

УДК: 531/534:[57+61]

Конечно-элементный статический анализ механического состояния костного регенерата на различных этапах консолидации в модельной системе остеосинтеза аппаратом Илизарова

Г. Ш. Голубев^{1,a}, М. А. Каргин^{2,b}, А. В. Наседкин^{2,c}, М. Б. Родин^{3,a}

¹Ростовский государственный медицинский университет
Россия, 344022, г. Ростов-на-Дону, пер. Нахичеванский, 29

²Южный федеральный университет
Россия, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а

³Городская больница № 1 им. Н. А. Семашко
Россия, 344010, г. Ростов-на-Дону, пр. Ворошиловский, 105

E-mail: ^a ortho-rostgmu@yandex.ru, ^b misha_kargin@list.ru, ^c nasedkin@math.sfedu.ru

*Получено 11 марта 2014 г.,
после доработки 3 апреля 2014 г.*

Предложена конечно-элементная модель биомеханической системы адекватной сложности (с пространственными, оболочечными и балочными элементами), состоящая из имитатора большеберцовой кости с регенерирующей тканью в месте перелома и аппарата Илизарова. Модель позволяет задавать ортотропные упругие свойства материалов имитатора кости (областей компактной и спонгиозной тканей), вводить неоднородные жесткостные свойства регенерирующей ткани в зоне места перелома, изменять базовые геометрические и механические характеристики модели и параметры конечно-элементной сетки, а также задавать различные внешние воздействия, связанные с нагрузкой на имитатор кости и компрессией или дистракцией между репонирующими кольцами аппарата Илизарова.

С использованием разработанных программ на командном языке APDL в конечно-элементном комплексе ANSYS проведены расчеты напряженно-деформированного состояния в зоне перелома при варьировании статических сжимающих нагрузок на имитатор кости, величин перемещений репонирующих колец аппарата Илизарова и жесткостных свойств соединительной ткани костной мозоли на различных этапах сращения перелома (гелеобразной, хрящевой, спонгиозной и нормальной костных тканей). Представленная методология и разработанные программы позволяют проводить оценки допустимых величин внешних нагрузок на кость и величин перемещений репонирующих колец аппарата Илизарова на различных этапах регенерации кости в процессе заживления, исходя из априорно задаваемых критериев допуска на максимальные характеристики напряжений в костной мозоли. Предлагаемые подходы могут быть использованы в клинических условиях при планировании, реализации и контроле силовых режимов работы при чрескостном остеосинтезе аппаратом Илизарова.

Ключевые слова: большеберцовая кость, аппарат Илизарова, чрескостный остеосинтез, костная мозоль, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, прочность

Работа второго автора выполнена в рамках гранта РФФИ № 12-01-31411-мол_а и проекта № 1334 базовой части задания № 2014/174 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности Минобрнауки России.

Computer analysis of the bone regeneration strength in a model system of osteosynthesis by the Ilizarov fixator with static loads

G. Sh. Golubev¹, M. A. Kargin², A. V. Nasedkin², M. B. Rodin³

¹Rostov State Medical University, 29 Nakhichevsky lane, Rostov on Don, 344022, Russia

²Southern Federal University, 8a Miltchakova st., Rostov on Don, 344090, Russia

³N. A. Semashko City Hospital, 105 Voroshilov av., Rostov on Don, 344010, Russia

Abstract. — The adequate complexity three-dimensional finite element model of biomechanical system with space, shell and beam-type elements was built. The model includes the Ilizarov fixator and tibial bone's simulator with the regenerating tissue at the fracture location. The proposed model allows us to specify the orthotropic elastic properties of tibial bone model in cortical and trabecular zones. It is also possible to change the basic geometrical and mechanical characteristics of biomechanical system, change the finite element mesh density and define the different external loads, such as pressure on the bone and compression or distraction between the repositioned rings of Ilizarov device.

By using special APDL ANSYS program macros the mode of deformation was calculated in the fracture zone for various static loads on the simulator bone, for compression or distraction between the repositioned rings and for various mechanical properties during different stages of the bone regenerate formation (gelatinous, cartilaginous, trabecular and cortical bone remodeling). The obtained results allow us to estimate the permissible values of the external pressure on the bone and of the displacements of the Ilizarov fixator rings for different stages of the bone regeneration, based on the admittance criterion for the maximum of the stresses in the callus. The presented data can be used in a clinical condition for planning, realization and monitoring of the power modes for transosseous osteosynthesis with the external Ilizarov fixator.

Keywords: shinbone, Ilizarov external fixator, transosseous osteosynthesis, callus, finite element method, deflected mode, strength

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 427–440 (Russian).

Работа второго автора выполнена в рамках гранта РФФИ № 12-01-31411-мол_а и проекта № 1334 базовой части задания № 2014/174 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности Минобрнауки России.

Введение

Метод чрескостного компрессионно-дистракционного остеосинтеза достаточно широко применяется при лечении переломов и деформаций опорно-двигательной системы. Проведение спиц через сегменты кости и закрепление их концов в опорных элементах аппарата позволяет осуществлять управляемый остеосинтез: выполнение репозиции фрагментов, их фиксацию в заданном положении, создание и поддержание адекватной межфрагментарной компрессии или дистракции. Для анализа таких сложных биомеханических систем в последнее время с успехом используется компьютерное моделирование, основанное на методе конечных элементов (МКЭ) [Бушманов, Барабаш, 2007; Бушманов, Соловцова, 2012; Верховод, Иванов, 2012; Колмакова, 2013; Маслов, 2010; Маслов, 2003; Маслов, Ликсонов, 2004; Соловцова, 2010; Donaldson et al., 2012; Toumanidou et al., 2011; Watson et al., 2007]. Так, в [Маслов, 2010; Маслов, Ликсонов, 2004] имеется обзор подобных исследований, в [Бушманов, Барабаш, 2007; Бушманов, Соловцова, 2012] с использованием конечно-элементного комплекса NASTRAN был проведен линейный и нелинейный статический анализ имитатора кости с одним модулем и с полной сборкой аппарата Илизарова. Известны результаты моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) систем «кость–аппарат Илизарова» и «кость–блокирующий интрамедуллярный стержень» при статических воздействиях с использованием конечно-элементного пакета ANSYS [Верховод, Иванов, 2012]. В [Маслов, 2010; Маслов, 2003; Маслов, Ликсонов, 2004] МКЭ на основе программного кода MechanicsFE применялся для анализа упругих и пороупругих свойств поврежденной костной ткани при колебаниях кости с аппаратом Илизарова. В [Donaldson et al., 2012; Toumanidou et al., 2011; Watson et al., 2007] анализировались прочностные свойства элементов аппарата Илизарова и его модификаций, причем в [Donaldson et al., 2012] изучались также биомеханические проблемы взаимодействия спиц аппарата с костной тканью.

Вариабельность компоновок аппарата Илизарова и неповторимость биомеханических особенностей поврежденных сегментов у разных индивидуумов требуют поиска методов определения прочностных характеристик регенерата и расчета неразрушающих нагрузок на него в клинических условиях [Lesniewska et al., 2006].

В настоящей работе объектом исследования являлась биомеханическая модель, состоящая из имитатора кости и аппарата Илизарова, а основная цель состояла в определении НДС костной ткани в месте перелома или остеотомии на различных этапах консолидации и при варьировании внешних воздействий, связанных с нагрузкой на кость и компрессией или дистракцией между репозирующими кольцами.

При анализе рассматриваемой системы использовалась техника метода конечных элементов, в программном комплексе ANSYS строились пространственные конечно-элементные модели и решались соответствующие статические задачи в рамках линейной теории упругости.

В результате постпроцессорной обработки характеристик НДС, полученных из конечно-элементных решений статических задач при разнообразных входных данных, были определены допустимые величины внешних сжимающих нагрузок на костный регенерат и деформаций стержней аппарата Илизарова на основных этапах консолидации костной ткани. При этом нелинейные эффекты и процессы разрушения не учитывались, а прочность костной ткани оценивалась по допускам на максимальные напряжения по Мизесу в зоне регенерата [Маслов, Ликсонов, 2004; Образцов и др., 1988; Янсон, 1975].

Отметим, что в работе предложена оригинальная конечно-элементная модель биомеханической системы, состоящая из имитатора кости и упрощенной конструкции аппарата Илизарова. Данная модель, в которой кольца, стержни и спицы аппарата Илизарова были представлены оболочечными и балочными элементами, не предназначена для уточненного анализа НДС в местах прохождения спиц через кость, но за счет сохранения общей жесткости конструкции может использоваться для получения адекватных в рамках принятых предположений оценок НДС в зоне

костного регенерата. При этом принятые упрощения позволили понизить общее число элементов и степеней свободы в модели, что дало возможности для проведения серии экономических расчетов при варьировании материальных свойств костного регенерата и внешних воздействий.

Описание конечно-элементной модели

Аппарат Илизарова включал наборы внешних кольцевых опор, соединительных штанг (стержней) и спиц, служащих связующими звеньями между костью и опорной конструкцией аппарата. Для упрощения анализа кость моделировалась как сегментированный цилиндр. Для неповрежденной компактной и спонгиозной костных тканей и для зоны перелома задавались различные механические свойства.

Построенная твердотельная модель представлена на рисунке 1а в форме опорных линий и кривых, при этом были введены дополнительные линии для удобства задания мест соединения различных объектов. Для дальнейшего формирования экономичной конечно-элементной сетки в геометрической модели для имитатора кости с переломом использовались цилиндрические объемы, для базовых и репонирующих колец аппарата Илизарова — кольцевые поверхности, а для стержней и спиц — линии.

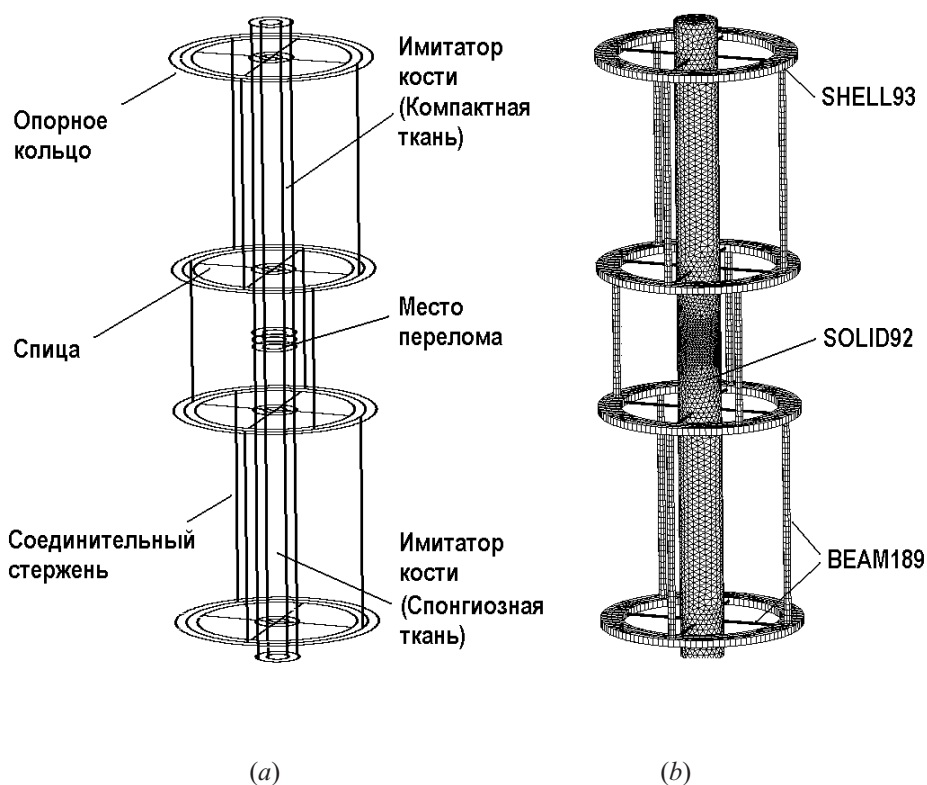


Рис. 2. Биомеханическая система:

(a) — твердотельная модель в линиях; (b) — конечно-элементная модель

Модель имела следующие геометрические размеры: длина имитатора кости — 450 мм; длина зоны перелома — 10 мм; внешний радиус имитатора кости — 15 мм; внутренний радиус для спонгиозной ткани — 7.5 мм; внешний и внутренний радиусы соединительных колец — 70 и 55 мм соответственно; толщина соединительных колец — 5 мм; длина соединительных стержней между базовыми и репонирующими кольцами — 150 мм; длина соединительных стержней

между репонирующими кольцами в зоне перелома — 100 мм; радиус соединительных стержней — 2.5 мм; длина спиц — 80 мм; радиус спиц — 0.75 мм; угол перекреста спиц — 90°. (Здесь с целью упрощения расчетов резьбовые части соединительных стержней не учитывались, и полнотелые части стержней моделировались как цилиндры радиуса 2.5 мм.) Как в проксимальной, так и в дистальной частях системы, опорные и репонирующие кольца соединены между собой тремя стержнями, два из которых проходят через зоны расположения спиц, а третий стержень располагается на равном расстоянии от двух других стержней. Соединительные стержни между репонирующими кольцами располагаются асимметрично соединительным стержням между базовыми и репонирующими кольцами в том смысле, что два стержня проходят через противоположные зоны расположения спиц, а третий стержень располагается на равном расстоянии от этих двух стержней, и, таким образом, в плоскости поперечного сечения оказывается противоположным соответствующим стержням между базовыми и репонирующими кольцами (рис. 1).

Для достижения оптимального соотношения между точностью конечно-элементных расчетов и относительным минимумом вычислительных затрат указанные части конструкции моделировались в ANSYS соответствующими трехмерными структурными, оболочечными и балочными конечными элементами (КЭ) SOLID92, SHELL93 и BEAM189, соответственно. Такой подход представляется вполне оправданным с учетом большей жесткости аппарата в сравнении с костной тканью и тем, что здесь анализ НДС аппарата Илизарова и НДС в зонах контакта костной ткани со спицами не являлся основным объектом исследования.

Пример конечно-элементной модели при некоторых параметрах сетки приведен на рисунке 1b, где стержневые и оболочечные элементы для удобства восприятия показаны с учетом толщины и размеров поперечного сечения. Основным вариантом конечно-элементной сетки, использованный в большинстве расчетов, включал 63089 конечных элементов SOLID92, 1754 элементов SHELL93 и 591 элемент BEAM189 с общим числом степеней свободы, равным 316406.

Предлагаемая конечно-элементная модель позволяет:

- задавать ортотропные упругие свойства материалов имитатора кости (областей компактной и спонгиозной тканей);
- вводить неоднородные механические свойства регенерирующей ткани вблизи места перелома;
- изменять базовые геометрические и механические характеристики модели, параметры конечно-элементного разбиения;
- задавать различные нагрузки на имитатор кости.

Важным свойством модели является возможность учета деформаций стержней посредством уравнений связей с целью осуществления управляемого остеосинтеза с требуемыми величинами усилий компрессии или дистракции. Указанная возможность была реализована с использованием команды SE языка APDL ANSYS. Для этого для каждого из стержней между репонирующими кольцами первоначально определялись номера i, j крайних узлов. Затем, по команде SE для осевых перемещений u_{zi} и u_{zj} этих узлов задавалось уравнение связи $u_{zi} - u_{zj} = \delta$, где δ — принимаемая величина компрессии или дистракции (с учетом знака).

Биомеханические характеристики модели

При статическом анализе нижняя торцевая часть имитатора кости считалась жестко закрепленной. Рассматривались следующие варианты осевых внешних воздействий:

- 1) задана компрессия или дистракция в зоне перелома путем перемещения репонирующих колец на соединительных стержнях на 1 мм;
- 2) к верхнему торцу приложено давление 1 МПа (данное значение с учетом принятого радиуса имитатора кости соответствует силе в 72 кГ, что соизмеримо с обычными весовыми нагрузками);
- 3) создана комбинация компрессии или дистракции с давлением различной интенсивности.

Отметим, что первый тип внешних воздействий может быть промоделирован соответствующими изменениями длины соединительных стержней между репонирующими кольцами. Очевидно, что при этом воздействия на имитатор кости будут такими же, что и при перемещениях репонирующих колец по резьбе вдоль соединительных стержней, но в первом случае деформации стержней удобнее реализовать в рамках конечно-элементных расчетов. В связи с этим в дальнейшем данный тип воздействий будем именовать также компрессией или дистракцией соединительных стержней.

Все ненагруженные и незакрепленные части граничных поверхностей считались свободными от напряжений, а между зонами неоднородностей и между различными контактирующими частями аппарата Илизарова и костной тканью задавались условия жесткого контакта. При этом поскольку в разработанной конечно-элементной модели ее составные части имели общие узлы и элементные грани, то эти условия при расчетах в ANSYS обеспечивались автоматически.

Стержни, кольца и спицы аппарата Илизарова принимались изотропными материалами с плотностью $\rho = 7860$ (кг/м³), модулем Юнга $E = 2.23 \cdot 10^5$ (МПа) и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$ (сталь).

В здоровой кости спонгиозная ткань считалась изотропным материалом с модулем Юнга $E = 500$ (МПа) и модулем сдвига $G = 200$ (МПа) [Маслов, 2003; Маслов, Ликсонов, 2004], а корковая (компактная) часть — ортотропным материалом со следующими параметрами [Kima et al., 2010; Yildiz, Erden, 2001]: $E_x = 8500$, $E_y = 7000$, $E_z = 18400$, $G_{xy} = 2400$, $G_{yz} = 5000$, $G_{xz} = 3600$ (МПа), $\nu_{xy} = 0.37$, $\nu_{yz} = 0.14$, $\nu_{xz} = 0.12$. Ось z здесь считается осью цилиндра имитатора кости; плоскость Oxz — сагиттальной плоскостью; а плоскость Oyz — фронтальной плоскостью.

В зоне перелома задавались различные варианты регенерирующей ткани:

- 1) мягкая гелеобразная ткань, как изотропный материал с $E = 0.005$, $G = 0.00167$ (МПа) [Маслов, 2003; Маслов, Ликсонов, 2004];
- 2) хрящевая ткань на начальном этапе ее образования, как изотропный материал с $E = 3.87$, $G = 1.3$ (МПа) [Маслов, 2003; Маслов, Ликсонов, 2004];
- 3) спонгиозная ткань здоровой кости;
- 4) спонгиозная ткань здоровой кости во внутренней цилиндрической части и корковая ткань на начальном этапе ее оссификации во внешней цилиндрической части, как ортотропный материал с $E_x = 850$, $E_y = 700$, $E_z = 1840$, $G_{xy} = 240$, $G_{yz} = 500$, $G_{xz} = 360$ (МПа), $\nu_{xy} = 0.37$, $\nu_{yz} = 0.14$, $\nu_{xz} = 0.12$ (данные значения получены при приблизительном содержании гидроксиапатита в 13 % по методике [Маслов, 2003; Маслов, Ликсонов, 2004; Янсон, 1975], исходя из соответствующих величин из [Kima et al., 2010; Yildiz, Erden, 2001] при норме);
- 5) спонгиозная ткань здоровой кости во внутренней цилиндрической части, и корковая ткань здоровой кости во внешней цилиндрической части.

Постановки и конечно-элементные решения статических задач

В данном разделе вначале опишем математическую постановку рассматриваемых задач. Будем считать, что для пространственных частей V биомеханической модели выполняются классические уравнения трехмерной линейной теории упругости для ортотропных материалов. При использовании векторно-матричных обозначений, удобных для дальнейшего использования МКЭ, эти уравнения можно представить в форме

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{T} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{L}^*(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

$\mathbf{T} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}\}$ – (псевдо-) вектор напряжений σ_{ij} ; \mathbf{c} – матрица упругих жесткостей размера 6×6 ; $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{yz}, 2\varepsilon_{xz}\}$ – (псевдо-) вектор деформаций ε_{ij} ; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \{u_x(\mathbf{x}), u_y(\mathbf{x}), u_z(\mathbf{x})\}$ – вектор перемещений; $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Здесь в векторно-матричных обозначениях тензорных величин использован закон соответствия [ANSYS, 2007] $(ij) \leftrightarrow \alpha$ между парами индексов $(ij) \sim (ji)$, где $i, j = x, y, z$, и одномерным массивом $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 6$: $(xx) \leftrightarrow (1)$; $(yy) \leftrightarrow (2)$; $(zz) \leftrightarrow (3)$; $(xy) \sim (yx) \leftrightarrow (4)$; $(yz) \sim (zy) \leftrightarrow (5)$; $(xz) \sim (zx) \leftrightarrow (6)$.

Для ортотропной среды матрица упругих податливостей \mathbf{s} , обратная к матрице упругих жесткостей \mathbf{c} , имеет следующую структуру

$$\mathbf{s} = \mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{xy}/E_x & -\nu_{xz}/E_x & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E_z & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/G_{xy} & 0 & 0 \\ \text{sym} & & & & 1/G_{yz} & 0 \\ & & & & & 1/G_{xz} \end{bmatrix},$$

причем в случае изотропного материала $E_x = E_y = E_z = E$; $\nu_{xy} = \nu_{yz} = \nu_{xz} = \nu$; $G_{xy} = G_{yz} = G_{xz} = G = E/[2(1 + \nu)]$.

На границах $S = \partial V$ объемных частей модели примем следующие краевые условия. Нижний торец S_u имитатора кости считается жестко заземленным:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_u, \tag{3}$$

а на остальной поверхности $S_\sigma = S \setminus S_u$ задается вектор напряжений $\mathbf{p}_S = \mathbf{p}_S(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{p}_S, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \tag{4}$$

где \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к поверхности. Вектор напряжений \mathbf{p}_S почти везде равен нулю (свободные от напряжений поверхности), кроме верхнего торца имитатора кости, где он равен вектору давлению (в случае его наличия).

С целью решения задачи теории упругости (1)–(4) в объеме V можно перейти к ее слабой постановке и использовать классическую технику конечно-элементных аппроксимаций. Пусть V_h – область, занимаемая конечно-элементной сеткой, $V_h \subset V$, $V_h = \cup_m V^{em}$, где V^{em} – отдельный конечный элемент с номером m . В случае статических задач можно искать приближенное решение $\mathbf{u}_h \approx \mathbf{u}$ на конечно-элементной сетке V_h в форме

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}, \tag{5}$$

где \mathbf{N}^* – матрица базисных функций; \mathbf{U} – вектор узловых степеней свободы (узловых перемещений).

В соответствии с обычной конечно-элементной техникой ([Бате, 2010; ANSYS, 2007] и др.) аппроксимируем слабую постановку задачи в конечномерном пространстве, связанном с базисными функциями из $\mathbf{N}^*(\mathbf{x})$. Подставляя (5) и аналогичные представления проекционных функций в слабую постановку задачи теории упругости для V_h , получим конечно-элементную систему линейных алгебраических уравнений относительно узловых перемещений \mathbf{U} :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}. \tag{6}$$

Здесь в (4) $\mathbf{K} = \sum_m^a \mathbf{K}^{em}$, $\mathbf{F} = \sum_m^a \mathbf{F}^{em}$ – глобальные конечно-элементные матрица жесткости и вектор внешних воздействий соответственно, полученные из элементных матриц и векторов \mathbf{K}^{em} и \mathbf{F}^{em} в результате процесса ансамблирования (\sum_m^a); а элементные матрицы и векторы даются формулами

$$\mathbf{K}^{em} = \int_{V^{em}} \mathbf{B}^{em*} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}^{em} dV, \quad \mathbf{B}^{em} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{N}^{em*}, \quad \mathbf{F}^{em} = \int_{S_\sigma^{em}} \mathbf{N}^{em} \cdot \mathbf{p}_S dS, \tag{7}$$

где $\mathbf{N}^{em*} = \mathbf{N}^{em*}(\mathbf{x})$ — матрица аппроксимирующих базисных функций, определенных на отдельных КЭ; S_{σ}^{em} — граничные поверхности КЭ, аппроксимирующие границу S_{σ} .

В качестве объемных КЭ будем использовать элемент SOLID92 пакета ANSYS, который является изопараметрическим КЭ с 10 узлами в форме тетраэдра (рис. 2). Изопараметрическая техника МКЭ предполагает, что сужение представления (5) на КЭ V^{em} задается двумя формулами: представлением поля \mathbf{u}_h на каноническом элементе V_{ξ}^{em} и параметрическим отображением $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{em}(\xi)$ канонической фигуры V_{ξ}^{em} в исходную $V_x^{em} = V^{em}$ (рис. 2). При этом в обоих выражениях используются одни и те же базисные функции:

$$\mathbf{u}_h(\xi) = \mathbf{N}_{\xi}^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{U}^{em}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}^{em}(\xi) = \mathbf{N}_{\xi}^{em*}(\xi) \cdot \mathbf{X}^{em}, \quad (8)$$

где элементы V_{ξ}^{em} и V_x^{em} имеют по n узлов ξ_j и \mathbf{x}_{r_j} соответственно $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\mathbf{N}_{\xi}^{em*}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 & 0 & \dots & N_n(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & 0 & \dots & 0 & N_n(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\xi) & 0 & 0 & N_2(\xi) & \dots & 0 & 0 & N_n(\xi) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{em} = \{U_{xr_1}, U_{yr_1}, U_{zr_1}, U_{xr_2}, U_{yr_2}, U_{zr_2}, \dots, U_{xr_n}, U_{yr_n}, U_{zr_n}\},$$

$$\mathbf{X}^{em} = \{x_{r_1}, y_{r_1}, z_{r_1}, x_{r_2}, y_{r_2}, z_{r_2}, \dots, x_{r_n}, y_{r_n}, z_{r_n}\},$$

$\xi = \{\xi, \eta, \zeta\}$, \mathbf{U}^{em} — элементный вектор узловых степеней свободы, \mathbf{X}^{em} — элементный вектор координат узлов.

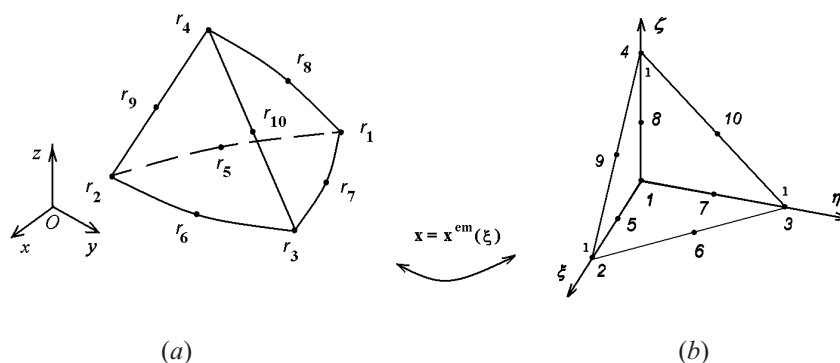


Рис. 5. Тетраэдральный КЭ с 10 узлами:

(a) — элемент V_x^{em} в физическом пространстве; (b) — канонический тетраэдр V_{ξ}^{em}

Для КЭ в виде тетраэдра с 10 узлами ($n = 10$) канонический тетраэдр V_{ξ}^{em} (рис. 2, б) имеет вершины $\xi_1 = \{0, 0, 0\}$, $\xi_2 = \{1, 0, 0\}$, $\xi_3 = \{0, 1, 0\}$, $\xi_4 = \{0, 0, 1\}$, $\xi_5 = \{1/2, 0, 0\}$, $\xi_6 = \{1/2, 1/2, 0\}$, $\xi_7 = \{0, 1/2, 0\}$, $\xi_8 = \{0, 0, 1/2\}$, $\xi_9 = \{1/2, 0, 1/2\}$, $\xi_{10} = \{0, 1/2, 1/2\}$, а его базисные функции $N_j(\xi)$ даются формулами

$$N_s = (2L_s - 1)L_s, \quad s = 1, 2, 3, 4,$$

$$N_5 = 4L_1L_2, \quad N_6 = 4L_2L_3, \quad N_7 = 4L_1L_3, \quad N_8 = 4L_1L_4, \quad N_9 = 4L_2L_4, \quad N_{10} = 4L_3L_4,$$

где $L_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta$, $L_2 = \xi$, $L_3 = \eta$, $L_4 = \zeta$ — объемные координаты канонического тетраэдра.

При вычислении объемных и поверхностных интегралов в (7) для каждого КЭ используются переход к каноническим переменным по второй формуле из (8) и численное интегрирование по каноническим объемам V_{ξ}^{em} и поверхностям S_{σ}^{em} . Так, для элементных матриц жесткости соответствующие формулы можно записать в виде

$$\mathbf{K}^{em} = \int_{V_{\xi}^{em}} \mathbf{C}^{em}(\xi) dV_{\xi} \approx \frac{1}{6} \sum_{l=1}^{n_c} W_l^c \mathbf{C}^{em}(\xi_l^c),$$

где $\xi_l^c = \{\xi_l^c, \eta_l^c, \zeta_l^c\}$ — узлы, W_l^c — веса кубатурной формулы, n_c — число узлов или весов,

$$\mathbf{C}^{em}(\xi) = \mathbf{B}_\xi^{em*} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{B}_\xi^{em} \det \mathbf{J}_\xi^{em}, \quad \mathbf{B}_\xi^{em} = \mathbf{L}((\mathbf{J}_\xi^{em})^{-1} \cdot \nabla_\xi) \cdot \mathbf{N}_\xi^{em*},$$

$$\mathbf{J}_\xi^{em} = \begin{bmatrix} \partial x^{em} / \partial \xi & \partial y^{em} / \partial \xi & \partial z^{em} / \partial \xi \\ \partial x^{em} / \partial \eta & \partial y^{em} / \partial \eta & \partial z^{em} / \partial \eta \\ \partial x^{em} / \partial \zeta & \partial y^{em} / \partial \zeta & \partial z^{em} / \partial \zeta \end{bmatrix}, \quad \nabla_\xi = \begin{Bmatrix} \partial / \partial \xi \\ \partial / \partial \eta \\ \partial / \partial \zeta \end{Bmatrix}.$$

Для канонического тетраэдра с 10 узлами КЭ и квадратичными базисными функциями подходящей является кубатурная формула с 4 узлами и весами ($n_c = 4$), имеющая второй порядок точности, для которой [Мысовских, 1981]: $W_1^c = W_2^c = W_3^c = W_4^c = 1/4$; $\xi_1^c = \eta_1^c = \zeta_1^c = (5 - \sqrt{5})/20$; $\xi_2^c = \eta_2^c = (5 - \sqrt{5})/20$, $\zeta_2^c = (5 + 3\sqrt{5})/20$; $\xi_3^c = \zeta_3^c = (5 - \sqrt{5})/20$, $\eta_3^c = (5 + 3\sqrt{5})/20$; $\eta_4^c = \zeta_4^c = (5 - \sqrt{5})/20$, $\xi_4^c = (5 + 3\sqrt{5})/20$.

В представленной биомеханической системе имитатор кости с зоной регенерации задавался как пространственная область V , но кольца аппарата Илизарова моделировались в рамках теории упругих пластин, а стержни и спицы — в рамках стержневой теории. Таким образом, суммарная модель помимо области V включала также поверхности P (пластины) и линии L (стержни и спицы). Полное описание используемых здесь уравнений теорий упругих стержней и пластин, краевых условий, условий сопряжения и конечно-элементных аппроксимаций требует значительного места, и здесь ради краткости опущено (см. [Бате, 2010; ANSYS, 2007] и др.) Добавление КЭ пластин (оболочек SHELL93) и стержней (BEAM189) усложняет структуру системы (6), причем среди узловых степеней свободы кроме узловых перемещений появляются теперь и узловые углы поворота. Тем не менее, матрица жесткости \mathbf{K} системы (6) остается симметричной и положительно определенной. Модификация системы (6) при учете уравнений связи при моделировании усилий компрессии или дистракции может быть проведена с сохранением свойств матрицы \mathbf{K} . В связи с этим, результирующая конечно-элементная система уравнений равновесия далее решалась с помощью эффективного прямого решателя пакета ANSYS для симметричных разреженных матриц, использующего факторизацию Холесского.

Основные результаты расчетов представлены в таблице 1, в которой для каждой модели регенерата, заполняющего пространство между отломками, и для различных вариантов нагрузок приведены максимальные значения напряжений по Мизесу

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)]}$$

во внешней и внутренней частях сечения в месте перелома.

На рисунке 3 приведены характерные виды распределений напряжений по Мизесу в центральном сечении зоны перелома. Здесь рисунок 3а демонстрирует результаты при нагружении давлением 1 МПа и свойствах здоровой ткани в месте перелома; рисунок 3б — при нагружении давлением 1 МПа и свойствах гелеобразной ткани в месте перелома; рисунок 3с — при компрессии соединительных стержней между репонизирующими кольцами на 1 мм и свойствах здоровой ткани в месте перелома; рисунок 3д — при компрессии стержней на 1 мм и свойствах гелеобразной ткани в месте перелома. Таким образом, на рисунке 3 слева и справа показаны результаты в пограничных случаях для окончания процесса регенерации и для первого этапа регенерации костной ткани в месте перелома соответственно. При этом вверху и внизу на рисунке 3 продемонстрированы результаты для различных воздействий (осевого сжатия и компрессии стержней соответственно).

Как видно из таблицы 1 и рисунка 3, характер распределения напряжений различается в зависимости от типа осевых внешних воздействий и жесткости регенерата в месте перелома. Так, при внешнем осевом сжатии имитатора кости усилия распределяются более равномерно по

Таблица 1. Максимальные напряжения в месте перелома при базовых статических внешних воздействиях

Костная ткань в месте перелома	Максимальные напряжения по Мизесу σ_{eff} (МПа)			
	Во внешней части места перелома		Во внутренней части места перелома	
	Задана компрессия или дистракция на 1 мм	Задано давление 1 МПа	Задана компрессия или дистракция на 1 мм	Задано давление 1 МПа
Гелеобразная ткань	0.002	0.036	0.001	0.013
Хрящевая ткань	0.070	1.31	0.040	0.740
Спонгиозная ткань	0.081	1.36	0.081	1.45
Формирование корковой части	0.080	1.36	0.027	0.468
Здоровая ткань	0.084	1.32	0.002	0.037

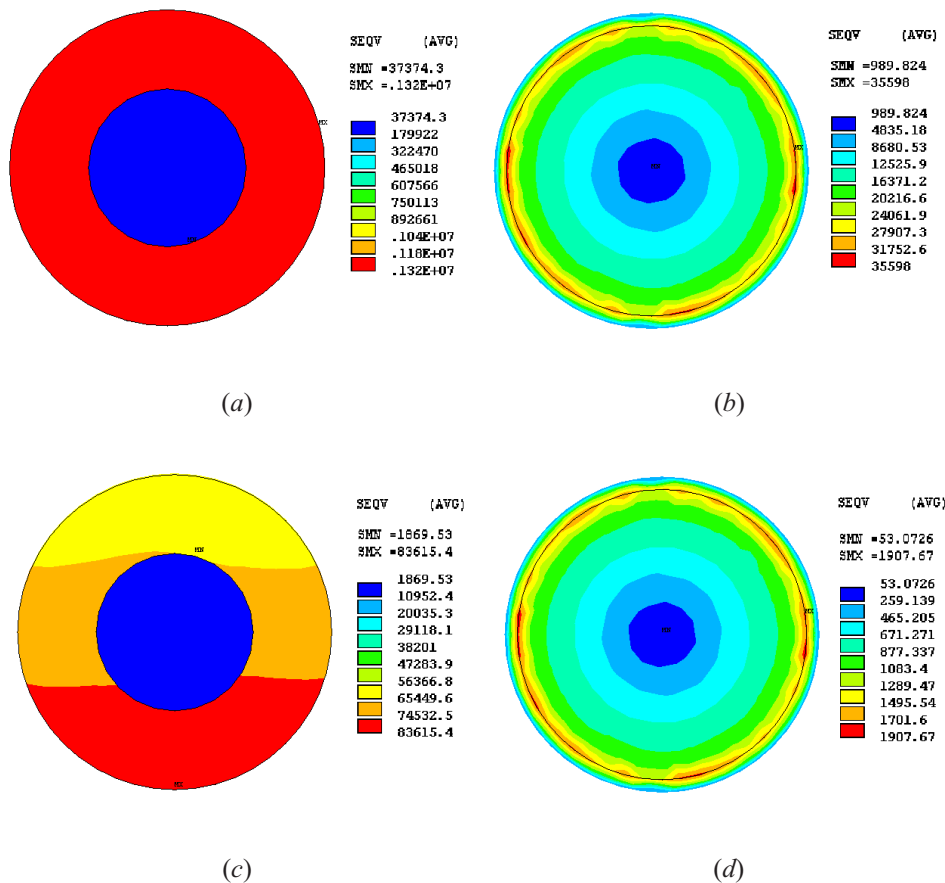


Рис. 9. Характерные виды распределений напряжений по сечению в месте перелома

сечению, чем при аппаратной компрессии или дистракции, поскольку в последних случаях зоны основных усилий связаны с местами расположения стержней и спиц аппарата. Кроме того, в связи с неоднородностью по сечению здоровой и регенерирующей костных тканей, эти воздействия перераспределяются неравномерно как по компактной и спонгиозной тканям, так и по тканям в зоне перелома.

Тем не менее при обоих типах внешних воздействий при заполнении места перелома хрящевой тканью максимальные напряжения по Мизесу превосходят напряжения в случае заполнения места перелома мягкой гелеобразной тканью более чем в 30 раз и далее стабилизируются в зонах под корковой тканью. Во внутренней части места перелома в процессе заживления максимальные напряжения сначала возрастают, а затем резко убывают.

При комбинации компрессии или дистракции с осевым сжатием величины максимальных напряжений могут быть приближенно получены путем сложения или вычитания значений максимальных напряжений, полученных при деформациях стержней аппарата, со значениями максимальных напряжений, полученных при осевом сжатии кости, умноженными на соответствующие коэффициенты интенсивности этих воздействий. Несмотря на то, то максимальные напряжения наблюдаются в различных зонах места перелома, такая формула дает вполне удовлетворительные результаты, так как эти зоны в большинстве рассмотренных случаев оказываются близкими.

Таблица 2. Допустимые величины нагрузок на имитатор кости в месте перелома и деформаций стержней аппарата Илизарова

Костная ткань в месте перелома	Допустимые воздействия				σ_s (МПа)
	Компрессия / дистракция (мм)	Давление (МПа)	Давление при компрессии на 10 мм (МПа)	Давление при дистракции на 10 мм (МПа)	
Гелеобразная ткань	0.002	0.0001	0.00007	0.00027	$4.4 \cdot 10^{-6}$
Хрящевая ткань	0.4	0.02	0.015	0.049	0.03
Спонгиозная ткань	54	3	2	8	4.4
Формирование корковой части	200	11	7.4	28	16
Здоровая ткань	1900	121	74	333	160

Данные таблицы 1 позволяют также оценить допустимые величины внешних нагрузок на кость и деформаций стержней аппарата Илизарова в процессе регенерации кости, исходя из критериев допуска на максимальные характеристики напряжений в костной мозоли. Примем, например, критерий прочности, связанный с величинами максимальных напряжений по Мизесу: $\sigma_{eff} \leq \sigma_s$, где σ_s — априорно задаваемая величина предельных напряжений. Пределы прочности вычислим, исходя из значения $\sigma_s = 160$ (МПа) для здоровой ткани [Wang et al., 2010] и пропорционального уменьшения для других типов костных тканей в соответствии с отношением их модулей Юнга к модулю Юнга по оси компактной ткани. Тогда, сравнивая полученные максимальные напряжения с пределами прочности для каждого периода регенерации, можно определить значения допустимых внешних воздействий как для компрессии или дистракции стержней и осевого сжатия, так и для их различных комбинаций, например при компрессии или дистракции на 10 мм и при одновременном давлении (табл. 2).

Результаты таблицы 2 можно рассматривать только как примерные, так как здесь был принят коэффициент запаса, равный единице, не учитывались различия мест максимальных напряжений, нелинейности модели при больших величинах внешних воздействий, концентрации напряжений в местах прохождения спиц через костную ткань отломков и т. п. Естественно поэтому, что очень большие величины компрессии или дистракции стержней на конечном этапе заживления не имеют практического смысла. Тем не менее приведенные результаты для начального этапа регенерации и другие возможные результаты, полученные из уточняющих расчетов, могут быть использованы при планировании, реализации и контроле силовых режимов работы при чрескостном остеосинтезе аппаратом Илизарова.

Дискуссия и обсуждение результатов

Как известно, кость является сложным материалом с мультифазной, гетерогенной и анизотропной микроструктурой, выполняющим функцию опоры, локомоции и депонирования микроэлементов. Перелом любой кости влечет за собой нарушение вышеописанных функций и автоматически активирует процессы сращения. Консолидация сопровождается дифференцированием тканей (грануляционной, хрящевой, костной, мышечной, соединительной), структура которых претерпевает фазные изменения, определяющие прочностные свойства тканей. Особенности процессов сращения перелома зависят от многих параметров: тип перелома, величина пространства между фрагментами, кровоснабжение, уровни гормонов. Роль механических факторов в морфогенезе регенерата при использовании аппарата Илизарова была достаточно убедительно продемонстрирована экспериментально и клинически [Попков и др., 2005; Щудло, 2006].

Важными факторами, определяющими темпы минерализации, прочность и структурные особенности костной ткани, являются значения и направления приложенных усилий. Наилучшие прочностные характеристики костного регенерата дает сочетание неразрушающей компрессии и статической фиксации костных фрагментов [Wehner et al., 2010].

Полученные в представленной нами модели данные о неравномерности распределения напряжений в зоне перелома и возрастании допустимой нагрузки от центра сечения кости к периферии хорошо согласуются с результатами компьютерного моделирования влияния жесткости фиксатора на формирование дистракционного регенерата [Reina-Romo et al., 2011]. Авторы цитируемого исследования показали, что при правильно подобранной жесткости внешнего фиксатора формирование костной ткани происходит преимущественно в пространстве, соответствующем кортикальному слою кости, т.е. на периферии. Такое представление находится в соответствии с результатами экспериментальных исследований на моделях животных, демонстрирующими максимальную прочность периостальной костной мозоли, формирующейся в условиях гибкой фиксации [Claes et al., 2000; Claes et al., 2010; Vetter et al., 2011]. Кроме того, свойства обсуждаемой модели согласуются с результатам клинических исследований, демонстрирующими зависимость распределения сил и моментов в плоскости поперечного сечения кости от пространственной компоновки аппарата Илизарова [Голубев, 1997].

Центральной задачей современных методов остеосинтеза с устройствами внешней фиксации является регулирование предполагаемых нагрузок на зону регенерации и, в идеале, приведение внешних усилий в соответствии с меняющимися материальными свойствами регенерата. Предложенная в настоящей работе вычислительная модель позволяет воспроизводить и визуализировать характеристики НДС костного регенерата на различных стадиях консолидации, а также оценивать распределение усилий между различными его зонами.

Дальнейшее улучшение модели может быть направлено на адаптацию используемых подходов для проведения прогностических расчетов, учитывающих индивидуальные особенности структуры кости и геометрии перелома у конкретного пациента. Результаты таких расчетов могут использоваться для управления силовым режимом аппаратов внешней фиксации. Развитие предлагаемой модели может заключаться также в анализе изменений жесткости аппарата и регенерата в условиях знакопеременного нагружения и при других видах переломов.

Выводы

В работе описана экономичная конечно-элементная модель модельной системы остеосинтеза аппаратом Илизарова, позволяющая с достаточно высокой эффективностью проводить расчеты напряженно-деформированного состояния костного регенерата при различных его механических свойствах и при различных внешних воздействиях, в том числе при заданной компрессии или дистракции между репонирующими кольцами аппарата. Показано, что с использованием

разработанных программ на командном языке APDL ANSYS можно реализовать методику оценки прочности костного регенерата, исходя из выбранного критерия допуска на максимальные характеристики напряжений. Предложенная методика позволяет получать сопоставимые оценки допустимых внешних силовых воздействий и изменений длин стержней между репонирующими кольцами аппарата Илизарова на различных этапах консолидации костного регенерата.

Совершенствование модели для целей практического применения может заключаться в разработке алгоритмов индивидуализации и оценки влияния динамических усилий на систему «аппарат внешней фиксации — регенерат».

Список литературы

- Бате К.* Методы конечных элементов. — М.: Физматлит, 2010. — 1024 с.
- Бушманов А. В., Барабаш С. А.* Численное моделирование деформации спиц циркулярного аппарата // Медицинская информатика. — 2007. — № 1(13) — С. 33–40.
- Бушманов А. В., Соловцова Л. А.* Исследование жесткости аппарата Илизарова // Российский журнал биомеханики. — 2008. — Т. 12, № 3(41). — С. 97–102.
- Верховод А. Ю., Иванов Д. В.* Применение метода конечных элементов для сравнительной оценки стабильности остеосинтеза оскольчатых диафизарных переломов костей голени блокируемыми интрамедуллярными стержнями и аппаратами наружной фиксации // Современные проблемы науки и образования. — 2012. — № 4. — С. 75–75.
- Голубев Г. Ш.* Компьютерное управление аппаратом Илизарова в клинических условиях. — Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 1997. — 239 с.
- Колмакова Т. В.* Исследование деформационного поведения фрагмента кости при осевом сжатии, содержащего компактный и губчатый слои разной плотности // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 3. — С. 433–441.
- Маслов Л. Б.* Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. — Иваново: Изд-во ИГЭУ, 2010. — 264 с.
- Маслов Л. Б.* Резонансные свойства большеберцовой кости в неповрежденном состоянии и с устройствами внешней фиксации // Российский журнал биомеханики. — 2003. — Т. 7, № 2. — С. 20–34.
- Математические модели и компьютерное моделирование в биомеханике / Под ред. А. В. Зиньковского и В. А. Пальмова. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2004. — Гл. 10. — *Маслов Л. Б., Ликсонов Д. В.* Биомеханические характеристики нижней конечности человека. — С. 385–438.
- Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. — М.: Наука, 1981. — 336 с.
- Образцов И. Ф., Адамович И. С., Барер А. С. и др.* Проблемы прочности в биомеханике. — М.: Высшая школа, 1988. — 311 с.
- Попков Д. А., Ерофеев С. А., Чиркова А. М.* Удлинение голени с использованием интрамедуллярного напряженного армирования (экспериментальное исследование) // Гений ортопедии. — 2005. — № 4. — С. 81–91.
- Соловцова Л. А.* Методика компьютерного исследования жесткости спице-стержневых фиксирующих устройств // Российский журнал биомеханики. — 2010. — Т. 14, № 1(47). — С. 17–25.
- Щудло Н. А.* Морфологические особенности регенерации поврежденного нерва в условиях дозированного растяжения // Гений ортопедии. — 2006. — № 2. — С. 89–94.
- Янсон Х. А.* Биомеханика нижних конечностей человека. — Рига: Зинатне, 1975. — 324 с.
- Claes L., Laule J., Wenger K., Suger G., Liener U., Kinzl L.* The influence of stiffness of the fixator on maturation of callus after segmental transport // J. Bone Joint Surg. Br. — 2000. — Vol. 82, No. 1. — P. 142–148.

- Claes L., Veeseer A., Gockelmann M., Horvath D., Durselen L., Ignatius A.* A novel method for lateral callus distraction and its importance for the mechano- biology of bone formation // *Bone*. — 2010. — Vol. 47, No. 1. — P. 712–717.
- Donaldson F. E., Pankaj P., Hamish A., Simpson R. W.* Investigation of factors affecting loosening of Ilizarov ring-wire external fixator systems at the bone-wire interface // *J. Orthop. Res.* — 2012. — Vol. 30, No. 5. — P. 726–732.
- Kima S.-H., Chang S.-H., Jung H.-J.* The finite element analysis of a fractured tibia applied by composite bone plates considering contact conditions and time-varying properties of curing tissues // *Composite Structures*. — 2010. — Vol. 92. — P. 2109–2118.
- Lesniewska A., Choromanski W., Deszczynski J., Dobrzynski G.* Modeling and simulation of physical performance of a external unilateral mechatronic orthopaedic fixator – bone system // *Conf. Proc. IEEE Eng. Med. Biol. Soc.* — 2006. — Vol. 1. — P. 1533–1536.
- Reina-Romo E., Gomez-Benito M. J., Dominguez J., Niemeyer F., Wehner T., Simon U., Claes L. E.* Effect of the fixator stiffness on the young regenerate bone after bone transport: computational approach // *J. Biomech.* — 2011. — Vol. 44, No. 5. — P. 917–923.
- Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench. ANSYS Rel. 11.0. — Canonsburg: SAS IP Inc., 2007. — 1110 с.
- Toumanidou Th., Spyrou L. A., Aravas N.* A finite element model of the Ilizarov fixator system // *Proc. X Int. Workshop Biomed. Eng., BioEng 2011, 5–7 Oct. 2011, Kos Island, Greece.* — IEEE, 2011. — P. 66–69.
- Vetter A., Liu Y., Witt F., Manjubala I., Sander O., Epari D. R., Fratzl P., Duda G. N., Weinkamer R.* The mechanical heterogeneity of the hard callus influences local tissue strains during bone healing: A finite element study based on sheep experiments // *J. Biomech.* — 2011. — Vol. 44, No. 3. — P. 517–523.
- Wang X., Nyman J. S., Dong X., Leng H., Reyes M.* *Fundamental Biomechanics in Bone Tissue Engineering.* — Morgan & Claypool Publ., 2010. — 216 p.
- Watson M., Mathias K. J., Maffulli N., Hukins D. W., Shepherd D. E.* Finite element modelling of the Ilizarov external fixation system // *Proc. Instit. Mech. Eng. — Part H. — J. Eng. Med.* — 2007. — Vol. 221, No. 8. — P. 863–872.
- Wehner T., Claes L., Niemeyer F., Nolte D., Simon U.* Influence of the fixation stability on the healing time — A numerical study of a patient-specific fracture healing process // *Clin. Biomech.* — 2010. — Vol. 25, No. 6. — P. 606–612.
- Yildiz H., Erden S.* An advanced structural design for bone plate // *Proc. XIII Int. Soc. Biomech. Congr., July 8-13, 2001, Zurich, Switzerland.* — http://isbweb.org/images/conf/2001/Longabstracts/PDF/0800_0899/0810.pdf