M. O. Vasiliev, A. S. Kholodov

Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudnyi, Moscow region, Russia, 141700

Abstract. — The purpose of this paper is to develop a macroscopic hydrodynamic model describing the vehicular traffic on a road junction and taking into account the distribution of traffic light phases and the existing road markings.

Keywords: vehicular traffic, the state equation, hyperbolic equation systems, traffic flows, phenomenological models, red light phases, road markings

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 503–522 (Russian).

Работа поддержана грантами РФФИ: 13-07-12149 и 14-01-0060914.

Введение

В данной работе исследуется проблема построения математической модели автомобильного движения на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации. При этом нами будет использоваться макроскопический подход, когда транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений (для плотности и скорости потока) [Payne, 1971; Уизем, 1977]. Эта система замыкается уравнением состояния (зависимость давления от плотности), получаемым эмпирическим образом для данного участка транспортной сети. На данный момент нет общепринятого подхода, описывающего поведение движения автотранспорта на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации. В литературе встречаются различные попытки решения проблемы при помощи макроскопических одномерных гиперболических систем уравнений гидродинамического типа, но все они реализуют упрощенное представление данной задачи — без учета реальной топологии перекрестка и времени работы фаз светофорной сигнализации [Coclite, Piccoli, 2005; Garavello, Piccoli, 2006; Haut, Bastin, 2007; Costeseque, Lebacque, 2012; Garavello, Piccoli, 2013].

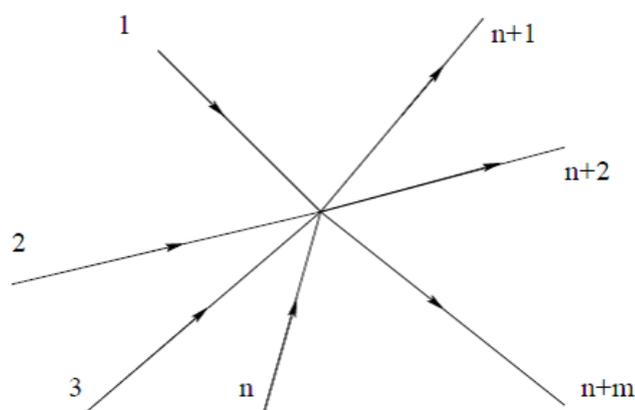


Рис. 1. Пример перекрестка, представляемого в виде произвольной узловой точки графа транспортной сети с n входящими и m выходящими из него ребрами (автодорогами)

В этих работах перекресток обычно представляется в виде произвольной узловой точки графа транспортной сети, в которую входит и из которой выходит некоторое количество однонаправленных ребер (дорог), рис. 1. При этом особенности организации движения по полосам на перекрестке, так же как и учет светофорной сигнализации, не рассматривается. Как правило, авторами ищется решение обобщенной задачи Римана для заданной топологии узла на основе одномерных гиперболических систем уравнений, описывающих автомобильное движение в форме дифференциальных законов сохранения (изменения) массы и импульса на автодорогах, примыкающих к нему. Проблема заключается в том, что решение задачи Римана в такой постановке не является единственным, и поэтому исследователям приходится налагать дополнительные ограничения на область возможных решений для получения «оптимального».

В нашей предыдущей работе [Холодов *и др.*, 2010], мы пытались обойти проблему неединственности решения системы уравнений, возникающей в узле графа транспортной сети, путем ввода дополнительной искомой величины — «давления» узла, помимо значений плотностей и скоростей транспортных потоков в окончаниях входящих в узел и выходящих из него ребер. Система уравнений в узле формировалась из условий совместности для одномерных гиперболических систем уравнений, используемых на примыкающих к узлу ребрах, записанных вдоль идущих от окончания ребра к узлу характеристик. Получаемая система уравнений в такой постановке всегда недоопределена, и чтобы избежать этого, мы доопределяли ее путем добавления в систему закона сохранения автомобильного потока в узле и необходимого количества граничных условий. Получившаяся нелинейная система уравнений в узле решалась

численно с помощью какого-либо итерационного метода. Нелинейность полученной таким образом системы уравнений в узле сохраняла возможность того, что итерационный процесс решения данной системы на каком-нибудь из временных шагов не сойдется, и, когда это случилось, приходилось придумывать различные вычислительные уловки, чтобы не останавливать расчет. Также стоит отметить, что данная постановка в узле не учитывала реального распределения транспортных потоков по направлениям на перекрестке и временные интервалы фаз светофорной сигнализации.

Для устранения этих недостатков нами была разработана новая макроскопическая гидродинамическая модель, описывающая автомобильное движение на перекрестке и корректно учитывающая как распределение светофорных фаз, так и существующую дорожную разметку. Описанию данной модели и результатов ее работы посвящена данная статья.

Система уравнений на автодороге

Для макромоделирования автомобильного движения используются различные математические модели, в том числе основанные на дифференциальных уравнениях в частных производных, в частности, гидродинамические модели, аналогичные уравнениям течения сжимаемой многокомпонентной жидкости с мотивацией.

Нами рассматривается математическая модель интенсивного уличного движения в мегаполисе, основанная на решении соответствующих краевых задач для уравнений в частных производных гиперболического типа. За основу берется гидродинамическая модель, являющаяся обобщением модели Пэйна-Уизема [Payne, 1971; Уизем, 1977] на случай произвольного уравнения состояния — зависимости давления от плотности транспортного потока, замыкающего систему уравнений, записанную в дивергентной форме.

Гиперболическая система уравнений, описывающая автомобильное движение, представляет собой дифференциальные законы сохранения (изменения) массы и импульса на автодорогах (по аналогии с гидродинамикой), записанные в дивергентной форме:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \partial(\rho v) / \partial x = f_0, \\ \partial(\rho v) / \partial t + \partial(\rho v^2 + P(\rho)) / \partial x = f_1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ρ — плотность транспортного потока, v — его скорость и

$$P = P(\rho) \quad (2)$$

есть замыкающее систему (1) уравнение состояния (зависимость давления от плотности), f_0 — возможные источники или стоки «массы» (въезжающие на примыкающую дорогу или съезжающие с нее автомобили, автомобили, меняющие полосу движения, и т. п.), f_1 — импульс сил, действующих на систему (1). Термин «давление транспортного потока» $P = P(\rho)$ впервые появился в работе А. Эйва и М. Раскла [Aw, Rascl, 2000] и использовался ими для замыкания системы уравнений аналогичной (1). Для замыкания системы уравнений (1) в виде (2) он был введен в использование впервые в работе [Kholodov, Kholodov, 2004].

Проблема построения адекватного действительности уравнения состояния $P = P(\rho)$ для системы (1) из экспериментально наблюдаемого вида фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$ — зависимости интенсивности транспортного потока от его плотности подробно рассматривалась нами в работах [Холодов и др., 2010] и [Морозов и др., 2011]. Исследовалась задача — получить для произвольного вида фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$ аналог уравнения состояния (зависимость давления от плотности) для заданной автодороги $P = P(\rho)$ и использовать его для решения системы (1). В результате ее решения было получено соотношение, связывающее производную давления $\partial P(\rho) / \partial \rho$, аналог скорости звука транспортного потока $c(\rho)$,

сам поток $Q(\rho)$ и его плотность ρ , в виде

$$\partial P(\rho) / \partial \rho = c^2(\rho) = (Q(\rho) / \rho - \partial Q(\rho) / \partial \rho)^2 = (v(\rho) - \partial Q(\rho) / \partial \rho)^2. \quad (3)$$

Интегрируя (3), можно найти функцию $P(\rho)$ по известной функции $Q(\rho)$, если она получена для соответствующей фундаментальной диаграммы:

$$P(\rho) = \int_0^\rho \left(\frac{\partial P(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right) d\tilde{\rho} = \int_0^\rho \left(\frac{Q(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}} - \frac{\partial Q(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho} = \int_0^\rho \left(v(\tilde{\rho}) - \frac{\partial Q(\tilde{\rho})}{\partial \tilde{\rho}} \right)^2 d\tilde{\rho}. \quad (4)$$

В общем случае вид фундаментальной диаграммы $Q(\rho)$, получаемой из экспериментальных данных, может быть весьма различным. Зависимость $Q(\rho)$, получаемую из значений интенсивности потока, которые лежат на кривой, огибающей все возможные наблюдаемые значения потока $Q(\rho)$ на фундаментальной диаграмме (рис. 2), стоит использовать для получения уравнения равновесной или «желаемой» скорости $\tilde{V}(\rho) = Q(\rho) / \rho$, которая обычно входит в правую часть закона сохранения (изменения) импульса в системе (1):

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 + P(\rho))}{\partial x} = \frac{\rho}{T} (\tilde{V}(\rho) - v) \quad (5)$$

здесь $T \approx 1-5$ (сек.) — время релаксации. Вид правой части в уравнении (5) обусловлен стремлением основной массы водителей двигаться с равновесной или «желаемой» скоростью, что приводит в итоге к затуханию локальных возмущений в динамике транспортного потока на дороге.

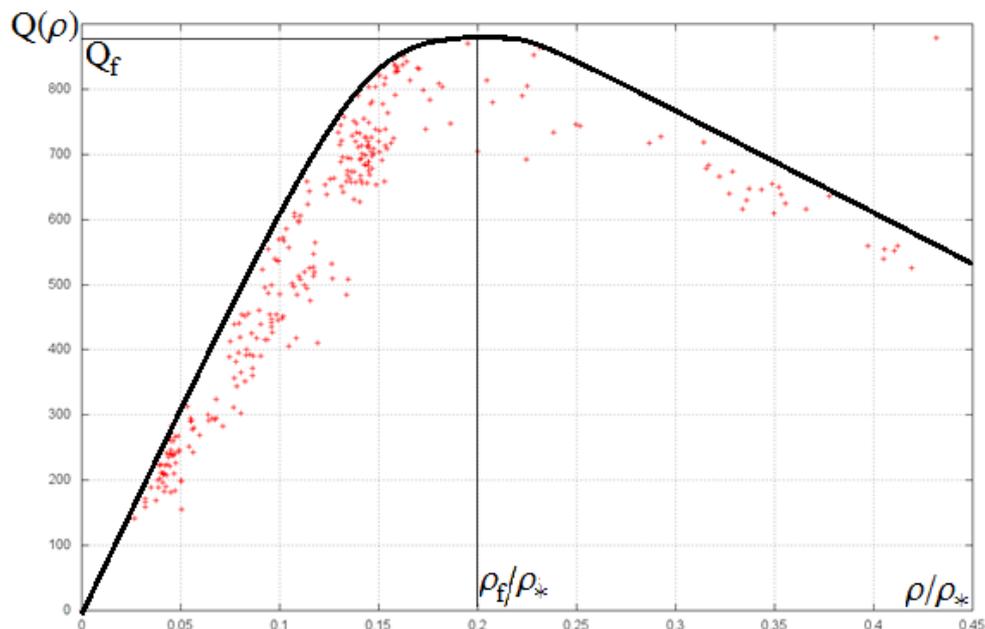


Рис. 2. Пример фундаментальной диаграммы для двухполосного участка автострады I-80 в районе залива Сан-Франциско: зависимость интенсивности транспортного потока $Q(\rho)$ [АТС/10 мин.] от плотности, нормированной по максимальному значению — ρ_* , построенной в предположении, что транспортный поток непрерывно движется с «желаемой» скоростью — $\tilde{V}(\rho)$

Для фундаментальной диаграммы, представленной на рисунке 2, зависимости интенсивности $Q(\rho)$ и скорости $v(\rho) = Q(\rho)/\rho$ транспортного потока от его плотности выбирались следующим эмпирическим образом:

$$\begin{cases} Q(\rho) = \rho(Q_f / \rho_f + c_f(1 - \rho / \rho_f)), & \rho \leq \rho_f, \\ Q(\rho) = c_*(\rho_* - \rho), & \rho > \rho_f, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} v(\rho) = Q(\rho)/\rho = v_f + c_f(1 - \rho / \rho_f), & \rho \leq \rho_f, \\ v(\rho) = Q(\rho)/\rho = c_*(\rho_* / \rho - 1), & \rho > \rho_f. \end{cases}$$

Здесь ρ_f — критическая плотность, при которой достигается максимальное наблюдаемое значение интенсивности транспортного потока для данной дороги, $c_f = (\partial Q(\rho) / \partial \rho)_{\rho=0} - Q_f / \rho_f = v(0) - v_f$ — аналог скорости звука при критической плотности, ρ_* — предельно допустимая плотность потока автомобилей (пропускная способность дороги), соответственно c_* — аналог скорости звука при этой плотности. Скорость свободного движения потока автомобилей $v_0 = v(0) = (\partial Q(\rho) / \partial \rho)_{\rho=0}$ определяется правилами дорожного движения, техническими характеристиками автомобилей и стилем вождения участников дорожного движения. Для $Q(\rho)$ на рисунке 2 получились следующие значения параметров:

$$\begin{cases} \rho_f = 0.08 \text{ [АТС/м]}, Q_f = 1.47 \text{ [АТС/с]}, c_f = 16 \text{ [м/с]}, \\ \rho_* = 0.4 \text{ [АТС/м]}, c_* = 4.5 \text{ [м/с]}, v_0 = 34 \text{ [м/с]}. \end{cases} \quad (7)$$

Для заданной в (6) зависимости $Q(\rho)$, используя (3), получаем уравнение состояния дороги

$$\begin{cases} P(\rho) = c_f^2 \rho^3 / (3\rho_f^2), & \rho \leq \rho_f, \\ P(\rho) = c_f^2 \rho_f / 3 + c_*^2 \rho_*^2 (1 / \rho_f - 1 / \rho), & \rho > \rho_f \end{cases} \quad (8)$$

и зависимость скорости звука $c(\rho)$ от плотности

$$\begin{cases} c(\rho) = c_f \rho / \rho_f, & \rho \leq \rho_f, \\ c(\rho) = c_* \rho_* / \rho, & \rho > \rho_f. \end{cases} \quad (9)$$

Зависимости давления $P(\rho)$ (8), «скорости звука» $c(\rho)$ (9) и скорости транспортного потока $v(\rho)$ (6) от его плотности, построенные с использованием значений параметров (7), для двухполосного участка автострады I-80 в районе залива Сан-Франциско представлены на рисунке 3. На рисунке хорошо видно, что давление и скорость транспортного потока остаются непрерывными, тогда как его скорость звука испытывает разрыв в точке перегиба фундаментальной диаграммы при $\rho = \rho_f$ и становится больше скорости транспортного потока при всех значениях плотности $\rho > \rho_f$. Это означает, что движение транспортного потока при переходе через значения плотности ρ_f меняется со «сверхзвукового» ($v > c$, свободный поток) на «дозвуковое» ($v < c$, плотный поток) и проходит при этом через волну сжатия.

Имея замкнутую систему уравнений (1)–(2) (хорошо известную гиперболическую систему уравнений Эйлера для сжимаемого баротропного газа), можно найти уравнения характеристик и соответствующие условия совместности этой системы уравнений гиперболического типа, также как и соотношения на разрывах, возникающих при переходе от докритического («сверхзвукового») движения к закритическому («дозвуковому») в волнах торможения и т. д.

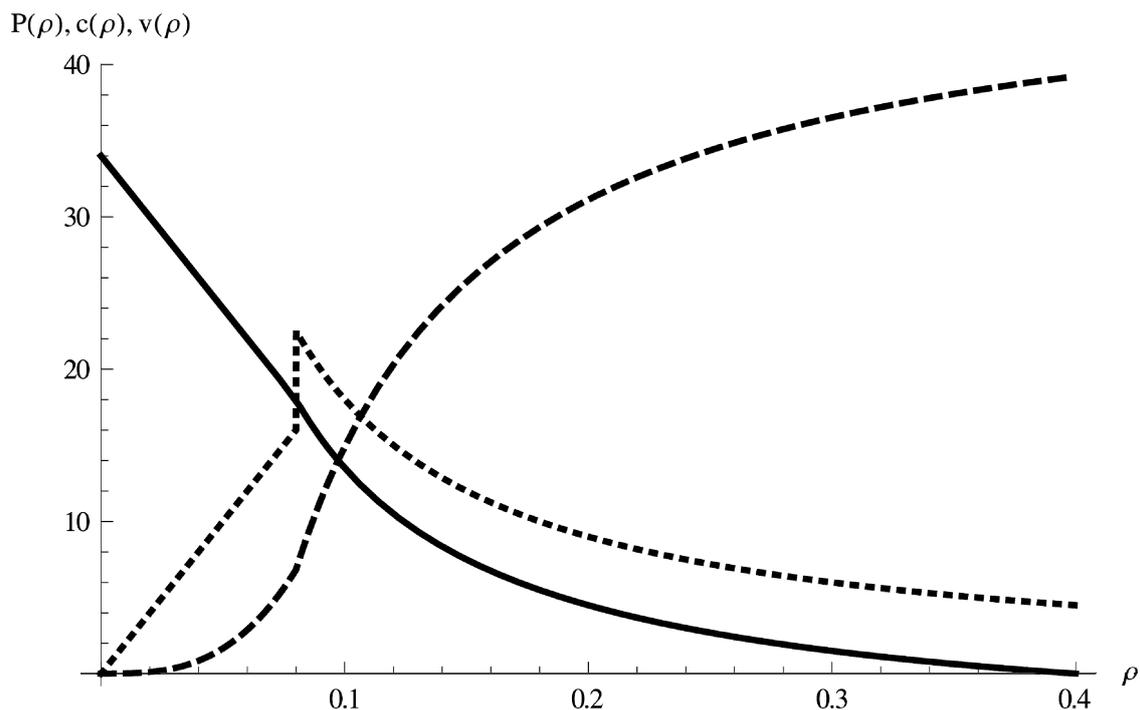


Рис. 3. Зависимости давления (пунктирная линия) [АТС м/с²] (8), скорости звука (маркеры) [м/с] (9) и скорости (сплошная линия) [м/с] транспортного потока (6) от его плотности [АТС/м], построенные с использованием значений параметров (7), для двухполосного участка автомагистрали I-80 в районе залива Сан-Франциско

Вводя в рассмотрение векторы $\mathbf{V} = \{\rho, v\}^T$, $U(\mathbf{V}) = \{\rho, \rho v\}^T$, $F(\mathbf{V}) = \{\rho v, \rho v^2 + P(\rho)\}^T$, $f = \{f_0, f_1\}^T$, систему уравнений (1) можно записать в векторной дивергентной форме

$$\partial U(\mathbf{V}) / \partial t + \partial F(\mathbf{V}) / \partial x = f(\mathbf{V}, x, t) \quad (10)$$

или в форме $\partial U(\mathbf{V}) / \partial t + \left(\frac{\partial F(\mathbf{V})}{\partial U(\mathbf{V})} \right) \partial U(\mathbf{V}) / \partial x = f(\mathbf{V}, x, t)$ с матрицей Якоби

$$A = (\partial F / \partial U) = (\partial F / \partial \mathbf{V})(\partial U / \partial \mathbf{V})^{-1} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - v^2 & 2v \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Собственные числа матрицы Якоби A : $\lambda_1 = v + c$, $\lambda_2 = v - c$, $c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ всегда действительные и различные ($\partial P / \partial \rho = c^2 > 0$) — система (10) строго гиперболического типа, а левые собственные векторы: $\omega_1 = \{c - v, 1\}$, $\omega_2 = \{v + c, -1\}$ — линейно независимы. То есть матрица со

строками из левых собственных векторов $\Omega = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v - c & -1 \\ v + c & -1 \end{Bmatrix}$ — неособенная, т. к.

$\text{Det } \Omega = -2c/\rho \neq 0$ при ненулевых плотности ρ и скорости звука c . Для упрощения выкладок в дальнейшем будем полагать вектор правой части (10) $f = \{f_0, f_1\}^T = 0$.

Эквивалентная (1) характеристическая форма уравнений совместности вдоль характеристик первого (знак (+) — индекс № 1) и второго (знак (-) — индекс № 2) семейств

$$dx = \lambda_i dt = (v \pm c) dt, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

имеет вид

$$\begin{cases} \omega_i \cdot \frac{dU}{dt_i} = (v \mp c) d\rho / dt_i - d(\rho v) / dt_i = 0, \\ \frac{d}{dt_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad i=1,2. \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \omega_i \cdot \frac{dU}{dt_i} = \{\mp c, -\rho\} \cdot \frac{dV}{dt_i} = \mp c(\rho) d\rho / dt_i - \rho dv / dt_i = 0, \\ \frac{d}{dt_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad i=1,2. \end{cases} \quad (13)$$

Каждое из уравнений (13) является, по сути, обыкновенным дифференциальным уравнением вдоль i -й характеристики (12). Для уравнения состояния (8) условия совместности (13) интегрируются аналитически с учетом (9), что позволяет получить вид инвариантов или волн Римана r_i , постоянных вдоль соответствующих характеристик λ_i , $i=1,2$:

$$\begin{cases} r_{\pm}(\rho, v) = v \pm (c_f \rho / \rho_f) = v \pm c = \text{const}, \quad \rho \leq \rho_f, \\ r_{\mp}(\rho, v) = v \mp (c_* \rho_* / \rho) = v \mp c = \text{const}, \quad \rho > \rho_f. \end{cases} \quad (14)$$

В фазовой плоскости $\{\rho, v\}$ кривые (14) имеют вид

$$\begin{aligned} v_+(\rho) &= \begin{cases} r_{\pm} - c_f \rho / \rho_f = r_{\pm} - c, & \rho \leq \rho_f, \\ r_{\mp} + c_* \rho_* / \rho = r_{\mp} + c, & \rho > \rho_f, \end{cases} \\ v_-(\rho) &= \begin{cases} r_{\pm} + c_f \rho / \rho_f = r_{\pm} + c, & \rho \leq \rho_f, \\ r_{\mp} - c_* \rho_* / \rho = r_{\mp} - c, & \rho > \rho_f. \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Получим теперь уравнения для волн сжатия транспортного потока. Интегрируя (1), (2) по замкнутому контуру в плоскости $\{x, t\}$, содержащему фронт разрыва движущегося со скоростью D , можно получить соотношения на разрывах:

$$\begin{cases} D\{\rho\} - \{Q\} = 0, \\ D\{Q\} + \{Qv + P(\rho)\} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь $\{q\} \equiv q_i - q_j$ обозначают значения переменных слева и справа от разрыва, который формально совпадает с соответствующей границей сектора в данный момент времени. Перейдем в соотношениях (16) в систему координат, движущуюся со скоростью разрыва D , и воспользуемся тем, что $\{D\} = 0$:

$$\begin{cases} \{\rho u\} = 0, \\ \{\rho u^2 + P(\rho)\} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

В соотношениях (17) используется новая переменная $u = v - D$, которая обозначает скорость транспортного потока в системе координат, движущейся со скоростью разрыва D . Из этих

соотношений можно получить уравнение волны сжатия, связывающее параметры перед фронтом разрыва (в докритическом потоке с $\rho_1 \leq \rho_f$) и за фронтом разрыва (в закритическом потоке с $\rho_2 > \rho_f$):

$$(P_1(\rho_1) - P_2(\rho_2))(1/\rho_2 - 1/\rho_1) - (v_1 - v_2)^2 = 0, \quad (18)$$

а также скорость движения фронта разрыва:

$$D = (\rho_2 v_2 - \rho_1 v_1) / (\rho_2 - \rho_1) = (Q_2 - Q_1) / (\rho_2 - \rho_1). \quad (19)$$

Число граничных условий на въездах-выездах автодороги зависит от знаков собственных чисел матрицы Якоби A (11). Их количество на въездах может быть равным двум при положительных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ или одному при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. На выездах их число может быть равным нулю при положительных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ или единице при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

В соответствии с этим на въездах-выездах в качестве граничных условий могут быть заданы как функции времени значение интенсивности потока автомобилей $Q(t)$ или величина скорости потока $v(t)$ (при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$). Для замыкания системы уравнений в узле в качестве второго уравнения привлекается одно из условий совместности (13) вдоль идущих внутрь области интегрирования характеристик. Если необходимо задавать два граничных условия, обе эти переменные задаются одновременно. Также возможна ситуация, когда граничные узлы рассчитываются через значения переменных во внутренних точках дороги, тогда задавать граничные условия не требуется. На выездах иногда используют неотражающие граничные условия — нулевые производные

$$(\partial Q / \partial x) = 0, \quad (\partial v / \partial x) = 0, \quad (20)$$

что, вообще говоря, является корректным лишь при положительных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.

Помимо граничных условий для системы (1), (2) необходимо задать также некоторые начальные условия:

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \quad (21)$$

Алгоритм численного решения

Составляющая основу данной модели система уравнений в частных производных (1), (2) имеет гиперболический тип и для численного решения таких уравнений существует достаточно много разнообразных по своим качествам разностных методов. Характеристическая форма уравнений (13) или ее модификации с использованием инвариантов Римана (14) (если удастся найти точное решение (13)), так же как соотношения на разрывах (18), (19), получаемые при решении задачи Римана для системы (1), (2), необходимы при построении эффективных разностных схем для численного ее решения (см., например, [Холодов, Холодов, 2006]), а в граничных точках они используются для замыкания краевых условий.

Для системы уравнений (1), (2), записанной в векторной дивергентной форме (10), все возможное семейство разностных схем можно представить в следующем общем виде:

$$\begin{cases} \tilde{U}_m = U_m^n + \int_0^\tau f(V, x_m, t) dt, \\ U_m^{n+1} = \tilde{U}_m - \frac{\tau}{h} (F_{m+1/2}^{n+1/2} - F_{m-1/2}^{n+1/2}). \end{cases} \quad (22)$$

Учет влияния вектора правой части в (10) реализован через его численное интегрирование $\int_0^\tau f(V, x_m, t) dt$, при этом выбор точности метода можно соотнести с точностью разностной схемы в (22). Все дальнейшие свойства разностной схемы (22) определяются видом выражений, которые будут интерполировать значения векторов $F_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в промежуточных точках $(t^{n+1/2}, x_{m\pm 1/2})$, не являющихся узлами заданного сеточного шаблона. Выбор интерполяционных выражений для $F_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в (22) является определяющим для получения заданных свойств схемы. Они могут быть найдены, например, из решения задачи Римана на границе между вычислительными узлами $(t^n, x_{m\pm 1})$. Также в простейшем случае может быть использован консервативный вариант сеточно-характеристического метода [Магомедов, Холодов, 1969]:

$$F_{m\pm 1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(F_m^n + F_{m\pm 1}^n) \pm \frac{1}{2}(\Omega^{-1}|\Lambda|\Omega)_{m\pm 1/2}^n (U_m^n - U_{m\pm 1}^n) \tag{23}$$

или это могут быть более сложные выражения, позволяющие построить консервативную монотонную схему высокого порядка аппроксимации на заданном сеточном шаблоне.

Условия совместности (13) бывает необходимо численно интегрировать в граничных точках вдоль идущих внутрь области интегрирования характеристик. Например, на въезде в граничной точке (t^{n+1}, x_M) при положительных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ получаем

$$\begin{cases} c(\rho_{M-\lambda_1\tau}^n)(\rho_M^{n+1} - \rho_{M-\lambda_1\tau}^n) + \rho_{M-\lambda_1\tau}^n (v_M^{n+1} - v_{M-\lambda_1\tau}^n) = 0, \\ c(\rho_{M-\lambda_2\tau}^n)(\rho_M^{n+1} - \rho_{M-\lambda_2\tau}^n) - \rho_{M-\lambda_2\tau}^n (v_M^{n+1} - v_{M-\lambda_2\tau}^n) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Здесь индексы $\{M - \lambda_{1,2}\tau\}$ у переменных $\rho_{M-\lambda_{1,2}\tau}^n, v_{M-\lambda_{1,2}\tau}^n$ обозначают, что нам придется вычислить их значения на n -м временном слое в точках, которые находятся на расстояниях $\Delta x_{1,2} = -(v_M^n \pm c_M^n)\tau$ от узла (t^n, x_M) , используя интерполяцию с нужной нам точностью. Если на въезде $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, то вид разностной схемы в узле $(t^{n+1}, 0)$ будет следующим:

$$\begin{cases} c(\rho_{\lambda_1\tau}^n)(\rho_0^{n+1} - \rho_{\lambda_1\tau}^n) + \rho_{\lambda_1\tau}^n (v_0^{n+1} - v_{\lambda_1\tau}^n) = 0, \\ \rho_0^{n+1} v_0^{n+1} = Q_0(t^{n+1}) = Q(t^{n+1}, 0). \end{cases} \tag{25}$$

Здесь переменные $\rho_{\lambda_1\tau}^n, v_{\lambda_1\tau}^n$ придется вычислять на n -м временном слое в точке, которая находится на расстоянии $\Delta x = (v_1^n + c_1^n)\tau$ от узла $(t^n, 0)$.

О том, как находить численное решение, в случае если граничная точка выходит на перекресток, будет подробно рассказано в следующем разделе.

Система уравнений на дорожном перекрестке

Как уже говорилось во введении, в данной работе исследуется проблема описания автомобильного движения на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации. Ключевым отличием данной модели будет то, что движения автотранспорта на перекрестке, в отличие от

системы уравнений (1), (2), будет рассматриваться в двухскоростной постановке:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \partial(\rho v_x) / \partial x + \partial(\rho v_y) / \partial y = 0, \\ \partial(\rho v_x) / \partial t + \partial(\rho v_x^2 + P(\rho)) / \partial x + \partial(\rho v_x v_y) / \partial y = f_x, \\ \partial(\rho v_y) / \partial t + \partial(\rho v_x v_y) / \partial x + \partial(\rho v_y^2 + P(\rho)) / \partial y = f_y. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь v_x и v_y — компоненты скорости транспортного потока в рассчитываемой точке на перекрестке по координатам x и y , f_x и f_y — компоненты импульса сил, действующих на систему (26). Систему уравнений (26) можно переписать в тождественном виде с учетом того, что $Q_x = \rho v_x$ и $Q_y = \rho v_y$ есть компоненты интенсивности транспортного потока:

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \partial(Q_x) / \partial x + \partial(Q_y) / \partial y = 0, \\ \partial(Q_x) / \partial t + \partial(Q_x v_x + P(\rho)) / \partial x + \partial(Q_x v_y) / \partial y = f_x, \\ \partial(Q_y) / \partial t + \partial(Q_y v_x) / \partial x + \partial(Q_y v_y + P(\rho)) / \partial y = f_y. \end{cases} \quad (27)$$

Прежде чем перейти к построению модели расчета движения транспорта для перекрестка произвольной конфигурации, рассмотрим в качестве примера перекресток, представленный на рисунке 4.

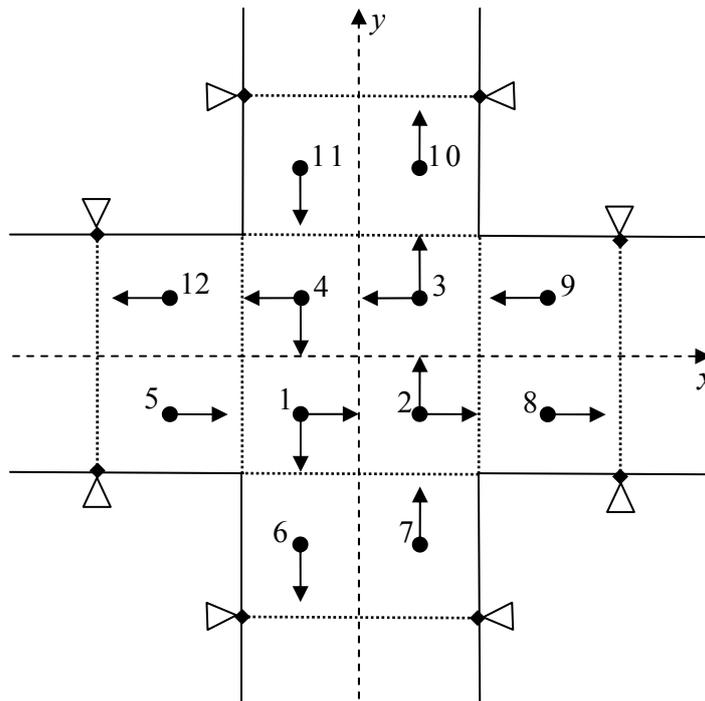


Рис. 4. Пример регулируемого перекрестка с двухсторонним движением по каждой из дорог, разрешенные направления движения на перекрестке показаны стрелками в его четырех секторах с центрами в точках 1–4

Для заданного перекрестка ограничимся для наглядности двумя светофорными фазами, а именно, когда для одной дороги, например, идущей вдоль оси x на рисунке 4, горит зеленый свет, а для другой, идущей вдоль оси y , горит красный, и наоборот. В силу симметрии перекрестка выбор светофорной фазы для каждой из дорог не принципиален. Считаем, что значения скоростей и интенсивностей транспортных потоков на въездах и выездах с перекрестка в точках 5–12 в данный момент времени нам известны из показаний датчиков, обозначенных на рисунке 4 треугольниками.

Перекресток, представленный на рисунке 4, можно представить в виде комбинации четырех более простых элементов (секторов), показанных на рисунке 5.

Коэффициенты перераспределений потоков по направлениям движения (x,y) на границе сектора перекрестка легко определяются из показаний датчиков:

$$\begin{cases} \alpha_{1,2} = \frac{Q_3}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_8}{Q_1}, & \text{зеленый свет по } x, \\ \alpha_{7,2} = \frac{Q_8}{Q_7} = \frac{Q_7 - Q_3}{Q_7}, & \text{зеленый свет по } y. \end{cases} \quad (28)$$

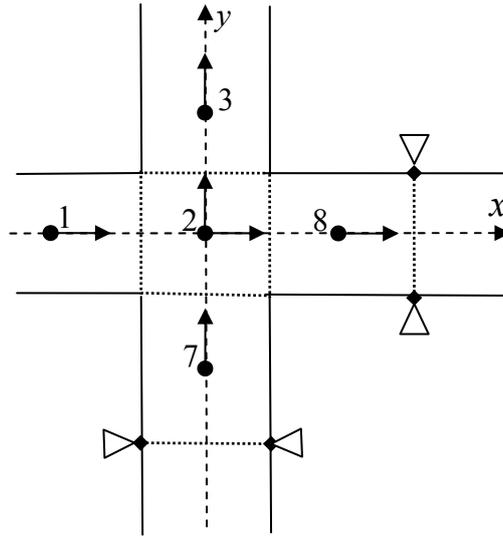


Рис. 5. Пример одного из четырех составных элементов регулируемого перекрестка, представленного на рисунке 4 (сектор № 2), разрешенные направления движения показаны стрелками

Запишем разностную аппроксимацию системы уравнений (27), решаемой в секторе перекрестка, с учетом направлений координатных осей и компонентов скоростей в секторе, также учтем при этом, что тангенциальная компонента импульса не переносится вдоль нормальной компоненты в связи с правилами дорожного движения (нельзя ездить по встречной полосе):

$$\begin{cases} \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{Q_{2,8}^n - Q_{1,2}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{2,3}^n - Q_{7,2}^n}{\Delta y} = 0, \\ \frac{Q_{x,2}^{n+1} - Q_{x,2}^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{2,8}^n v_{2,8}^n + P(\rho_{2,8}^n)) - (Q_{1,2}^n v_{1,2}^n + P(\rho_{1,2}^n))}{\Delta x} = f_{2,x}^n, \\ \frac{Q_{y,2}^{n+1} - Q_{y,2}^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{2,3}^n v_{2,3}^n + P(\rho_{2,3}^n)) - (Q_{7,2}^n v_{7,2}^n + P(\rho_{7,2}^n))}{\Delta y} = f_{2,y}^n. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь Δt — шаг по времени, Δx и Δy — пространственные размеры сектора. Осталось теперь только определить, как будут вычисляться промежуточные значения переменных $\rho_{i,j}^n, v_{i,j}^n, Q_{i,j}^n$, которые находятся на границе сектора перекрестка между точками (1,2), (7,2), (2,8) и (2,3).

Начнем их вычисление с очевидных оценок, а именно, если у нас горит красный сигнал светофора для дороги, идущей вдоль оси y , то значения $v_{7,2}^n, Q_{7,2}^n$ будут равны нулю. Если светофор красный для дороги, идущей вдоль оси x , то равны нулю будут значения $v_{1,2}^n, Q_{1,2}^n$. Значения плотностей транспортного потока на границе секторов перекрестка $\rho_{i,j}^n$ в этом случае мо-

гут быть вычислены по простейшей формуле линейной интерполяции:

$$\rho_{i,j}^n = \frac{\Delta_j}{\Delta_{i,j}} \rho_i^n + \frac{\Delta_i}{\Delta_{i,j}} \rho_j^n.$$

Здесь $\Delta_{i,j}$ — расстояние между точками с номерами i и j , а Δ_i и Δ_j — расстояния от этих точек до границы сектора, находящейся между ними.

Для того чтобы вычислить значения $\rho_{i,j}^n, v_{i,j}^n, Q_{i,j}^n$ на границах сектора, не перекрытых красным сигналом светофора, нам придется поставить и решить задачу Римана на этих границах. С этой целью перейдем от двухмерной системы уравнений (27) к двум одномерным системам уравнений для каждой из координат x и y :

$$\begin{cases} \partial \rho / \partial t + \partial(Q_{x,y}) / \partial(x,y) = 0, \\ \partial(Q_{x,y}) / \partial t + \partial(Q_{x,y} v_{x,y} + P(\rho)) / \partial(x,y) = f_{x,y}. \end{cases} \quad (30)$$

Решая задачу Римана для каждой из одномерных систем уравнений (30) по стандартному алгоритму [Годунов, 1959], найдем значения переменных, используемых в (29) на границах сектора по каждому из направлений (x,y) .

В аппроксимации (29) необходимо также учесть перераспределение потоков на границах сектора, вызванное поворотами водителей направо и налево при движении на перекрестке. Сделаем это при помощи известных нам коэффициентов $\alpha_{1,2}$ и $\alpha_{7,2}$ (28), при этом надо не забывать, что потоки сохраняют свой знак и закон сохранения потока должен по-прежнему выполняться внутри сектора. В соответствии с этими правилами, на ребро 2,8 переносим часть потока $\alpha_{7,2} Q_{7,2}$, повернувшего с ребра 7,2 направо, и забираем часть потока $\alpha_{1,2} Q_{1,2}$, повернувшего с ребра 1,2 налево, в результате получаем новое значение потока $\tilde{Q}_{2,8} = Q_{2,8} + \alpha_{7,2} Q_{7,2} - \alpha_{1,2} Q_{1,2}$. То же самое делаем на ребре 2,3: переносим часть потока $\alpha_{1,2} Q_{1,2}$, повернувшего с ребра 1,2 налево, и забираем часть потока $\alpha_{7,2} Q_{7,2}$, повернувшего с ребра 7,2 направо, в результате получаем новое значение потока $\tilde{Q}_{2,3} = Q_{2,3} + \alpha_{1,2} Q_{1,2} - \alpha_{7,2} Q_{7,2}$. Новые значения потоков $\tilde{Q}_{2,8}$ и $\tilde{Q}_{2,3}$ можно использовать, чтобы получить новые значения скоростей и плотностей $(\tilde{\rho}_{2,8}, \tilde{v}_{2,8})$ и $(\tilde{\rho}_{2,3}, \tilde{v}_{2,3})$ на границах сектора. Сделать это можно, используя зависимость $Q(\rho)$, полученную через фундаментальную диаграмму, например, в форме (6). Зная, каким было и каким стало значение потока, смещаясь вдоль фундаментальной диаграммы, однозначно находим из зависимости $Q(\rho)$ новые значения плотности $\tilde{\rho}$ и скорости \tilde{v} , которые затем подставляем в (29):

$$\begin{cases} \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{2,8}^n + \alpha_{7,2} Q_{7,2}^n - \alpha_{1,2} Q_{1,2}^n) - Q_{1,2}^n}{\Delta x} + \frac{(Q_{2,3}^n + \alpha_{1,2} Q_{1,2}^n - \alpha_{7,2} Q_{7,2}^n) - Q_{7,2}^n}{\Delta y} = 0, \\ \frac{Q_{x,2}^{n+1} - Q_{x,2}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{2,8}^n + \alpha_{7,2} Q_{7,2}^n - \alpha_{1,2} Q_{1,2}^n) \tilde{v}_{2,8}^n + P(\tilde{\rho}_{2,8}^n)) - (Q_{1,2}^n v_{1,2}^n + P(\rho_{1,2}^n))}{\Delta x} = f_{2,x}^n, \\ \frac{Q_{y,2}^{n+1} - Q_{y,2}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{2,3}^n + \alpha_{1,2} Q_{1,2}^n - \alpha_{7,2} Q_{7,2}^n) \tilde{v}_{2,3}^n + P(\tilde{\rho}_{2,3}^n)) - (Q_{7,2}^n v_{7,2}^n + P(\rho_{7,2}^n))}{\Delta y} = f_{2,y}^n. \end{cases} \quad (31)$$

Этот же алгоритм можно одновременно применить ко всем четырем секторам перекрестка, изображенного на рисунке 4, с учетом того, что локальные системы координат совпадают

с направлениями движения в каждом из секторов:

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{\rho_1^{n+1} - \rho_1^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{1,2}^n + \alpha_{4,1}Q_{4,1}^n - \alpha_{5,1}Q_{5,1}^n) - Q_{5,1}^n}{\Delta x} + \frac{(Q_{1,6}^n + \alpha_{5,1}Q_{5,1}^n - \alpha_{4,1}Q_{4,1}^n) - Q_{4,1}^n}{\Delta y} = 0, \\
 & \frac{Q_{x,1}^{n+1} - Q_{x,1}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{1,2}^n + \alpha_{4,1}Q_{4,1}^n - \alpha_{5,1}Q_{5,1}^n)\tilde{v}_{1,2}^n + P(\tilde{\rho}_{1,2}^n)) - (Q_{5,1}^n v_{5,1}^n + P(\rho_{5,1}^n))}{\Delta x} = f_{1,x}^n, \\
 & \frac{Q_{y,1}^{n+1} - Q_{y,1}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{1,6}^n + \alpha_{5,1}Q_{5,1}^n - \alpha_{4,1}Q_{4,1}^n)\tilde{v}_{1,6}^n + P(\tilde{\rho}_{1,6}^n)) - (Q_{4,1}^n v_{4,1}^n + P(\rho_{4,1}^n))}{\Delta y} = f_{1,y}^n, \\
 & \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{2,8}^n + \alpha_{7,2}Q_{7,2}^n - \alpha_{1,2}Q_{1,2}^n) - Q_{1,2}^n}{\Delta x} + \frac{(Q_{2,3}^n + \alpha_{1,2}Q_{1,2}^n - \alpha_{7,2}Q_{7,2}^n) - Q_{7,2}^n}{\Delta y} = 0, \\
 & \frac{Q_{x,2}^{n+1} - Q_{x,2}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{2,8}^n + \alpha_{7,2}Q_{7,2}^n - \alpha_{1,2}Q_{1,2}^n)\tilde{v}_{2,8}^n + P(\tilde{\rho}_{2,8}^n)) - (Q_{1,2}^n v_{1,2}^n + P(\rho_{1,2}^n))}{\Delta x} = f_{2,x}^n, \\
 & \frac{Q_{y,2}^{n+1} - Q_{y,2}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{2,3}^n + \alpha_{1,2}Q_{1,2}^n - \alpha_{7,2}Q_{7,2}^n)\tilde{v}_{2,3}^n + P(\tilde{\rho}_{2,3}^n)) - (Q_{7,2}^n v_{7,2}^n + P(\rho_{7,2}^n))}{\Delta y} = f_{2,y}^n, \\
 & \frac{\rho_3^{n+1} - \rho_3^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{3,4}^n + \alpha_{2,3}Q_{2,3}^n - \alpha_{9,3}Q_{9,3}^n) - Q_{9,3}^n}{\Delta x} + \frac{(Q_{3,10}^n + \alpha_{9,3}Q_{9,3}^n - \alpha_{2,3}Q_{2,3}^n) - Q_{2,3}^n}{\Delta y} = 0, \\
 & \frac{Q_{x,3}^{n+1} - Q_{x,3}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{3,4}^n + \alpha_{2,3}Q_{2,3}^n - \alpha_{9,3}Q_{9,3}^n)\tilde{v}_{3,4}^n + P(\tilde{\rho}_{3,4}^n)) - (Q_{9,3}^n v_{9,3}^n + P(\rho_{9,3}^n))}{\Delta x} = f_{3,x}^n, \\
 & \frac{Q_{y,3}^{n+1} - Q_{y,3}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{3,10}^n + \alpha_{9,3}Q_{9,3}^n - \alpha_{2,3}Q_{2,3}^n)\tilde{v}_{3,10}^n + P(\tilde{\rho}_{3,10}^n)) - (Q_{2,3}^n v_{2,3}^n + P(\rho_{2,3}^n))}{\Delta y} = f_{3,y}^n, \\
 & \frac{\rho_4^{n+1} - \rho_4^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{4,12}^n + \alpha_{11,4}Q_{11,4}^n - \alpha_{3,4}Q_{3,4}^n) - Q_{3,4}^n}{\Delta x} + \frac{(Q_{4,1}^n + \alpha_{3,4}Q_{3,4}^n - \alpha_{11,4}Q_{11,4}^n) - Q_{11,4}^n}{\Delta y} = 0, \\
 & \frac{Q_{x,4}^{n+1} - Q_{x,4}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{4,12}^n + \alpha_{11,4}Q_{11,4}^n - \alpha_{3,4}Q_{3,4}^n)\tilde{v}_{4,12}^n + P(\tilde{\rho}_{4,12}^n)) - (Q_{3,4}^n v_{3,4}^n + P(\rho_{3,4}^n))}{\Delta x} = f_{4,x}^n, \\
 & \frac{Q_{y,4}^{n+1} - Q_{y,4}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{4,1}^n + \alpha_{3,4}Q_{3,4}^n - \alpha_{11,4}Q_{11,4}^n)\tilde{v}_{4,1}^n + P(\tilde{\rho}_{4,1}^n)) - (Q_{11,4}^n v_{11,4}^n + P(\rho_{11,4}^n))}{\Delta y} = f_{4,y}^n.
 \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Стоит отдельно отметить, что значения переменных на границах между секторами перекрестка и примыкающими к нему дорогами $(\rho_{5,1}, v_{5,1}), (\rho_{7,2}, v_{7,2}), (\rho_{9,3}, v_{9,3}), (\rho_{11,4}, v_{11,4})$ и $(\tilde{\rho}_{1,6}, \tilde{v}_{1,6}), (\tilde{\rho}_{2,8}, \tilde{v}_{2,8}), (\tilde{\rho}_{3,10}, \tilde{v}_{3,10}), (\tilde{\rho}_{4,12}, \tilde{v}_{4,12})$, используемые в (32), при аппроксимации системы уравнений (27), также необходимо использовать при вычислении значений векторов $F_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ в разностной схеме (22) в узлах (5–12), примыкающих к перекрестку дорог.

Следующий случай, который можно рассмотреть отдельно, — это перекресток с круговым движением. В рамках предлагаемого подхода его можно представить как набор Т-образных нерегулируемых перекрестков (см. рис. 6), последовательно соединенных между собой.

В свою очередь, данный Т-образный перекресток может быть представлен в виде комбинации двух более простых элементов (секторов), показанных на рисунке 7.

Запишем разностную аппроксимацию системы уравнений (27), решаемой в каждом из двух секторов перекрестка, с учетом перераспределения потоков на границах секторов,

вызванное поворотами водителей при движении на перекрестке:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_2^{n+1} - \rho_2^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{2,3}^n - (Q_5^n/Q_1^n)Q_{1,2}^n) - Q_{1,2}^n}{\Delta x} + \frac{Q_{2,5}^n + (Q_5^n/Q_1^n)Q_{1,2}^n}{\Delta y} = 0, \\ & \frac{Q_{x,2}^{n+1} - Q_{x,2}^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{2,3}^n - (Q_5^n/Q_1^n)Q_{1,2}^n)\tilde{v}_{2,3}^n + P(\tilde{\rho}_{2,3}^n)) - (Q_{1,2}^n v_{1,2}^n + P(\rho_{1,2}^n))}{\Delta x} = f_{2,x}^n, \\ & \frac{Q_{y,2}^{n+1} - Q_{y,2}^n}{\Delta t} - \frac{((Q_{2,5}^n + (Q_5^n/Q_1^n)Q_{1,2}^n)\tilde{v}_{2,5}^n + P(\tilde{\rho}_{2,5}^n))}{\Delta y} = f_{2,y}^n, \\ & \frac{\rho_3^{n+1} - \rho_3^n}{\Delta t} + \frac{(Q_{3,4}^n + Q_{6,3}^n) - Q_{2,3}^n}{\Delta x} = 0, \\ & \frac{Q_3^{n+1} - Q_3^n}{\Delta t} + \frac{((Q_{3,4}^n + Q_{6,3}^n)\tilde{v}_{3,4}^n + P(\tilde{\rho}_{3,4}^n)) - (Q_{2,3}^n v_{2,3}^n + P(\rho_{2,3}^n))}{\Delta x} = f_3^n. \end{aligned} \right. \quad (33)$$

При этом в (33) коэффициенты перераспределений потоков по направлениям движения $\alpha_{1,2} = Q_5^n/Q_1^n$ и $\alpha_{6,3} = 1$ применяются в явном виде.

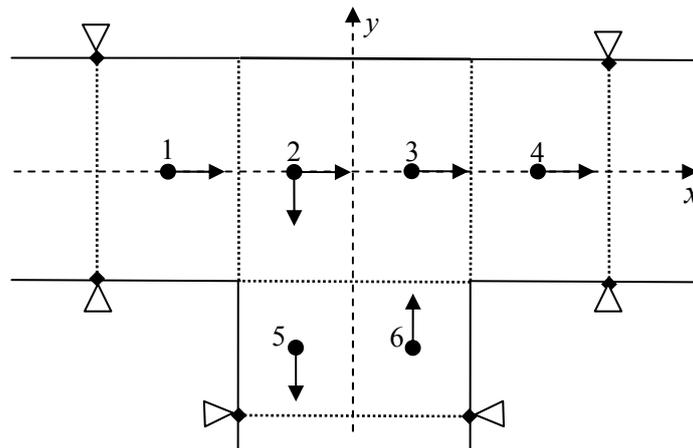


Рис. 6. Пример Т-образного нерегулируемого перекрестка, разрешенные направления движения на перекрестке показаны стрелками в его двух секторах с центрами в точках 2 и 3

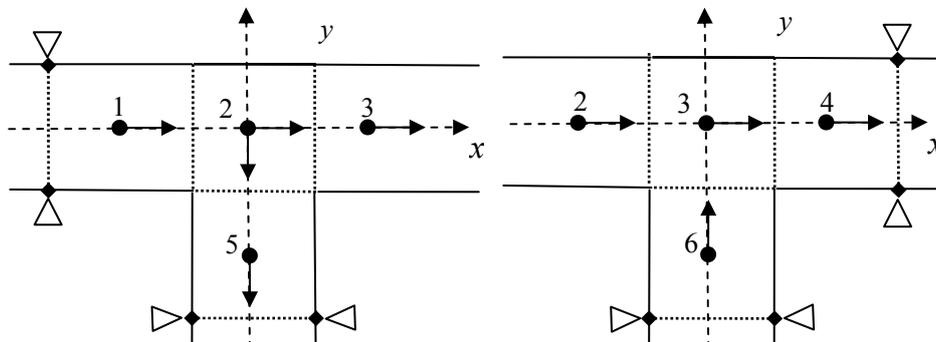


Рис. 7. Пример двух простых элементов (секторов), образующих Т-образный нерегулируемый перекресток, представленный на рисунке 6, разрешенные направления движения показаны стрелками

Подход, применяемый при формировании систем уравнений (32), (33), может быть легко адаптирован для перекрестка любой конфигурации, так как позволяет представить его в виде

ограниченного набора стандартных элементов (секторов), системы уравнений которых нами уже построены. Все что, нужно, это аккуратно их связать в одну систему уравнений, используя общие граничные условия.

Результаты расчетов

Определяющими функционирование описанной выше динамической модели, прежде всего, являются схема организация движения на перекрестке и выбор временных интервалов работы фаз светофорной сигнализации. Для оценки их влияния (по имеющимся экспериментальным данным) были проведены тестовые расчеты автомобильного движения с использованием описанных выше макроскопических моделей гидродинамического типа.

Для начала была выбрана замкнутая транспортная система, представленная на рисунке 8. Особенность движения в этой системе заключается в том, что один раз задав распределение транспортных потоков на перекрестках системы так, чтобы оно было сбалансированным по скорости и плотности, мы должны наблюдать сохранение этого баланса во времени. Перекрестки, в которых проверяется баланс транспортных потоков, показаны на рисунке узлами зеленого, голубого, синего и красного цветов. Динамика величин транспортных потоков, двигающихся на перекрестках прямо (верхние графики) и направо (нижние графики), в зависимости от времени показана на рисунке справа. Цвет графика совпадает с цветом перекрестка на транспортной схеме. Потоки на перекрестках распределялись таким образом, чтобы они имели разные значения на каждом из них, но при этом количество автомобилей (АТС), едущих прямо, было в два раза больше поворачивающих направо.

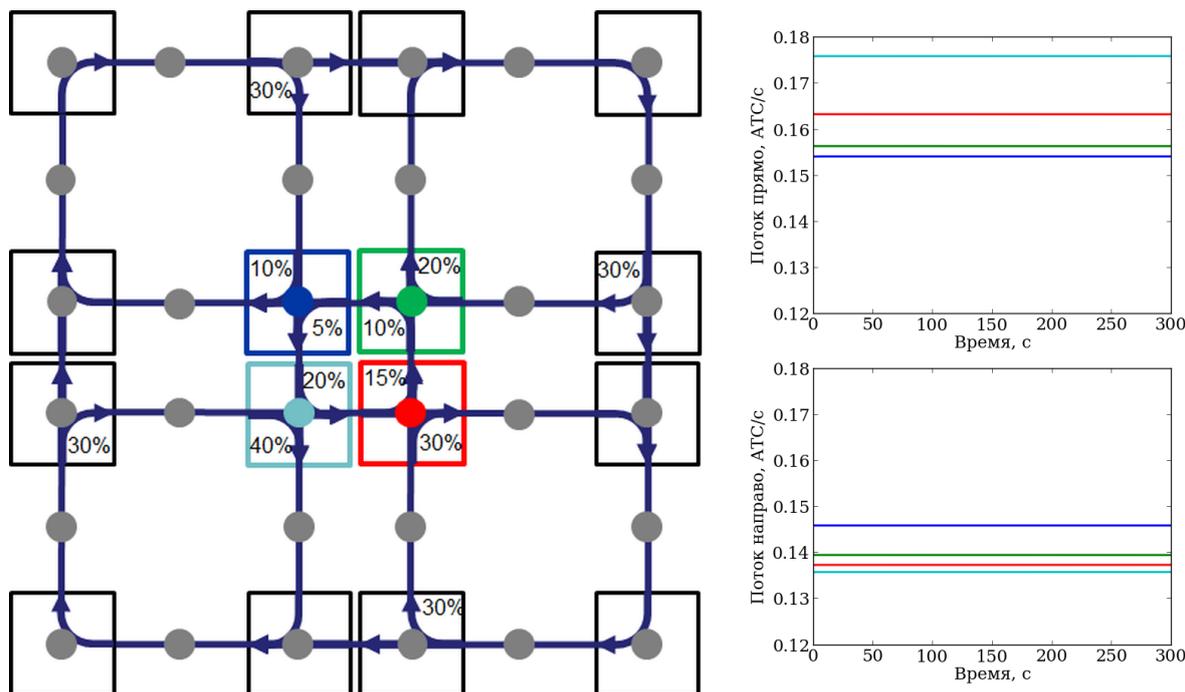


Рис. 8. Пример тестовой транспортной схемы, использованной для проверки выполнения закона сохранения баланса потоков на перекрестке. Направления движения показаны стрелками. Расчетные узлы показаны серым цветом. Перекрестки, в которых проверяется баланс транспортных потоков, показаны узлами зеленого, голубого, синего и красного цвета. Динамика величин транспортных потоков, двигающихся на перекрестках прямо (верхние графики) и направо (нижние графики), в зависимости от времени показана на рисунке справа. Цвет графика совпадает с цветом перекрестка на транспортной схеме

В качестве экспериментальных объектов в г. Москве были выбраны следующие перекрестки: круговое движение на пересечении Пролетарского проспекта и Кавказского бульвара

(рис. 9), пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров (рис. 11), и пересечение Ленинского проспекта и ул. Лобачевского (рис. 14). Данные перекрестки были выбраны в связи с тем, что все их въезды и выезды оборудованы датчиками (показаны маркерами на рис. 9, 11, 14), измеряющими интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам. При построении фундаментальных диаграмм по всем полосам движения на перекрестках использовалась система сбора данных Navigator центра организации дорожного движения правительства Москвы за период в 264 дня.



Рис. 9. Круговое движение на пересечении Пролетарского проспекта и Кавказского бульвара г. Москвы. Расположение датчиков, измеряющих интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам, показано цифровыми маркерами 1–4

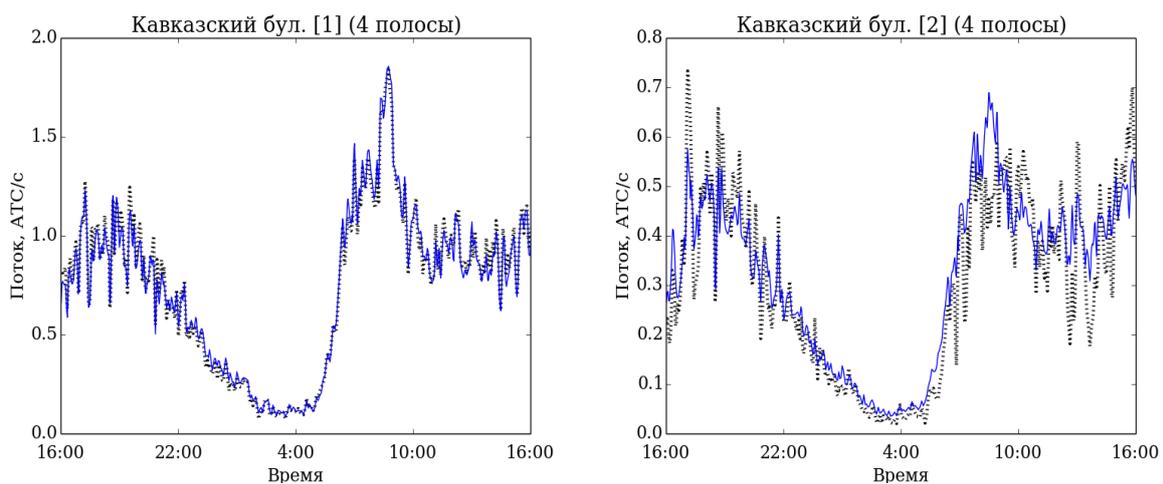


Рис. 10. Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Кавказском бульваре (синий цвет) в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (№ 1 и № 2 на рис. 9) с 5-минутным временным интервалом

Усредненные по всем полосам движения расчетные значения транспортных потоков на Кавказском бульваре и Ленинском проспекте в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего в сравнении с данными экспериментальных наблюдений, полученными с датчиков, представлены соответственно на рисунках 10, 13 и 15.

Следующий объект для моделирования был выбран на пересечении Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров (рис. 11). Режим работы светофоров на перекрестке приведен в таблице 1, схема организации движения по его полосам показана на рисунке 12.

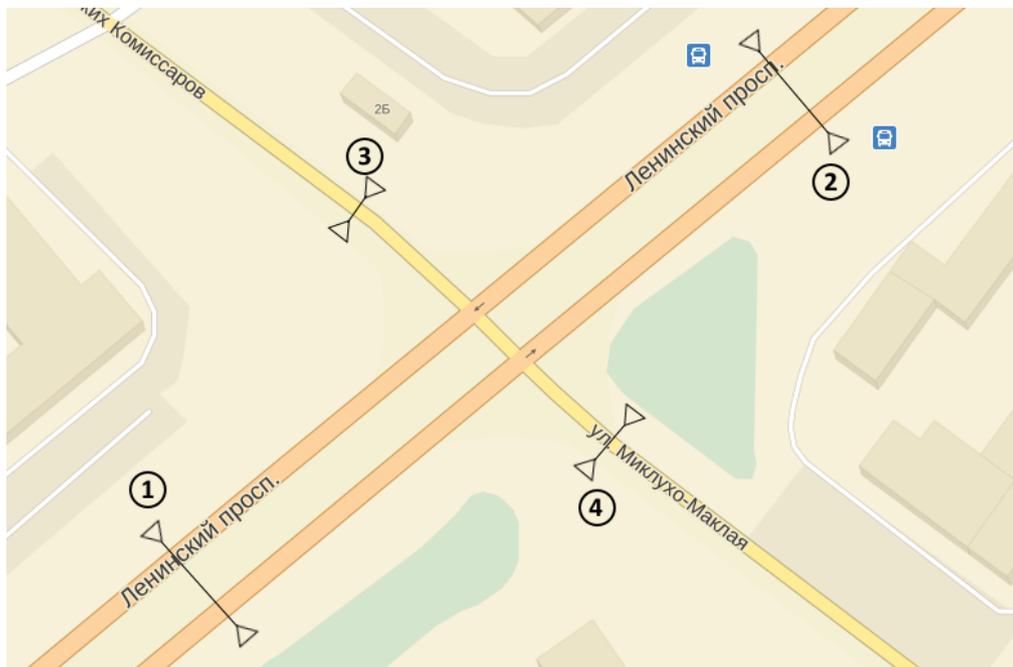


Рис. 11. Перекресток на пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров г. Москвы. Расположение датчиков, измеряющих интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам, показано маркерами 1–4

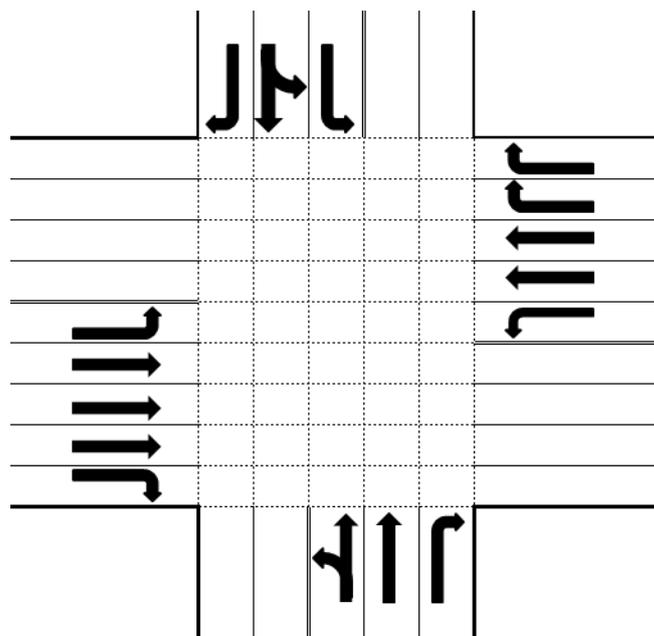
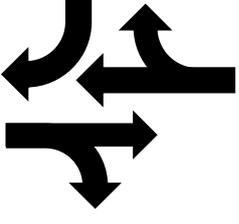
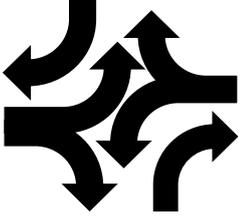
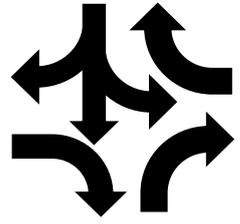
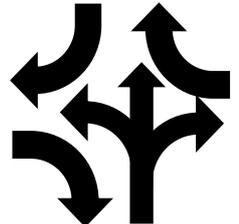


Рис. 12. Схема организации движения по полосам на пересечении Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров г. Москвы. Разрешенные направления движения на перекрестке показаны стрелками

Таблица 1. Режимы работы светофорных объектов на пересечении Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров

Фаза №1	Фаза №2	Фаза №3	Фаза №4
			
98 с	36 с	30 с	36 с

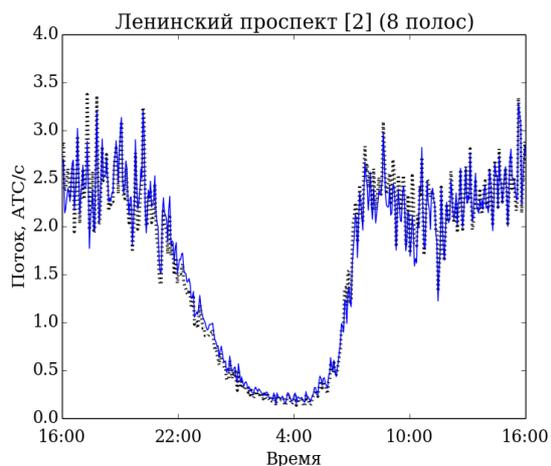
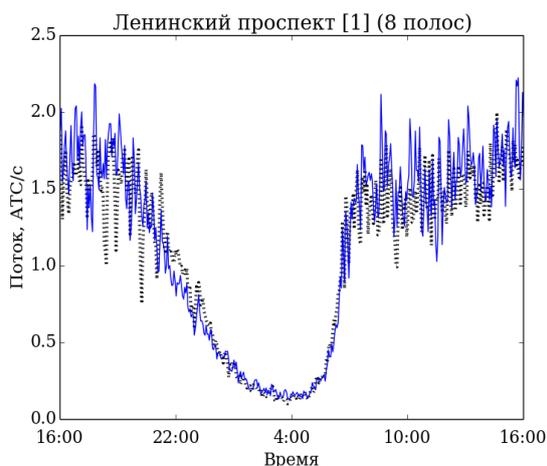


Рис. 13. Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Ленинском проспекте (синий цвет) в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (№ 1 и № 2 на рис. 9) с 5-минутным временным интервалом

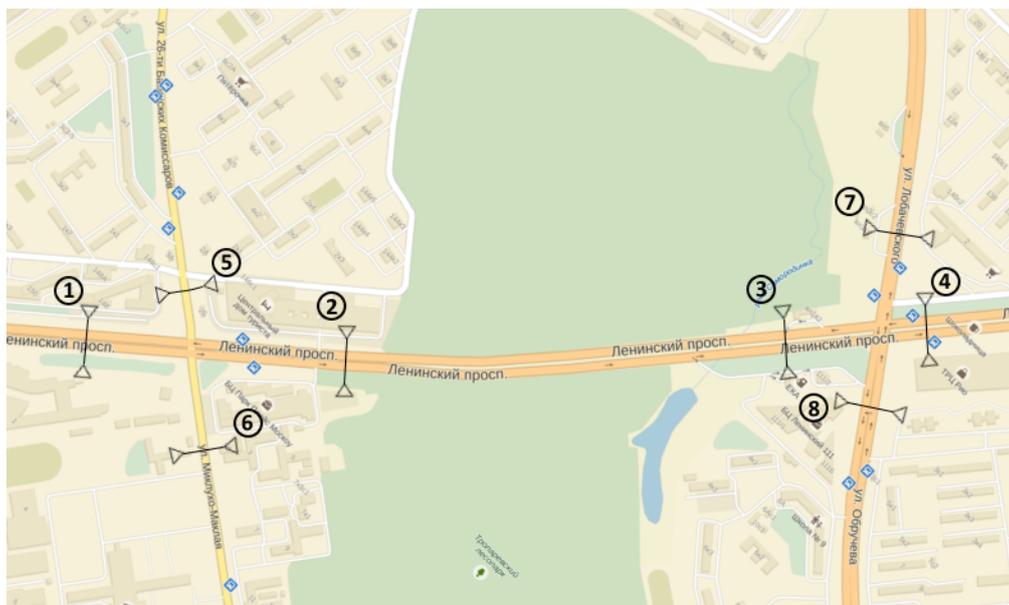


Рис. 14. Перекрестки на пересечении Ленинского проспекта с улицами Лобачевского и 26 Бакинских комиссаров. Расположение датчиков, измеряющих интенсивности и скорости транспортных потоков по дорожным полосам, показано цифровыми маркерами 1–8

И последним объектом стало пересечение Ленинского проспекта и ул. Лобачевского (рис. 14). Его выбрали исходя из того, что он расположен по Ленинскому проспекту сразу за пересечением с ул. 26 Бакинских комиссаров и между этими перекрестками практически нет прилегающих съездов и выездов на Ленинский проспект.

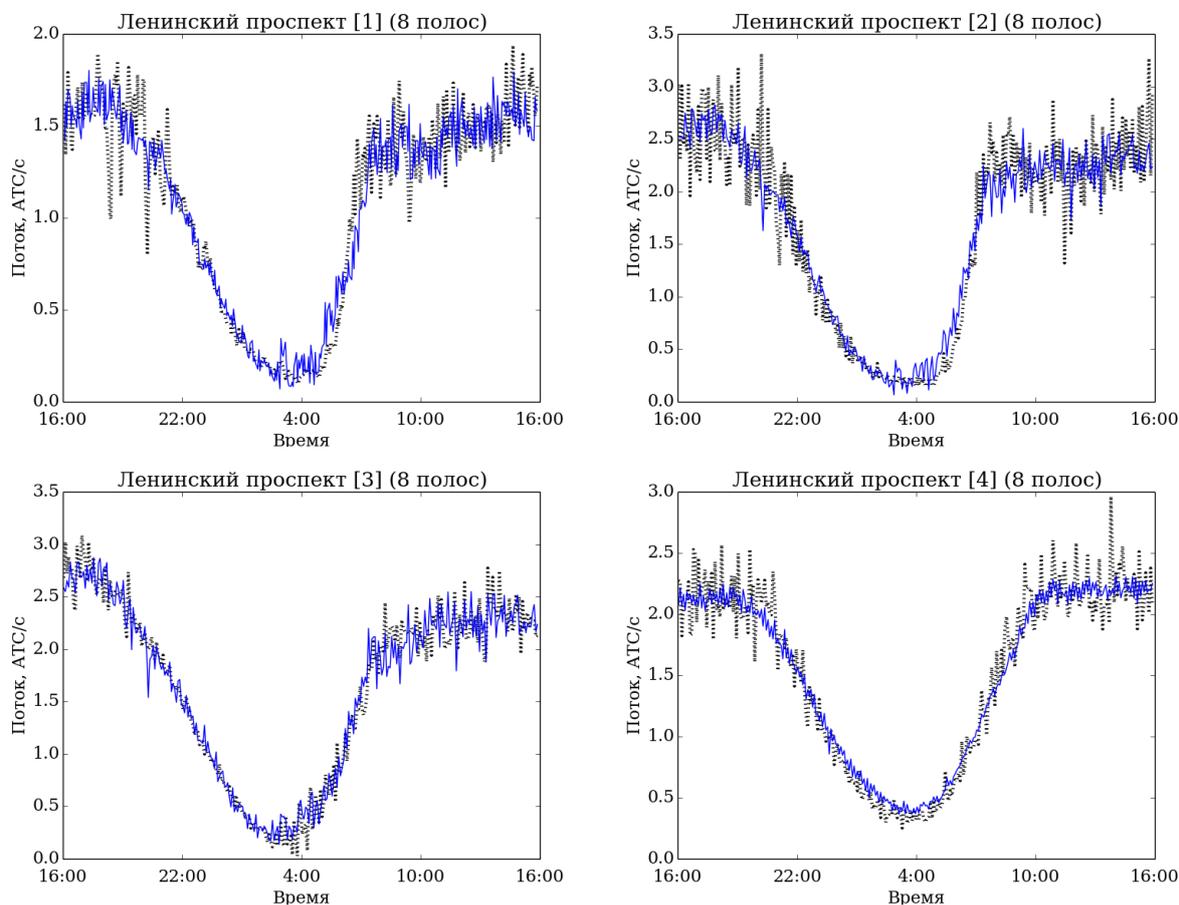


Рис. 15. Сравнение усредненных по всем полосам движения расчетных значений транспортных потоков на Ленинском проспекте (синий цвет) в зависимости от времени суток за период с 16:00 одного рабочего дня по 16:00 следующего рабочего дня в сравнении с данными экспериментальных наблюдений (серые маркеры), полученными с датчиков (№ 1–4 на рис. 14) с 5 минутным временным интервалом

Заключение

В данной работе исследовалась проблема описания автомобильного движения на регулируемом перекрестке произвольной конфигурации. При этом использовался макроскопический подход, когда транспортный поток описывается нелинейной системой гиперболических уравнений для плотности и скорости потока. Система уравнений замыкается уравнением состояния в виде зависимости давления от плотности, полученном эмпирически для данного участка транспортной сети. В рамках предлагаемого подхода была разработана новая макроскопическая гидродинамическая модель, описывающая автомобильное движение на дорожном перекрестке и учитывающая как распределение светофорных фаз, так и существующую дорожную разметку на перекрестке. Модель реализована в виде комплекса программ, позволяющего проводить расчеты с использованием реальных дорожных данных.

Работоспособность комплекса программ проверена с использованием системы сбора данных Navigator центра организации дорожного движения правительства Москвы. В качестве

экспериментальных объектов в г. Москве были выбраны следующие перекрестки: пересечение Ленинского проспекта и ул. 26 Бакинских комиссаров (рис. 11); круговое движение на пересечении Пролетарского проспекта и Кавказского бульвара (рис. 13); система из двух последовательных перекрестков на Ленинском проспекте (рис. 15). Данные перекрестки были выбраны в связи с тем, что все их въезды и выезды оборудованы датчиками (показаны цифровыми маркерами на рис. 9, 12, 14), измеряющими интенсивности и скорости транспортных потоков по всем дорожным полосам. Проведенные расчеты и полученные результаты показали, что разработанная модель хорошо воспроизводит реальную ситуацию на дорожных перекрестках городской транспортной сети на значительных временных интервалах.

Дальнейшее развитие данной работы подразумевает решение задач оптимизации и управления транспортными потоками через адаптивное регулирование светофоров, расположенных в узлах графа исследуемой транспортной сети.

Список литературы

- Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сб. — 1959. — Т. 47(89), № 3. — С. 271–306.
- Магомедов К. М., Холодов А. С. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений // Журнал выч. математики и мат. физики. — 1969. — Т. 9, № 2. — С. 373–386.
- Морозов И. И., Гасников А. В., Тарасов В. Н., Холодов Я. А., Холодов А. С. Численное исследование транспортных потоков на основе гидродинамических моделей // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 389–412.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- Холодов А. С., Холодов Я. А. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // Журнал выч. математики и мат. физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1560–1588.
- Холодов Я. А., Холодов А. С., Гасников А. В., Морозов И. И., Тарасов В. Н. Моделирование транспортных потоков — актуальные проблемы и перспективы их решения // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 4(8). — С. 64–74.
- Aw A., Rascle M. Resurrection of “second order” models of traffic flow // SIAM Journal of Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 60. — P. 916–938.
- Coclite G. M., Piccoli B. Traffic Flow on a Road Network // SIAM J. Math. Anal. — 2005. — Vol. 36(6). — P. 1862–1886.
- Costeseque G., Lebacque J. P. Intersection modeling using a convergent scheme based on Hamilton-Jacobi equation // Procedia — Social and Behavioral Sciences. — 2012. — Vol. 54(4). — P. 736–748.
- Garavello M., Piccoli B. A Multibuffer Model for LWR Road Networks // Complex Networks and Dynamic Systems. — 2013. — Vol. 2. — P. 143–161.
- Garavello M., Piccoli B. Traffic Flow on a Road Network Using the Aw–Rascle Model // Communications in Partial Differential Equations. — 2006. — Vol. 31(2). — P. 243–275.
- Haut B., Georges Bastin G. A second order model of road junctions in fluid models of traffic networks // Networks and heterogeneous media. — 2007. — Vol. 2(2). — P. 227–253.
- Kholodov A. S., Kholodov Y. A. Computational models on graphs for the nonlinear hyperbolic system of equations // Proceedings of ASME 2004 PVP Conference. — 2004. — Vol. 476. — P. 161–167.
- Payne H. J. Models of freeway traffic and control, in: Simulation Council Proc. 28, Mathematical Models of Public Systems. Edited by G.A. Bekey. — 1971. — Vol. 1. — P. 51–61.