КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 4 С. 465–477

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9

Краевые задачи типа interface conditions для дифференциально-алгебраических систем

С. М. Чуйко

Славянский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Г. Батюка, 19

E-mail: chujko-slav@inbox.ru

Получено 20 марта 2014 г.,
после доработки 26 июля 2014 г.

Найдены достаточные условия разрешимости, а также конструкция обобщенного оператора Грина линейной нетеровой краевой задачи для вырожденной линейной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием типа interface conditions.

Ключевые слова: краевые задачи, дифференциально-алгебраические системы, импульсное воздействие, interface conditions

Boundary value problems for differential-algebraic systems with interface conditions

S. M. Chuiko

Slavyansk State Pedagogical University, 19 G. Batuka street, Donetsk region, Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. — We find sufficient conditions for the solvability and construction of the generalized Green's operator for linear Noether boundary value problem for degenerate linear differential-algebraic system with interface conditions.

Keywords: boundary value problems, differential-algebraic systems, pulse action, interface conditions

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 465–477 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0109U000381.

Постановка задачи

Исследуем задачу о построении решений [Самойленко, Перестюк, 1987; Sčhwabik, 1980; Boichuk, Samoilenko, 2004]

$$z(t) \in \mathbb{C}^1\Big\{[a;b] \setminus \{\tau_i\}_I\Big\}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ p$$

вырожденной ($k \neq n$) дифференциально-алгебраической системы [Бояринцев, Чистяков, 1998; Campbell, 1980; Чистяков, 1996; Чистяков, Щеглова, 2003; Хайрер, Ваннер, 1999; Бойчук, Шегда, 2007]

$$A(t)\ \frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad f(t) \in \mathbb{C}[a,b] \tag{1}$$

с импульсным воздействием типа interface conditions [Чуйко, 2001a; Чуйко, 2001b; Pignani, Whyburn, 1956]

$$\ell_i z(\cdot) = \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^m, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ p, \tag{2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$- $(k \times n)$-мерные матрицы, непрерывные на отрезке $[a;b]$; $\ell_i z(\cdot)$ — линейные векторные функционалы вида

$$\ell_i z(\cdot) = \sum_{j=0}^{i} \ell_i^{(j)} z(\cdot): \quad \mathbb{C}\Big\{[a, \tau_{i+1}\ [\ \setminus\{\tau_1,\ \ldots,\ \tau_i\}_I\Big\} \to \mathbb{R}^m,$$

где

$$\ell_i^{(0)} z(\cdot): \ \mathbb{C}[a,\tau_1[\to \mathbb{R}^m,\ \ldots,\quad \ell_i^{(i)} z(\cdot): \ \mathbb{C}[\tau_i,\tau_{i+1}[\to \mathbb{R}^m, \quad i = 1,\ \ldots\ ,\ p-1,\ \ldots\ ,$$
$$\ell_p^{(0)} z(\cdot): \ \mathbb{C}[a,\tau_1[\to \mathbb{R}^m,\ \ldots,\quad \ell_p^{(p)} z(\cdot): \ \mathbb{C}[\tau_p,b] \to \mathbb{R}^m$$

— линейные ограниченные функционалы. Достаточные условия однозначной разрешимости и структура гладкого решения двухточечной краевой задачи для системы (1) были получены в монографии [Campbell, 1980]. Условия существования и структура непрерывных решений нетеровой краевой задачи для системы (1) в общем случае ($k \neq n$) были получены в монографии [Бояринцев, Чистяков, 1998] с использованием понятия совершенных троек матриц. Конструктивные условия разрешимости и структура гладкого решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае $k = n$ получены в монографиях [Чистяков, 1996; Чистяков, Щеглова, 2003] с использованием центральной канонической формы. Эффективные численные методы решения дифференциально-алгебраических систем (1) в случае $k = n$ получены в монографии [Хайрер, Ваннер, 1999]. Целью данной статьи является нахождение конструктивных достаточных условий разрешимости задачи Коши и линейной нетеровой краевой задачи (1), (2) с импульсным воздействием interface conditions в общем случае $k \neq n$, в частности, для переопределенных ($k > n$) и недоопределенных ($k \leq n$) вырожденных дифференциально-алгебраических систем.

Достаточные условия в случае разрешимости относительно производной

Обозначим $P_{A^*(t)}$ ортопроектор $P_{A^*(t)} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{N}(A^*(t))$ матрицы $A^*(t)$, транспонированной к матрице $A(t)$ на $\mathbb{N}(A^*(t))$ — нуль-пространство матрицы $A^*(t)$. При условии [Чуйко, 2011; Чуйко, 2013a; Чуйко, 2013b]

$$P_{A^*(t)}B(t) = 0, \quad P_{A^*(t)}f(t) = 0 \tag{3}$$

однородная часть системы (1) разрешима относительно производной: $z' = A^+(t)B(t)z$ по меньшей мере одним способом. Обозначим $X_0(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$X_0'(t) = A^+(t)B(t)X_0(t),\ X_0(a) = I_n$ полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [Boichuk, Samoilenko, 2004]. При условии (5) система (1) имеет непрерывное решение вида

$$z(t,c) = X_0(t)c + K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t),\ K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t) := X_0(t)\int\limits_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)ds.$$

При условии $P_{A^*(t)}B(t) = 0$ фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи

$$z' = A^+(t)B(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell_i z(\cdot) = 0$$

ищем в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)W_0, & W_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)W_1, & W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots\dots, \\ X_0(t)W_p, & W_p \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad t \in [\tau_p;b]. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $A^+(t)$ — псевдообратная по Муру–Пенроузу матрица [Boichuk, Samoilenko, 2004]. Матрицу $A^+(t)B(t)$ при этом предполагаем непрерывной. В статье [Sčhwabik, 1980] фундаментальная матрица $X(t)$ была найдена в предположении $W_0 = I_n$, что приводило к дополнительным условиям разрешимости однородной части системы (1), (2). Таким образом, целью данной статьи является нахождение решений системы (1), (2) с импульсным воздействием типа interface conditions без ограничения $W_0 = I_n$.

Для нахождения матриц $W_0, W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ используем уравнение

$$Q_1W_1 + \ell_1^{(0)}X_0(\cdot)W_0 = 0, \quad Q_1 := \ell_1^{(1)}X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимое относительно матрицы $W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)W_0 = 0;$$

последнее равенство обеспечивает матрица

$$W_0 = \mathcal{P}_1U_1 \in \mathbb{N}\Big[P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\Big], \quad U_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathcal{P}_1 := P_{\left[P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\right]} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Здесь $P_{Q_1^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_1^*)$, $P_{\left[P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\right]}$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\Big[P_{Q_1^*}\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\Big].$$

При $p = 1$ положим $U_1 = I_n$; если же $p > 1$, то матрица будет определена из условия разрешимости в моменты времени $\tau_2,\ \tau_3,\ \dots$ однородной части задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа interface conditions. Таким образом,

$$W_1 = -Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)W_0 + P_{Q_1}V_1 \cdot U_1, \quad V_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det V_1 \neq 0.$$

Для нахождения матрицы $W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ используем уравнение

$$Q_2W_2 + \ell_2^{(0)}X_0(\cdot)W_0 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)W_1 = 0, \quad Q_2 := \ell_2^{(2)}X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимое относительно матрицы $W_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_2^*}\Big\{\ell_2^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)}X_0(\cdot)\Big[P_{Q_1}V_1 - Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\Big]\Big\}U_1 = 0;$$

последнее равенство обеспечивает матрица $U_1 = \mathcal{P}_2 U_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где

$$\mathcal{P}_2 := P_{P_{Q_2^*}\left\{\ell_2^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\left[P_{Q_1} V_1 - Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\}}.$$

Здесь $P_{Q_2^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_2^*)$,

$$\mathcal{P}_2 = P_{P_{Q_2^*}\left[\ell_2^{(0)} X_0(\cdot) W_0 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot) W_1\right]}\Big|\ U_1 = I_n$$

— ортопроектор:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\left\{\ell_2^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\left[P_{Q_1} V_1 - Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\}.$$

Таким образом,

$$W_2 = -Q_2^+\left\{\ell_2^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1 + \ell_2^{(1)} X_0(\cdot)\left[P_{Q_1} V_1 - Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\right]\right\}\mathcal{P}_2 \cdot U_2 + P_{Q_2} V_2 \cdot U_2,$$

при этом

$$W_0 = \mathcal{P}_1 U_1 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \cdot U_2, \quad W_1 = -Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 \cdot U_2 + P_{Q_1} V_1 \mathcal{P}_2 \cdot U_2, \quad \det V_2 \neq 0.$$

При $p = 2$ положим $U_2 = I_n$; если же $p > 2$, то матрица будет определена из условия разрешимости в моменты времени $\tau_3,\ \tau_4,\ \ldots$ однородной части задачи (1), (2). Продолжая рассуждения, для нахождения матрицы $W_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ используем уравнение

$$Q_p W_p + \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i = 0, \quad Q_p := \ell_p^{(p)} X_0(\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

разрешимое относительно матрицы $W_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ тогда и только тогда, когда

$$P_{Q_p^*} \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i = 0,$$

последнее равенство обеспечивает матрица $U_{p-1} = \mathcal{P}_p U_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, где

$$\mathcal{P}_p := P_{P_{Q_p^*} \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i}\Big|\ U_{p-1} = I_n.$$

Здесь $P_{Q_p^*}$ — ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{N}(Q_p^*)$, $\mathcal{P}_p$ — ортопроектор:

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{N}\left[P_{Q_p^*} \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i\right].$$

Таким образом, при условии $P_{A^*(t)} B(t) = 0$ однородная часть краевой задачи (1), (2) имеет решение $z(t, c) = X(t)c,\ c \in \mathbb{R}^n$, представимое фундаментальной матрицей (4), где

$$W_0 = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_p \cdot U_p, \quad W_1 = -Q_1^+ \ell_1^{(0)} X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_3 \cdot U_p + P_{Q_1} V_1 \mathcal{P}_2 \ldots \mathcal{P}_p \cdot U_p\ ,\ \ldots\ ,$$

$$W_p = -Q_p^+ \sum_{i=0}^{p-1} \ell_p^{(i)} X_0(\cdot) W_i + P_{Q_p} V_p \cdot U_p, \quad V_p \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det V_p \neq 0, \quad U_p = I_n.$$

При условии
$$P_{A^*(t)}B(t) = 0, \quad P_{A^*(t)}f(t) = 0, \quad A^+(t)f(t) \in \mathbb{C}[a,b] \tag{5}$$
решение неоднородной дифференциально-алгебраической задачи (1), (2) с импульсным воздействием типа interface conditions ищем в виде
$$G\Big[A^+(s)f(s);\alpha_i\Big](t) = \begin{cases} K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t), & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)\gamma_1 + K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ X_0(t)\gamma_p + K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t), & t \in [\tau_p;b], \end{cases}$$
где
$$K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t) := X_0(t)\int\limits_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)ds$$
— оператор Грина задачи Коши для неоднородной дифференциально алгебраической системы (1), $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_p$ — постоянные:
$$\gamma_i = Q_i^+\Big\{\alpha_i - \ell_i K\Big[A^+(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ p.$$
Следуя традиционной классификации краевых задач [Boichuk, Samoilenko, 2004], случай $P_{Q_i^*} \neq 0$ по меньшей мере для одного $i = 1,\ 2,\ \ldots\ p$, назовем критическим; в этом случае условия существования и вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующая лемма.

Лемма. *При условии* $P_{A^*(t)}B(t) = 0,\ A^+(t)B(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ *однородная часть задачи* (1), (2) *имеет решение* $z(t,c) = X(t)c,\ c \in \mathbb{R}^n$, *представимое фундаментальной матрицей* (4), *где*
$$W_0 = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\ \ldots\ \mathcal{P}_p\cdot U_p,\ W_1 = -Q_1^+\ell_1^{(0)}X_0(\cdot)\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\ \ldots\ \mathcal{P}_3\cdot U_p + P_{Q_1}V_1\mathcal{P}_2\ \ldots\ \mathcal{P}_p\cdot U_p\ ,\ \ldots,$$
$$W_p = -Q_p^+\sum_{i=0}^{p-1}\ell_p^{(i)}X_0(\cdot)W_i + P_{Q_p}V_p\cdot U_p, \quad V_p \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det V_p \neq 0, \quad U_p = I_n.$$
При условии (5) *линейная неоднородная задача для дифференциально алгебраической системы* (1) *с импульсным воздействием типа interface conditions* (2) *в критическом случае разрешима тогда и только тогда, когда выполнены условия*
$$P_{Q_i^*}\Big\{\alpha_i - \ell_i K\Big[A^+(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ p, \tag{6}$$
в этом случае задача (1), (2) *имеет решение*
$$z(t,c) = X(t)c + G\Big[A^+(s)f(s);\alpha_i\Big](t), \quad c \in \mathbb{R}^n,$$
представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ *вида* (4) *и обобщенным оператором Грина*
$$G\Big[A^+(s)f(s);\alpha_i\Big](t) := \begin{cases} K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t), & t \in [a;\tau_1], \\ X_0(t)Q_1^+\Big\{\alpha_1 - \ell_1 K\Big[A^+(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t), & t \in [\tau_1;\tau_2], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ X_0(t)Q_p^+\Big\{\alpha_p - \ell_p K\Big[A^+(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\} + K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t), & t \in [\tau_p;b] \end{cases}$$
задачи (1), (2) *с импульсным воздействием типа interface conditions.*

Пример 1. Требованиям доказанной леммы удовлетворяет задача о построении 2π-периодических решений переопределенной дифференциально-алгебраической системы с импульсным воздействием типа interface conditions

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad t \in [0; 2\pi], \quad t \neq \frac{2\pi}{3}, \quad t \neq \frac{4\pi}{3}, \quad \ell_i z(\cdot) = \alpha_i, \tag{7}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad f(t) := \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}.$$

$$\ell_1 z(\cdot) := z\left(\frac{2\pi}{3} + 0\right) - z\left(\frac{4\pi}{3} - 0\right), \; \ell_2 z(\cdot) := z(0) - z(2\pi), \; \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \; \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A(t)$ определяет непрерывную псевдообратную матрицу $A^+(t)$ и ортопроектор

$$A^+(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t & -2\sin t & \cos t \\ \sin t & 2\cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad P_{A^*(t)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$A^+(t)B(t) = J_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^+(t)f(t) = \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Условие (5) выполнено, следовательно решение однородной части дифференциально алгебраической системы (7) определяет нормальная ($X(0) = I_2$) фундаментальная матрица

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

при этом $Q_1 = O_2$, следовательно $P_{Q_1^*} = I_2$, $\mathcal{P}_1 = O_2$ и $W_0 = O_2$. Таким образом, для задачи (7) имеет место критический случай. Поскольку $\ell_1^{(0)} X_0(\cdot) = I_2$, постольку $W_1 = I_2$. Кроме того, невырождена матрица $Q_2 = -I_2$, следовательно $P_{Q_2} = P_{Q_2^*} = O_2$, при этом $\mathcal{P}_2 = I_2$, $W_2 = O_2$. Таким образом,

$$X(t) = \begin{cases} O_2, & t \in [0; \frac{2\pi}{3}[, \\ X_0(t), & t \in [\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}[, \\ O_2, & t \in [\frac{4\pi}{3}; 2\pi]. \end{cases}$$

Оператор Грина задачи Коши для неоднородной дифференциальной системы (7)

$$K\Big[A^+(s)f(s)\Big](t) := X_0(t)\int_a^t X_0^{-1}(s)A^+(s)f(s)ds = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sin t + \sin 3t \\ \cos t - \cos 3t \end{pmatrix}$$

определяет условие разрешимости (6) задачи (7) для $i = 1$, при этом

$$\gamma_1 = Q_1^+\Big\{\alpha_1 - \ell_1 K\Big[A^+(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Поскольку $P_{Q_2^*} = O_2$, постольку условие разрешимости (6) задачи (7) для $i = 2$ выполнено, при этом

$$\gamma_2 = Q_2^+\Big\{\alpha_2 - \ell_2 K\Big[A^+(s)f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0.$$

Таким образом, для задачи (7)

$$K\Big[A^{+}(s)f(s)\Big](t) \equiv G\Big[A^{+}(s)f(s);\alpha_i\Big](t).$$

Доказанная лемма является обобщением аналогичных утверждений [Чуйко, 2001a; Чуйко, 2001b] на случай дифференциально-алгебраических систем, с другой стороны лемма является обобщением аналогичных утверждений [Boichuk, Pokutnyi et al, 2013; Boichuk, Langerova et al., 2013] на случай с импульсного воздействия типа interface conditions.

Случай неразрешимости относительно производной

Предположим, что псевдообратная матрица $B^{+}(t)$ непрерывна и условие $P_{A^*(t)}B(t) = 0$ не выполнено; при этом однородная часть системы (1) не разрешима относительно производной. При условии [Чуйко, 2013a; Чуйко, 2013b]

$$P_{A^*(t)}B(t) \neq 0, \quad P_{B^*(t)}A(t) = 0, \quad P_{B^*(t)}f(t) = 0, \quad B^{+}(t) \in \mathbb{C}[a,b] \tag{8}$$

однородная часть системы (1) по меньшей мере одним способом разрешима относительно неизвестной $z = B^{+}(t)A(t)\cdot z'$. Предположим, что матрица $B^{+}(t)A(t)$ постоянного ранга δ и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при этом неособенным ($\det S(t) \neq 0$) преобразованием подобия $B^{+}(t)A(t) = S(t)J(t)S^{-1}(t)$ она приводится к жордановой форме

$$J(t) = \begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}, \quad J_\delta(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \quad \det J_\delta(t) \neq 0, \quad O_\omega \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

Обозначим вектор

$$y(t) = S^{-1}(t)z(t) := \operatorname{col}\Big(u(t), v(t)\Big), \quad u(t) \in \mathbb{R}^{\delta}, \quad v(t) \in \mathbb{R}^{\omega}, \quad \omega := n-\delta.$$

При условии (8) однородная часть системы (1)

$$J(t)\cdot y' = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big)\cdot y$$

приводится к виду

$$\begin{pmatrix} J_\delta(t) & O \\ O & O_\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big)\cdot\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Отметим, что уравнение (9), вообще говоря, не разрешимо относительно производных, поскольку

$$P_{J^*(t)}\Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) = P_{J^*(t)} \neq 0;$$

здесь ортопроектор

$$P_{J^*(t)} = \begin{pmatrix} O_\delta(t) & O \\ O & I_\omega \end{pmatrix}, \quad P_{J^*(t)}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(J^*(t))$$

и матрица

$$S^{-1}(t)S'(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t) \\ \mathfrak{S}_{\omega\delta}(t) & \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) \in \mathbb{R}^{\delta\times\delta}, \quad \mathfrak{S}_{\omega\omega}(t) \in \mathbb{R}^{\omega\times\omega}.$$

С другой стороны, уравнение (9) разрешимо при условии $v(t) \equiv 0$. Для нахождения первой из компонент $u(t) \in \mathbb{R}^{\delta}$ вектора $y(t)$ используем систему обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = (J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)) \cdot u$. Предположим, что матрица $J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ непрерывна; обозначим $Y_{\delta}(t)$ нормальную фундаментальную матрицу

$$Y_{\delta}'(t) = \Big(J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big) \cdot Y_{\delta}(t), \quad Y_{\delta}(a) = I_{\delta}.$$

Однородная часть системы (1) имеет решение $y(t, c_{\delta}) = Y(t)c_{\delta},\ c_{\delta} \in \mathbb{R}^{\delta}$, определяемое матрицей

$$Y(t) = \begin{pmatrix} Y_{\delta}(t) \\ O \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (8) однородная часть системы (1) в случае непрерывности матрицы $J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ имеет решение вида

$$z(t, c_{\delta}) = X_0(t)c_{\delta}, \quad X_0(t) = S(t) \cdot Y(t) \in \mathbb{R}^{n\times\delta}, \quad c_{\delta} \in \mathbb{R}^{\delta},$$

при этом задача Коши $z(a) = c$ для однородной части вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) разрешима для любого вектора [Boichuk, Samoilenko, 2004]

$$c \in \mathbb{R}(X_0(t)), \quad \mathbb{R}^{n} = \mathbb{R}(X_0(t)) \oplus \mathbb{N}(X_0^*(t)), \quad \mathbb{R}^{\delta} = \mathbb{N}(X_0(t)) \oplus \mathbb{R}(X_0^*(t));$$

здесь $P_{X_0(t)}$ — ортопроектор матрицы $X_0(t)$. При условии (8) неоднородная система (1) приводится к виду

$$J(t) \cdot y' = \Big(I_n - J(t)S^{-1}(t)S'(t)\Big) \cdot y + S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t). \tag{10}$$

Неоднородность $S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t)$ системы (10) представима двумя компонентами

$$S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t) = \operatorname{col}\Big(\varphi(t), \psi(t)\Big),$$

где

$$\varphi(t) = \Big(I_{\delta} \quad O\Big)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t) \in \mathbb{R}^{\delta}, \quad \psi(t) = \Big(O \quad I_{n-\delta}\Big)S^{-1}(t)B^{+}(t)f(t) \in \mathbb{R}^{\omega}.$$

Система (10) расщепляется на обыкновенное дифференциальное и функциональное уравнения

$$u' = \Big(J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)\Big) \cdot u + J_{\delta}^{-1}(t)\varphi(t) + \psi(t), \quad v + \psi(t) = 0.$$

При условии $\varphi(t) \in \mathbb{C}[a, b], \quad \mathfrak{S}_{\delta\omega}(t)\psi(t) \in \mathbb{C}^1[a, b]$ система (10) имеет решение вида

$$y(t, c) = Y(t)c_{\delta} + K\Big[\varphi(s), \psi(s)\Big](t), \ c_{\delta} \in \mathbb{R}^{\delta},$$

где

$$K\Big[\varphi(s), \psi(s)\Big](t) := \begin{pmatrix} Y_{\delta}(t) \int\limits_a^t Y_{\delta}^{-1}(s)\Big(J_{\delta}^{-1}(s)\varphi(s) + \mathfrak{S}_{\delta\omega}(s)\psi(s)\Big)ds \\ -\psi(t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при условии (8) для непрерывной матрицы $J_{\delta}^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ система (1) имеет решение вида

$$z(t, c_{\delta}) = X_0(t)c_{\delta} + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), \quad c_{\delta} \in \mathbb{R}^{\delta}, \quad \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) = S(t) \cdot K\Big[\varphi(s), \psi(s)\Big](t).$$

При условии (8) в случае непрерывности матрицы $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ частное решение неоднородной дифференциально алгебраической задачи с импульсным воздействием (1), (2) ищем в виде

$$\mathcal{G}\Big[f(s);\alpha_i\Big](t) = \begin{cases} \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ X_0(t)\gamma_p + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\tau_p;b]. \end{cases} \tag{11}$$

Здесь

$$\gamma_i = Q_i^+\Big\{\alpha_i - \ell_i\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\}, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ p.$$

В критическом случае условия существования и вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что матрица* $B^+(t)A(t)$ *постоянного ранга* δ *и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии* (8) *в случае непрерывности матрицы* $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ *однородная часть линейной вырожденной дифференциально-алгебраической задачи* (1), (2) *с импульсным воздействием типа interface conditions*

$$A(t)\ dz/dt = B(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell_i z(\cdot) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ p$$

имеет решение

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta, \quad \delta = \text{rank}\ B^+(t)A(t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ *вида* (4)*; в этом случае неоднородная задача* (1), (2) *при условии*

$$P_{Q_i^*}\Big\{\alpha_i - \ell_i\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ p, \tag{12}$$

имеет решение

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{G}\Big[f(s);\alpha_i\Big](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где

$$\mathcal{G}\Big[f(s);\alpha_i\Big](t) = \begin{cases} \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [a;\tau_1], \\ X_0(t)Q_1^+\Big\{\alpha_1 - \ell_1\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\tau_1;\tau_2], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ X_0(t)Q_p^+\Big\{\alpha_p - \ell_p\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot)\Big\} + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\tau_p;b]. \end{cases}$$

— обобщенный оператор Грина задачи (1)*,* (2) *с импульсным воздействием типа interface conditions в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы* (1) *относительно производной. Здесь*

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) = S(t) \cdot K\Big[\varphi(s), \psi(s)\Big](t)$$

— обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (1) *в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы* (1) *относительно производной.*

Доказанная теорема является обобщением аналогичных утверждений [Чуйко, 2001a; Чуйко, 2001b] на случай дифференциально-алгебраических систем, с другой стороны теорема является обобщением аналогичных утверждений [Boichuk, Pokutnyi et al, 2013; Boichuk, Langerova et al., 2013] на случай с импульсного воздействия типа interface conditions. Существенным отличием вырожденной дифференциально-алгебраической системы (1) в случае $\omega \neq 0$ является прямоугольность матрицы $X_0(t)$, не позволяющая для решения неоднородной дифференциально-алгебраической системы (1) непосредственно использовать конструкцию оператора Грина задачи Коши [Чуйко, 2001a; Чуйко, 2001b].

Пример 2. Требованиям теоремы удовлетворяет задача о построении решений вырожденной дифференциально-алгебраической системы

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad t \in [-2\pi; 2\pi], \quad t \neq \tau_i := \pm\pi, \quad i = 1,\ 2, \tag{13}$$

с импульсным воздействием типа interface conditions

$$\ell_i z(\cdot) = 0 \in \mathbb{R}^2, \quad \ell_1 z(\cdot) := z(-2\pi) - z(0), \quad \ell_2 z(\cdot) := z(0) - z(2\pi), \tag{14}$$

где

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) := 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $B(t)$ невырождена, следовательно $P_{B^*(t)} = 0$, при этом условие (8) выполнено. Используя матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos 2t}{\sin 2t - 1} \\ \frac{\cos 2t}{\sin 2t - 1} & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t) = -\frac{2\cos t}{\cos t - \sin t},$$

приводим решение $z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^2$ однородной части системы (13) без импульсного воздействия к виду

$$X_0(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix},$$

следовательно

$$P_{Q_1^*} = P_{Q_2^*} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

при этом $\mathcal{P}_1 = 1$. Поскольку $\ell_1^{(0)} X_0(\cdot) = X_0(-2\pi) \neq 0$, постольку $W_1 = e^{2\pi}$. Кроме того, $\mathcal{P}_2 = 1$, следовательно $W_2 = e^{4\pi}$. Таким образом, для задачи (13), (14) имеет место критический случай, при этом однородная часть системы (13) с импульсным воздействием (14) имеет решение $z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^1$, представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ вида (4), где $W_1 = e^{2\pi},\ W_2 = e^{4\pi}$. Обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (13) имеет вид

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix} \cos t + 2\cos 3t - 8\sin t - \sin 3t + 2e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ 8\cos t - \cos 3t + \sin t - 2\sin 3t - 2e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix},$$

при этом

$$\ell_1\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot) = \frac{2\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix} -1 + e^{2\pi} \\ 1 - e^{2\pi} \end{pmatrix}, \quad \ell_2\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot) = \frac{2\sqrt{2}e^{-2\pi}}{5}\begin{pmatrix} -1 + e^{4\pi} \\ 1 - e^{4\pi} \end{pmatrix},$$

следовательно условие (12) выполнено. Обобщенный оператор Грина задачи с импульсным воздействием (13), (14) имеет вид

$$\mathcal{G}\Big[f(s);0\Big](t) = \begin{cases} \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [-2\pi;-\pi], \\ X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [-\pi;\pi], \\ X_0(t)\gamma_2 + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\pi;2\pi]; \end{cases}$$

здесь

$$\gamma_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}\left(e^{2\pi}-1\right), \quad \gamma_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}\left(e^{4\pi}-1\right);$$

при этом задача (13), (14) имеет решение

$$z(t,c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{G}\Big[f(s);0\Big](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^1.$$

В некритическом случае, а именно при условии $P_{Q_i^*} = 0$ для всех $i = 1,\ 2,\ \dots\ p$, требование (12) выполняется, следовательно линейная неоднородная задача (1), (2) с импульсным воздействием типа interface conditions разрешима для любых неоднородностей $f(t) \in C[a,b]$ и $\alpha_i \in \mathbb{R}^m$, при этом вид общего решения задачи (1), (2) определяет следующее утверждение.

Следствие. *Предположим, что матрица* $B^+(t)A(t)$ *постоянного ранга* δ *и не имеет среди собственных чисел нулей геометрической кратности, отличной от алгебраической; при условии* (8) *в случае непрерывности матрицы* $J_\delta^{-1}(t) - \mathfrak{S}_{\delta\delta}(t)$ *однородная часть линейной вырожденной дифференциально-алгебраической задачи* (1), (2) *с импульсным воздействием типа interface conditions*

$$A(t)\ dz/dt = B(t)z, \quad t \neq \tau_i, \quad \ell_i z(\cdot) = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ p$$

имеет решение, представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ *вида* (4)*; в этом случае неоднородная задача* (1), (2) *имеет решение*

$$z(t,c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{G}\Big[f(s);\alpha_i\Big](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^\delta,$$

где $\mathcal{G}\Big[f(s);\alpha_i\Big](t)$ *— обобщенный оператор Грина задачи* (1), (2) *с импульсным воздействием типа interface conditions в случае неразрешимости дифференциально-алгебраической системы* (1) *относительно производной.*

Пример 3. Требованиям следствия удовлетворяет задача о построении решений вырожденной дифференциально-алгебраической задачи с импульсным воздействием типа interface conditions

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t), \quad \ell_i z(\cdot) = 0, \quad t \in [-2\pi;2\pi], \quad t \neq \tau_i := \pm\pi, \quad i = 1,\ 2, \tag{15}$$

где

$$\ell_1 z(\cdot) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big[z(0) - z(\pi - 0)\Big], \quad \ell_2 z(\cdot) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big[z(\pi + 0) - z(2\pi)\Big],$$

кроме того,

$$A(t) := \begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t + 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad f(t) := 4\sqrt{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрица $B(t)$ невырождена, следовательно $P_{B^*(t)} = 0$, при этом условие (8) выполнено. Решение $z(t, c_\delta) = X_0(t)c_\delta,\ c_\delta \in \mathbb{R}^1$ однородной части системы (13) без импульсного воздействия имеет вид

$$X_0(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix},$$

следовательно $P_{Q_1^*} = 0$, при этом $\mathcal{P}_1 = 1$. Таким образом, для задачи (15) имеет место некритический случай. Поскольку $\ell_1^{(0)} X_0(\cdot) = 0$, постольку $W_1 = e^\pi$, при этом однородная часть системы с импульсным воздействием (15) имеет решение, представимое фундаментальной матрицей $X(t)$ вида (4), где $W_1 = e^\pi$. Обобщенный оператор Грина задачи Коши для системы (15) имеет вид

$$\mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t) = \frac{\sqrt{2}}{5}\begin{pmatrix} \cos t + 2\cos 3t - 8\sin t - \sin 3t + 2e^{-t}(-\sin t + \cos t) \\ 8\cos t - \cos 3t + \sin t - 2\sin 3t - 2e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{pmatrix},$$

при этом

$$\ell_1 \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](\cdot) = \frac{2\sqrt{2}}{5}\left(1 - e^{-2\pi}\right).$$

Обобщенный оператор Грина задачи с импульсным воздействием (15) имеет вид

$$\mathcal{G}\Big[f(s); 0\Big](t) = \begin{cases} \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [0; \pi[, \\ X_0(t)\gamma_1 + \mathcal{K}\Big[f(s)\Big](t), & t \in [\pi; 2\pi]; \end{cases}, \quad \gamma_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}\left(e^\pi - 1\right),$$

при этом задача (15) имеет решение

$$z(t, c_\delta) = X(t)c_\delta + \mathcal{G}\Big[f(s); 0\Big](t), \quad c_\delta \in \mathbb{R}^1.$$

Доказанное следствие является обобщением аналогичных утверждений [Чуйко, 2001a; Чуйко, 2001b] на случай дифференциально-алгебраических систем, с другой стороны, следствие является обобщением аналогичных утверждений [Boichuk, Pokutnyi et al, 2013; Boichuk, Langerova et al., 2013] на случай с импульсного воздействия типа interface conditions.

Список литературы

Бойчук А. А., Шегда Л. М. Вирожденные нетеровы краевые задачи // Нелинейные колебания. — 2007. — Т. 10, № 3. — С. 303–312.

Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск: Наука, 1998. — 224 с.

Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.

Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996. — 280 с.

Чистяков В. Ф., Щеглова А. А. Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. — Новосибирск: Наука, 2003. — 317 с.

Чуйко С. М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференциальные уравнения. — 2001a. — Т. 37, № 8. — С. 1132–1135.

Чуйко С. М. Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Доклады Академии наук. Июль, 2001b. — Т. 379, № 2. — С. 170–172.

Чуйко С. М. Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально алгебраических систем // Intern. Conf. Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation, Киев, 25–27 мая 2011 г. Тез. докл. С. 137.

Чуйко С. М. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциально-алгебраических систем // Комп. исследов. и моделирование. — 2013a. — Т. 5, № 5. — С. 769–783.

Чуйко С. М. Линейная нетерова краевая задача для вырожденной дифференциально-алгебраической системы // Spectral and Evolution Problems. — 2013b. — Т. 23. — С. 148–157.

Boichuk A., Langerova M., Ruzickova M., Voitushenko E. Systems of singular differential equations with pulse action // Advances in Difference Equations. — 2013. — Vol. 1. — P. 1–11.

Boichuk A. A., Pokutnyi A. A., Chistyakov V. F. Application of perturbation theory to the solvability analysis of differential algebraic equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 53, № 6. — P. 777–788.

Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.

Campbell S. L. Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.

Pignani T. J., Whyburn W. M. Differential Systems with Interface and General Boundary Conditions // F. Elisha Mitchell Sci. Soc. — 1956. — № 72. — P. 1–14.

Sčhwabik S. Differential Equations with Interface Conditions// Časopis Pro pestovani matematiky. — 1980. — roč. 105. — P. 391–410.