

УДК: 519.676

Оценки порога и мощности перколяционных кластеров на квадратных решетках с $(1, \pi)$ -окрестностью

П. В. Москалев

Воронежский государственный аграрный университет
Россия, 394087, г. Воронеж, ул. Мичурина, 1

E-mail: moskalefff@gmail.com

Получено 28 ноября 2013 г.

В работе рассматриваются статистические оценки порога и мощности перколяционных кластеров на квадратных решетках. Порог перколяции p_c и мощность перколяционных кластеров P_∞ на квадратной решетке с $(1, \pi)$ -окрестностью зависят не только от размерности решетки, но от показателя Минковского π . Для оценки мощности перколяционных кластеров P_∞ предложен новый метод, основанный на усреднении относительных частот целевого подмножества узлов решетки. Реализация предложенного метода основана на библиотеке SPSL, выпущенной под лицензией GNU GPL-3 с использованием свободного языка программирования R.

Ключевые слова: перколяция узлов, квадратная решетка, неметрическое расстояние Минковского, окрестность Мура, порог перколяции, мощность перколяционного кластера, язык программирования R, библиотека SPSL

Estimates of threshold and strength of percolation clusters on square lattices with $(1, \pi)$ -neighborhood

P. V. Moskalev

Voronezh State Agricultural University, 1 Michurin street, Voronezh, 394087, Russia

Abstract. — In this paper we consider statistical estimates of threshold and strength of percolation clusters on square lattices. The percolation threshold p_c and the strength of percolation clusters P_∞ for a square lattice with $(1, \pi)$ -neighborhood depends not only on the lattice dimension, but also on the Minkowski exponent d . To estimate the strength of percolation clusters P_∞ proposed a new method of averaging the relative frequencies of the target subset of lattice sites. The implementation of this method is based on the SPSL package, released under GNU GPL-3 using the free programming language R.

Keywords: site percolation, square lattice, non-metric Minkowski distance, Moore neighborhood, percolation threshold, strength of infinite clusters, R programming language, SPSL package

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 405–414 (Russian).

Общие определения

Простейшая модель изотропной перколяции узлов строится с помощью взвешенного однородного графа (перколяционной решетки), достижимость произвольного узла которой задается неравенством $u_i < p$, где $u_i \sim \mathbf{U}(0, 1)$ — определяющий достижимость узла весовой коэффициент; $p \in [0, 1]$ — определяющая вероятность протекания доля достижимых узлов. Одним из результатов решения задачи о построении связанных подмножеств (кластеров узлов) для выборочной совокупности ограниченных решеток является оценка относительной частоты w возникновения пути, связывающего стартовое и целевое подмножества узлов решетки, при заданных параметрах решетки. Подмножество узлов, связывающих противоположные стороны ограниченной перколяционной решетки, в теории протекания называется стягивающим кластером. Относительная частота появления стягивающего кластера используется для оценки порога протекания p_c , соответствующего вероятности возникновения неограниченного кластера.

Помимо порога протекания p_c существенное значение для прикладных исследований могут иметь и другие характеристики кластеров, например массовая фрактальная размерность d_M мощность P_∞ [Тарасевич, 2002]. Как показывают наши исследования [Москалев и Буховец, 2011; Москалев, 2013а] все эти характеристики зависят не только от типа и топологической размерности перколяционной решетки, но и от формы $(1, \pi)$ -окрестности ее узлов.

Для единичной окрестности узла на квадратной решетке известны две дискретные формы: минимальная $(1, 0)$ -окрестность фон Неймана и максимальная $(1, \infty)$ -окрестность Мура. $(1, 0)$ -окрестность фон Неймана образуется как подмножество узлов решетки, только одна из координат которых отличается от одноименной координаты выделенного узла на единицу, а в $(1, \infty)$ -окрестность Мура входят узлы, хотя бы одна из координат которых отличается от одноименной координаты выделенного узла на единицу. Из сделанных определений следует, что $(1, 0)$ -окрестность фон Неймана является подмножеством $(1, \infty)$ -окрестности Мура. Более того в работах [Москалев, 2013b; Москалев, 2013c] было показано, что на базе классической $(1, \infty)$ -окрестности Мура можно построить более общий вариант $(1, \pi)$ -окрестности Мура.

Из теории множеств известно [Александров, 1977], что ключевое влияние на структуру множества оказывает функция метрики, определяющая расстояния и формирующая ε -окрестность некоторой точки b . Одним из достаточно общих способов определения окрестности произвольной точки $U_{\varepsilon, \pi}(b)$ является использование функции неметрического расстояния Минковского $\rho_\pi(a, b)$:

$$U_{\varepsilon, \pi}(b) = \{a : \rho_\pi(a, b) \leq \varepsilon\}, \quad \rho_\pi(a, b) = \left(\sum_{i=1}^k |a_i - b_i|^\pi \right)^{1/\pi}, \quad (1)$$

где $\pi \geq 0$ — показатель неметрического расстояния Минковского (для краткости далее по тексту именуемый просто показателем Минковского); $a(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $b(b_1, b_2, \dots, b_k)$ — координаты точек a и b . Применение термина «неметрическое расстояние» обусловлено тем, что строгое определение метрики накладывает на функцию (1) следующие ограничения: а) $\rho_\pi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$; б) $\rho_\pi(a, b) = \rho_\pi(b, a)$; в) $\rho_\pi(a, b) \leq \rho_\pi(a, c) + \rho_\pi(c, b)$. Для неметрического расстояния Минковского все три ограничения выполняются лишь при $\pi \geq 1$, а на интервале $0 \leq \pi < 1$ знак в третьем неравенстве (неравенстве треугольника) меняется на противоположный $\rho_\pi(a, b) > \rho_\pi(a, c) + \rho_\pi(c, b)$. В наших задачах функция неметрического расстояния $\rho_\pi(a, b)$ определяет лишь меру удаленности точек a и b вдоль проходящей через них прямой и используется в (1) для определения окрестности b с соответствующим показателем Минковского π .

Тогда для определения достижимости узлов, образующих $(1, \pi)$ -окрестность Мура, с учетом меры их удаленности от текущего узла ρ_π вероятностное неравенство обобщенной перколяционной модели примет вид $u_i < \frac{p}{\rho_\pi}$.

Оценка порога перколяции с $(1, \pi)$ -окрестностью

Рассмотрим задачу статистической оценки значения порога перколяции по выборочной совокупности реализаций кластеров узлов на двумерных квадратных решетках. При протекании в заданном направлении конечномерная оценка порога перколяции p_c соответствует доле достижимых узлов p ограниченной решетки, при которой частота появления стягивающего кластера w достигает медианного значения $w(p = p_c) = \frac{1}{2}$. Как было отмечено в докладе [Москалев и Буховец, 2011] расширение $(1, 0)$ -окрестности фон Неймана до $(1, \pi)$ -окрестности Мура приводит к тому, что частота появления стягивающих кластеров w становится зависимой не только от доли достижимых узлов p и размера квадратной решетки L , но и от показателя Минковского π .

На рисунке 1 приведены результаты статистического моделирования перколяции узлов в направлении от нижней $y = -\frac{L}{2}$ до верхней $y = \frac{L}{2}$ границ двумерных квадратных решеток с $(1, \pi)$ -окрестностью при различных значениях размера решетки L и показателя Минковского π . На рисунке 1a показаны зависимости относительных частот возникновения стягивающих кластеров w на решетках размерами $L = 65, 129$ и 257 узлов с $(1, 0)$ -окрестностью фон Неймана от доли достижимых узлов p . Символами «○» показаны зависимости $w(p|L, \pi)$ для решетки размером $L_1 = 65$ узлов, а символами «□» и «◇» — зависимости $w(p|L, \pi)$ для решеток с размерами $L_2 = 129$ и $L_3 = 257$ узлов соответственно.

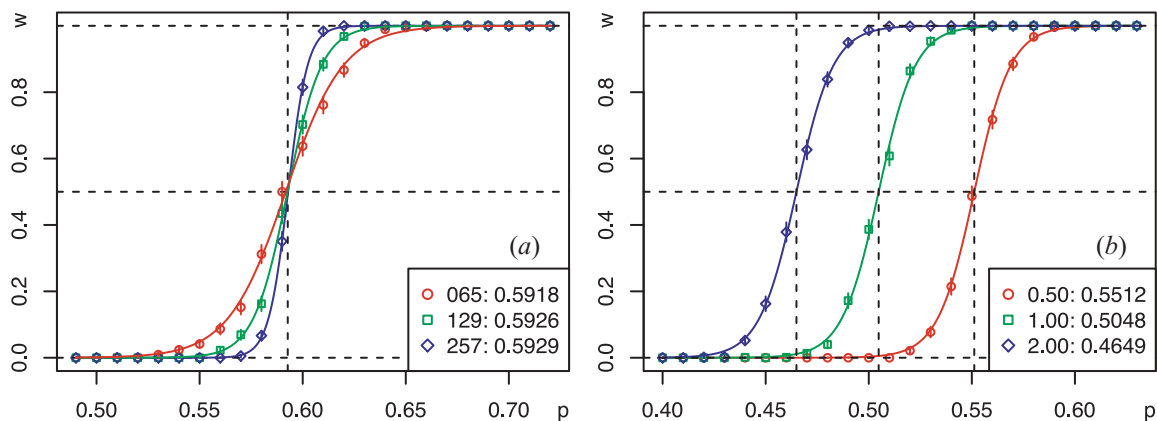


Рис. 1. Относительные частоты кластеров $w(p|L, \pi)$, стягивающих решетку от $y = -\frac{L}{2}$ до $y = \frac{L}{2}$: (a) при $\pi = 0$ и $L = 65, 129, 257$ узлов; (b) при $\pi = \frac{1}{2}, 1, 2$ и $L = 129$ узлов

На рисунке 1b показаны зависимости относительных частот возникновения стягивающих кластеров w на решетках размера $L = 129$ узлов с $(1, \frac{1}{2})$ -, $(1, 1)$ - и $(1, 2)$ -окрестностью от доли достижимых узлов p . Символами «○» на рисунке 1b показаны зависимости $w(p|L, \pi)$ для решетки с $(1, \frac{1}{2})$ -окрестностью, а символами «□» и «◇» — зависимости $w(p|L, \pi)$ для решеток с $(1, 1)$ - и $(1, 2)$ -окрестностями соответственно.

Объемы выборок, используемых для расчета относительной частоты возникновения стягивающих кластеров w , для каждой тройки значений $(p|L, \pi)$ на рисунке 1 составляет $n = 750$ реализаций. Вертикальные отрезки соответствуют радиусам 0.95-доверительных интервалов для наблюдаемых значений w . При построении интервальной оценки для относительной частоты w учитывается, что при фиксированных параметрах p, L и π вероятность возникновения стягивающего кластера будет постоянна. Тогда при независимых по реализациям распределениях псевдослучайных весовых коэффициентов u_{xy} оцениваемая случайная величина W будет подчиняться биномиальному распределению, а ее доверительный интервал примет вид

$$I_{0.95}(W) = \left(w \pm t_{0.95} \sqrt{\frac{1}{n} w(1-w)} \right), \quad (2)$$

где w — относительная частота стягивающего кластера; n — объем выборки; $t_{0,95} \approx 1,6449$ — 0.95-квантиль стандартного нормального распределения.

По рисунку 1а нетрудно заметить, что при протекании от нижней $y = -\frac{L}{2}$ до верхней $y = \frac{L}{2}$ границ решетки интервал оси абсцисс p , на котором функция $w(p|L, \pi)$ отлична от нуля и единицы, сужается по мере роста L , стягиваясь при $L \rightarrow \infty$ к известному значению порога протекания для двумерной квадратной решетки $p_c = 0.592746\dots$, который показан вертикальной штриховой линией:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} w(p|L) = \begin{cases} 0, & p < p_c; \\ \frac{1}{2}, & p = p_c; \\ 1, & p > p_c. \end{cases} \quad (3)$$

Кривые, аппроксимирующие расчетные точки, соответствуют графикам нормированной логистической функции:

$$f(p|\alpha) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{p-\alpha_1}{\alpha_2}}}, \quad (4)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — вектор параметров, оцениваемый с помощью нелинейной регрессионной модели $\mathbf{w} = f(\mathbf{p}|\alpha) + \mathbf{e}$ с евклидовой нормой невязки $\mathbf{e} = \|\mathbf{w} - f(\mathbf{p}|\alpha)\|^2 \rightarrow \min$, минимизируемой методом Ньютона–Гаусса [Bates and Watts, 1988]. После линейризации модели с помощью разложения функции $f(\mathbf{p}|\alpha)$ по компонентам вектора α в ряд Тейлора искомая оценка параметров на $k + 1$ итерации примет вид: $\alpha_{k+1} = (\mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k)^{-1} (\mathbf{J}_k^T \mathbf{w})$, где \mathbf{J}_k — матрица Якоби, состоящая из значений частных производных аппроксимирующей функции $J_{ijk} = \frac{\partial f(p_i|\alpha_k)}{\partial \alpha_{jk}}$ при $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \dots$, здесь i, j — индексы элементов выборки и вектора параметров на k итерации; \mathbf{p}, \mathbf{w} — векторы выборочных данных. В результате при использовании аппроксимации вида (4) сдвиговая компонента вектора α будет соответствовать искомой оценке порога протекания $\alpha_1 \approx p_c$. Заметим, что при неограниченном возрастании масштабной компоненты $\alpha_2 \rightarrow \infty$ предел аппроксимирующей функции (4) будет совпадать с медианным значением относительной частоты (3): $\lim_{\alpha_2 \rightarrow \infty} f(\mathbf{p}|\alpha) = \frac{1}{2}$.

В приведенных выше расчетах были использованы функции «ssi20()» и «ssi2d()» из состава библиотеки SPSL [Moskalev: SPSL, 2012], выпущенной автором под лицензией GNU GPL-3 и доступной для свободной загрузки через систему репозитория CRAN.

Теперь рассмотрим оценку термодинамического предела порога перколяции p_c с помощью скейлинга на ограниченных двумерных квадратных решетках для описанного в [Москалев, 2013b; Москалев, 2013c] обобщения модели изотропной перколяции узлов с $(1, \pi)$ -окрестностью. Как уже было отмечено выше, расширение $(1, 0)$ -окрестности фон Неймана до $(1, \pi)$ -окрестности Мура приводит к тому, что определяемый по частоте появления стягивающих кластеров w порог перколяции p_c становится зависимым не только от размера квадратной решетки L , но и от показателя Минковского π .

Термодинамическим пределом порога перколяции называют оценку $p_c(L|\pi)$, возникающую при неограниченном увеличении размера перколяционной решетки $L \rightarrow \infty$. В классических работах по скейлинговой теории [Stauffer, 1979] для оценки термодинамического предела порога перколяции используется известное соотношение, которое в нашем случае можно записать как

$$|p_c(L|\pi) - p_c(\pi)| \propto L^{-1/\nu},$$

где ν — универсальный скейлинговый показатель, для плоских решеток равный $\nu = \frac{4}{3}$. Однако, как было отмечено в статье [Newmann and Ziff, 2001], более быструю сходимость конечномерных

оценок $p_c(L|\pi)$ к своим термодинамическим пределам $p_c(\pi)$ обеспечивает модифицированное соотношение

$$|p_c(L|\pi) - p_c(\pi)| \propto L^{-2-1/\nu}. \quad (5)$$

Примеры интервальных скейлинговых оценок $p_c(\pi)$ по выборкам объемом $n = 12\,000$ реализаций на двумерных квадратных решетках с размерами $L = 101, 151, \dots, 451$ узлов с $(1, \pi)$ -окрестностью при $\pi = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \infty$ показаны на рисунках 2а–i. В соответствии с (5) по оси абсцисс откладывались значения степенной функции размера решетки $L^{-11/4}$, а по оси ординат — значения отклонений $\Delta p_c(L^{-11/4}|\pi)$ конечномерных оценок порогов перколяции $p_c(L^{-11/4}|\pi)$ от своих термодинамических пределов $p_c(\pi)$.

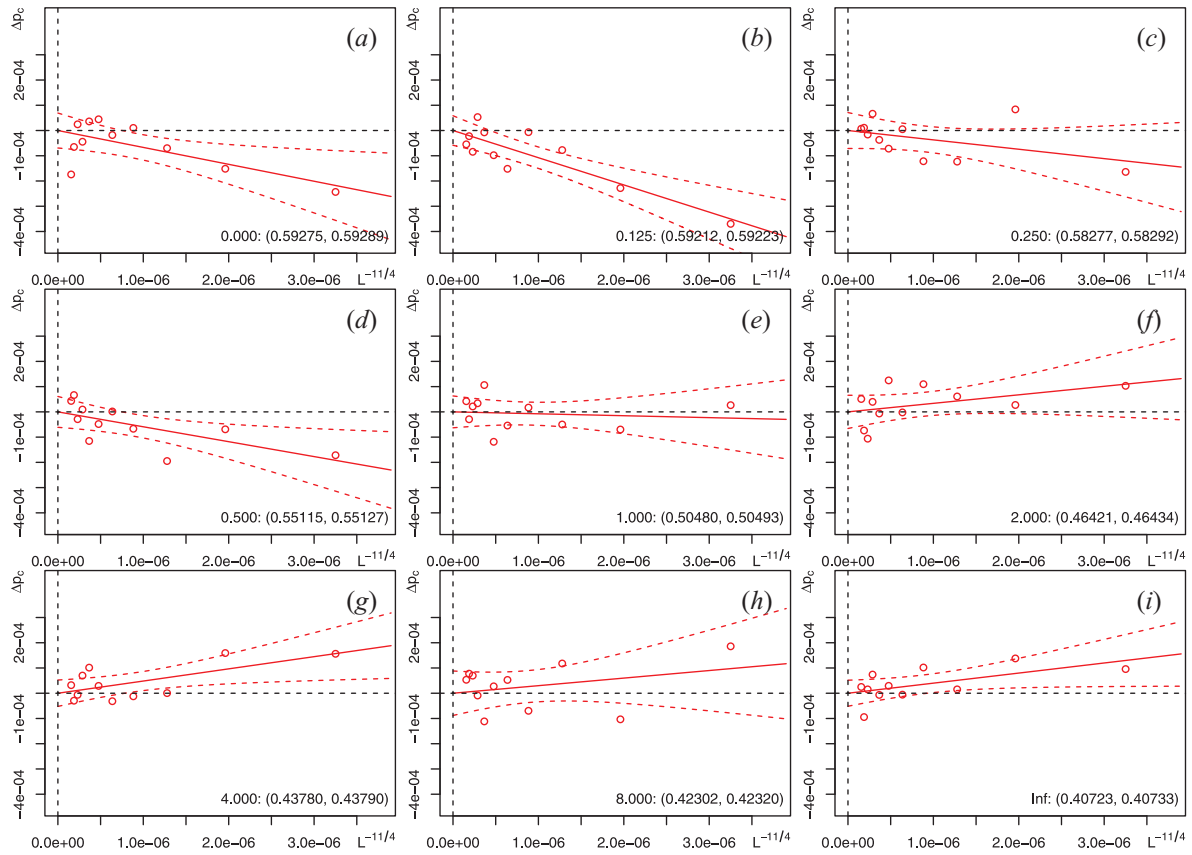


Рис. 2. Скейлинговые оценки $\Delta p_c(L^{-11/4}|\pi)$ на решетках размером $L = 101, 151, \dots, 451$ узлов при значениях показателя Минковского: (a) $\pi = 0$; (b) $\pi = \frac{1}{8}$; (c) $\pi = \frac{1}{4}$; (d) $\pi = \frac{1}{2}$; (e) $\pi = 1$; (f) $\pi = 2$; (g) $\pi = 4$; (h) $\pi = 8$; (i) $\pi \rightarrow \infty$

Символами «○» на рисунке 2 показаны расчетные точки, сплошными прямыми линиями — линии регрессии, а штриховыми гиперболическими линиями — 0.95-доверительные интервалы для моделей нормальной линейной регрессии Δp_c на $L^{-11/4}$. Соответствующие интервальные оценки термодинамического предела порога перколяции $p_c(\pi)$ при различных значениях показателя Минковского π указаны в левом нижнем углу каждого графика на рисунке 2: (a) $I_{0.95}(p_c(0)) = (0.59275; 0.59289)$; (b) $I_{0.95}(p_c(\frac{1}{8})) = (0.59212; 0.59223)$; (c) $I_{0.95}(p_c(\frac{1}{4})) = (0.58277; 0.58292)$; (d) $I_{0.95}(p_c(\frac{1}{2})) = (0.55115; 0.55127)$; (e) $I_{0.95}(p_c(1)) = (0.50480; 0.50493)$; (f) $I_{0.95}(p_c(2)) = (0.46421; 0.46434)$; (g) $I_{0.95}(p_c(4)) = (0.43780; 0.43790)$; (h) $I_{0.95}(p_c(8)) = (0.42302; 0.42320)$; (i) $I_{0.95}(p_c(\infty)) = (0.40723; 0.40733)$.

Нетрудно заметить, что при неметрических показателях Минковского $\pi < 1$ значения коэффициентов регрессии отрицательны, при метрических показателях $\pi > 1$ коэффициенты регрессии положительны, а в манхеттенской метрике при $\pi = 1$ значение коэффициента регрессии близко к нулю.

На рисунке 3 показана зависимость скейлинговой оценки порога протекания от двоичного логарифма показателя Минковского $p_c(\text{lb } \pi)$ в задачах узлов для двумерной квадратной решетки. Показатель Минковского изменялся в пределах $\pi \in [0, \infty)$. Полученные оценки показывают, что зависимость $p_c(\text{lb } \pi)$ имеет монотонный характер, ограниченный по ординате двумя одно-сторонними асимптотами на уровнях $p_c(\infty) \approx 0.40728$ и $p_c(-\infty) \approx 0.59282$. Заметим, что последняя оценка удовлетворительно согласуется с известным из литературных источников [Lee, 2008] значением порога протекания в классической задаче узлов на двумерной квадратной решетке $p_c \approx 0.5927464(5)$.

Нетрудно проверить, что представленная на рисунке 3 зависимость $p_c(\text{lb } \pi)$ в первом приближении может быть аппроксимирована логистической функцией вида

$$p_c(\text{lb } \pi | \alpha) = p_c(-\infty) - \frac{p_c(-\infty) - p_c(\infty)}{1 + \exp\left(-\frac{\text{lb } \pi - \alpha_1}{\alpha_2}\right)}, \quad (6)$$

где $p_c(-\infty) = \lim_{\pi \rightarrow 0^+} p_c(\text{lb } \pi)$, $p_c(\infty) = \lim_{\pi \rightarrow \infty} p_c(\text{lb } \pi)$ — скейлинговые оценки порога перколяции p_c , достигаемые при предельных значениях показателя Минковского π ; $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ — вектор параметров аппроксимации.

Из выражения (6) следует, что зависимость $p_c(\text{lb } \pi)$ в первом приближении должна быть симметрична некоторой относительно точки $(\text{lb } \pi_0, p_{c0})$. Для перколяции узлов на двумерной квадратной решетке с $(1, \pi)$ -окрестностью точка симметрии зависимости (6) лежит в области значений π , близких к манхеттенской метрике, с оценкой порога протекания $p_c(\pi = 1) \approx 0.50487$, которая оказывается достаточно близкой к известному значению порога протекания [Stauffer, 1979] в задаче связей на той же решетке $p'_c = \frac{1}{2}$.

Оценка мощности перколяционных кластеров с $(1, \pi)$ -окрестностью

Формальное определение порога перколяции p_c основывается на использовании функции мощности перколяционного кластера $P_\infty(p)$, которая соответствует вероятности того, что случайно выбранный узел решетки будет принадлежать перколяционному кластеру. На неограниченной решетке мощность перколяционного кластера P_∞ будет равна нулю в докритической и строго больше нуля в сверхкритической области. Тогда порог перколяции p_c определяется как точная верхняя грань множества значений p , для которых мощность перколяционных кластеров будет равна нулю:

$$p_c = \sup\{p : P_\infty(p) = 0\}, \quad \text{где } P_\infty(p) \begin{cases} = 0, & p \leq p_c; \\ > 0, & p > p_c. \end{cases} \quad (7)$$

Как было отмечено в работе [Москалев, 2013а] из определения (7) следует, что при возрастании доли достижимых узлов $p \rightarrow 1$ — левосторонние пределы как для мощности перколяционного кластера, так и для ее первой производной будут совпадать с пределом своего

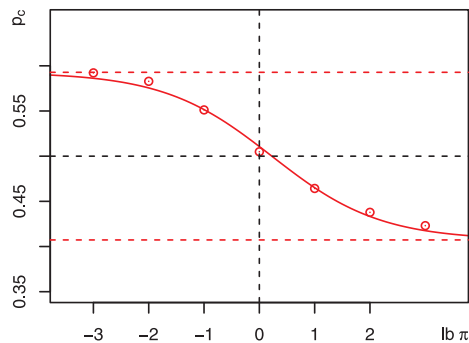


Рис. 3. Скейлинговые оценки порога перколяции узлов $p_c(\text{lb } \pi)$ на двумерной квадратной решетке с $(1, \pi)$ -окрестностью

аргумента:

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} P_\infty(p) = \lim_{p \rightarrow 1^-} \frac{dP_\infty(p)}{dp} = 1. \quad (8)$$

В скейлинговой теории [Stauffer, 1979] считается, что мощность перколяционного кластера P_∞ в окрестности критической точки при $p \rightarrow p_c$ пропорциональна расстоянию до нее с соответствующим показателем:

$$P_\infty(p|p_c, \beta) \propto |p - p_c|^\beta, \quad (9)$$

где β — зависящий от размерности пространства критический показатель, для двумерных решеток равный $\beta = \frac{5}{38}$. Сохраняя общую форму зависимости (9), предположим, что мощность кластера в сверхкритической области при $p > p_c$ описывается функцией вида

$$P_\infty(p|p_c, \beta) = \beta_1(p - p_c)^{\beta_2}. \quad (10)$$

Тогда вектор коэффициентов $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ нетрудно определить из предельных соотношений (8). В результате мощность перколяционного кластера при $p > p_c$ в первом приближении будет описываться функцией, степенной по доле достижимых узлов p и показательно-степенной по порогу перколяции p_c :

$$P_\infty(p|p_c) = \begin{cases} 0, & p \leq p_c; \\ \left(\frac{p-p_c}{1-p_c}\right)^{1-p_c}, & p > p_c. \end{cases} \quad (11)$$

Так же как и при оценке порога перколяции на ограниченных решетках с непроницаемыми граничными условиями для оценки вероятности принадлежности произвольного узла к перколяционному кластеру P_∞ можно использовать относительную частоту возникновения кластеров, стягивающих противоположные границы решетки в заданном направлении.

На рисунке 4 показаны относительные частоты узлов двумерной квадратной перколяционной решетки размером $L = 65$ узлов с $(1, \pi)$ -окрестностью при различных значениях доли достижимых узлов p и показателя Минковского π : а–в) $p = 0.5928$; г–е) $p = 0.5049$; ж–и) $p = 0.4073$; а, г, ж) $\pi = 0$; б, д, з) $\pi = 1$; в, е, и) $\pi \rightarrow \infty$. Использованные для построения реализаций стартовые подмножества состояли из достижимых узлов, расположенных вдоль нижней границы $y = -\frac{L}{2}$ этих решеток. Объемы выборок, используемых для расчета относительных частот узлов w_{xy} каждой решетки на рисунке 4, составляют $n = 750$ реализаций. Белый цвет соответствует узлам с относительной частотой $w_{xy} = 0.6$, а красный — с относительной частотой $w_{xy} = 0.2$. Все узлы с относительными частотами, выходящими за указанный интервал, условно не показаны.

Нетрудно заметить, что распределения относительных частот w_{xy} , расположенные на рисунке 4 вдоль главной диагонали, соответствуют критическим значениям доли достижимых узлов $p \approx p_c(\pi)$: а) $p = 0.5928 \approx p_c(0)$; д) $p = 0.5049 \approx p_c(1)$; и) $p = 0.4073 \approx p_c(\infty)$. В таком случае распределения относительных частот w_{xy} , расположенные на рисунке 4 ниже и выше главной диагонали, будут соответствовать до- и сверхкритическим значениям доли достижимых узлов $p \leq p_c(\pi)$: б, в) $p = 0.5928 > p_c(1) > p_c(\infty)$; г) $p = 0.5049 < p_c(0)$; е) $p = 0.5049 > p_c(\infty)$; ж, з) $p = 0.4073 < p_c(0) < p_c(1)$.

Тогда оценкам мощности перколяционных кластеров P_∞ в направлении оси Oy будут соответствовать усредненные относительные частоты подмножеств узлов, расположенных вдоль верхней $y = \frac{L}{2}$ границы перколяционных решеток.

На рисунке 5а приведены зависимости статистических оценок мощности перколяционных кластеров P_∞ для двумерных квадратных решеток размерами $L = 65, 129$ и 257 узлов с $(1, 0)$ -окрестностью фон Неймана от доли достижимых узлов p . Символами «○» показаны зависимости $P_\infty(p|L, \pi)$ для решетки размером $L_1 = 65$ узлов, а символами «□» и «◇» — зависимости $P_\infty(p|L, \pi)$ для решеток с размерами $L_2 = 129$ и $L_3 = 257$ узлов соответственно.

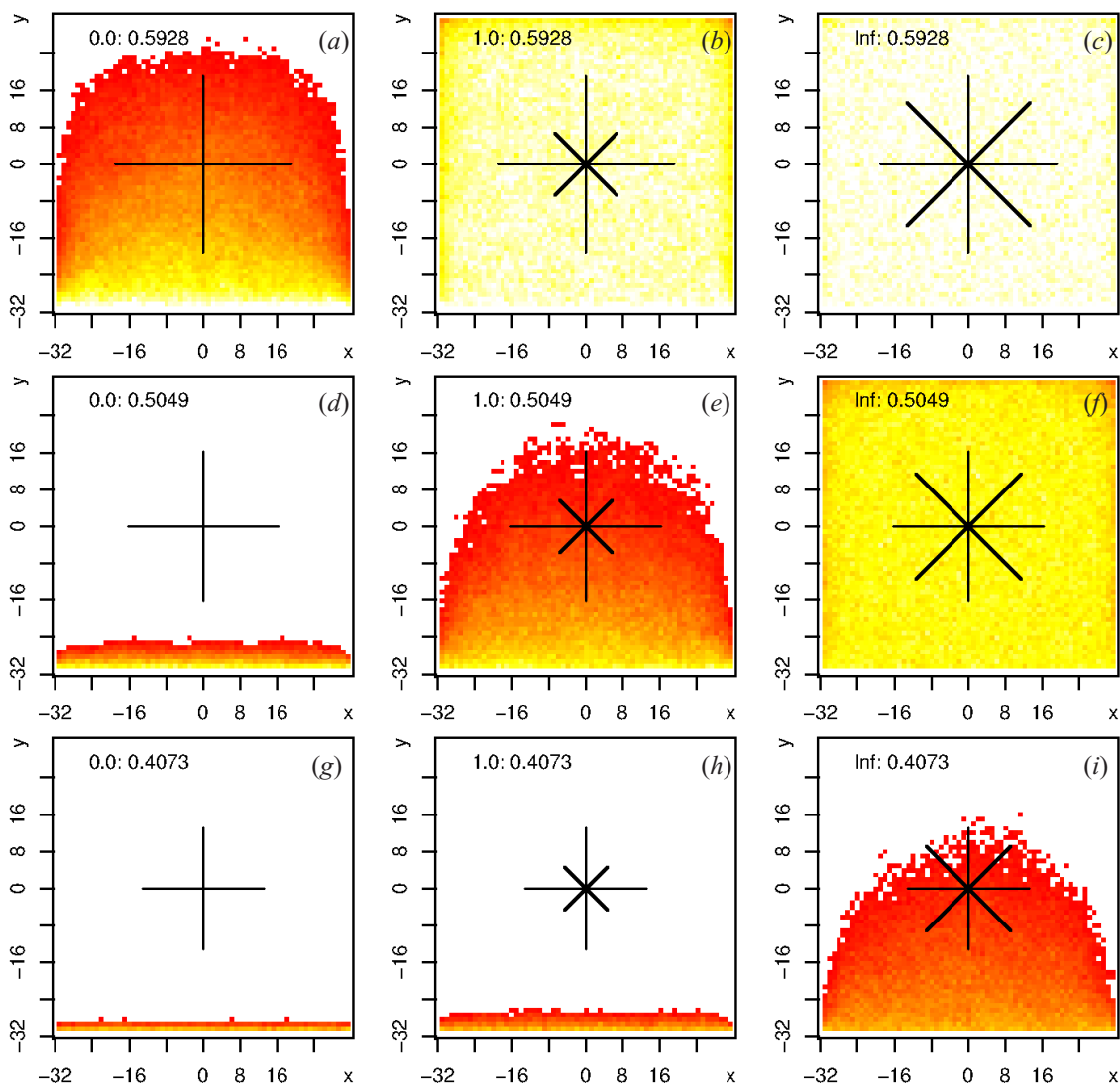


Рис. 4. Относительные частоты узлов w_{xy} на двумерных квадратных решетках размером $L = 65$ узлов с $(1, \pi)$ -окрестностью при значениях доли достижимых узлов p и показателя Минковского π : (a)–(c) $p = 0.5928$; (d)–(f) $p = 0.5049$; (g)–(i) $p = 0.4073$; (a), (d), (g) $\pi = 0$; (b), (e), (h) $\pi = 1$; (c), (f), (i) $\pi \rightarrow \infty$

Объемы выборок, используемых для расчета мощности стягивающих кластеров P_∞ , для каждой тройки значений $(p|L, \pi)$ на рисунке 5 составляет $n = 750$ реализаций. Точки соответствуют центрам, а вертикальные отрезки — 0.95-доверительным интервалам (2) для относительных частот w , усредненных вдоль верхней границы решетки $y = \frac{L}{2}$. Штриховые линии соответствуют прямым $p = p_c$, $P_\infty = 0$ и $P_\infty = p$, а сплошные линии — функции (11) при $p_c = 0.5928$.

На рисунке 5b приведены зависимости статистических оценок мощности перколяционных кластеров P_∞ для двумерных квадратных решеток размером $L = 129$ узлов с $(1, \frac{1}{2})$ -, $(1, 1)$ - и $(1, 2)$ -окрестностью от доли достижимых узлов p . Символами «○» на рисунке 5b показаны зависимости $P_\infty(p|L, \pi)$ для решетки с $(1, \frac{1}{2})$ -окрестностью, а символами «□» и «◇» — зависимости $P_\infty(p|L, \pi)$ для решеток с $(1, 1)$ - и $(1, 2)$ -окрестностями соответственно.

Сплошные линии соответствуют функции (11), где скейлинговые оценки порога перколяции $p_c(\pi)$ для двумерной квадратной решетки с $(1, \pi)$ -окрестностью Мура были получены в предыдущем разделе: $p_c(\frac{1}{2}) \approx 0.5512$, $p_c(1) \approx 0.5049$, $p_c(2) \approx 0.4643$.

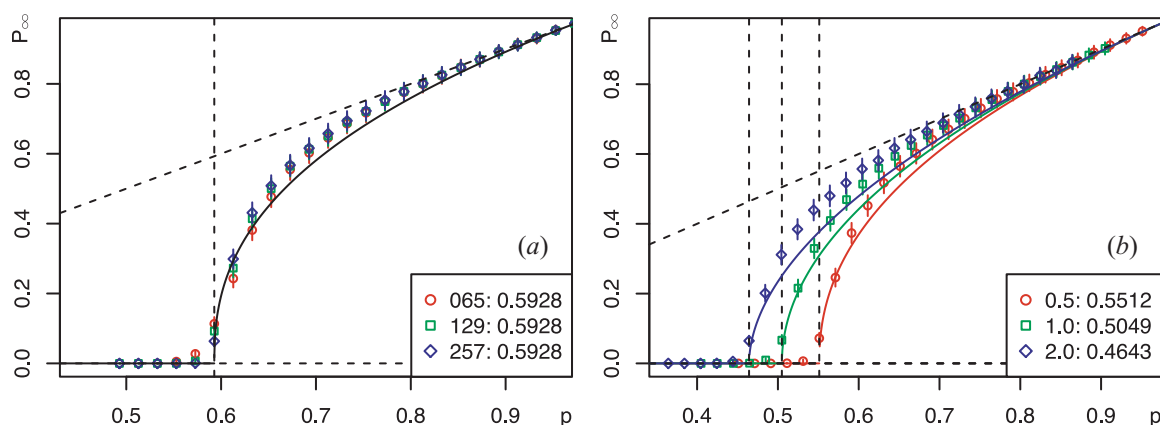


Рис. 5. Мощности кластеров $P_\infty(p|L, \pi)$, стягивающих решетку от $y = -\frac{L}{2}$ до $y = \frac{L}{2}$: (a) при $\pi = 0$ и $L = 65, 129, 257$ узлов; (b) при $\pi = \frac{1}{2}, 1, 2$ и $L = 129$ узлов

Заключение

В настоящей работе представлены статистические методы построения оценок частоты w и мощности перколяционных кластеров P_∞ , а также порога перколяции p_c по выборочной совокупности реализаций на двумерных квадратных решетках с $(1, \pi)$ -окрестностью Мура.

Порог перколяции p_c , наряду с размером решетки L и долей достижимых узлов p , играет в вышеописанных моделях роль глобального управляющего параметра. Все ранее построенные перколяционные модели допускали лишь дискретное управление по порогу протекания p_c за счет изменения топологии решетки. Приведенные в настоящей работе оценки показывают, что изменение показателя Минковского π обеспечивает непрерывное управление параметром $p_c(\pi)$ в достаточно широком диапазоне от $p_c(0) \approx 0.59282$ до $p_c(\infty) \approx 0.40728$, а линейно-логарифмическая зависимость для порога перколяции $p_c(\ln \pi)$ в первом приближении может быть аппроксимирована логистической функцией (6).

На рисунке 5 хорошо заметно, что функция (11) при $p > p_c$ демонстрирует в основном качественное соответствие с результатами статистического моделирования. Следуя работе [Москалев, 2013a] можно предположить, что степенная аппроксимация (10) без учета топологических характеристик окрестности узла решетки не является достаточно адекватным средством и может быть использована для описания наблюдаемой зависимости мощности перколяционного кластера от доли достижимых узлов $P_\infty(p)$ в сверхкритической области лишь в первом приближении. Действительно, евклидовы нормы векторов отклонений $\|e(L, \pi)\|_2$ для показанных на рисунке 5a статистических оценок P_∞ от соответствующих значений аппроксимирующей функции (11) для двумерной квадратной решетки размером $L = 65, 129$ или 257 узлов с $(1, 0)$ -окрестностью фон Неймана имеют значения, вполне сопоставимые с оценками величины $P_\infty(p|L, \pi)$: $\|e(65, 0)\|_2 = 0.1605$; $\|e(129, 0)\|_2 = 0.1562$; $\|e(257, 0)\|_2 = 0.1532$.

В той же работе было отмечено изменение качества аппроксимации зависимости мощности изотропных перколяционных кластеров от доли достижимых узлов $P_\infty(p)$ с $(1, 0)$ -окрестностью фон Неймана функцией (11) при переходе от двух- к трехмерной решетке. С формальной точки зрения это может объясняться двумя факторами: а) увеличением числа узлов, образующих единичную окрестность фон Неймана, $n_3 = 6 > n_2 = 4$; б) уменьшением критического значения доли достижимых узлов $p_{c3} \approx 0.3116 < 0.5927 \approx p_{c2}$. В таком случае при моделировании зависимости мощности изотропных перколяционных кластеров P_∞ от доли достижимых узлов p с $(1, \pi)$ -окрестностью Мура качество аппроксимации зависимости $P_\infty(p|\pi)$ функцией (11) также должно будет изменяться.

Сопоставление представленных выше результатов показывает, что качество аппроксимации эмпирической зависимости $P_\infty(p|\pi)$ функцией (11) с ростом показателя Минковского π имеет тенденцию к понижению. Действительно, евклидовы нормы векторов отклонений $\|e(L, \pi)\|_2$ для показанных на рисунке 5b статистических оценок P_∞ от соответствующих значений аппроксимирующей функции (11) для двумерной квадратной решетки размером $L = 129$ узлов с $(1, \pi)$ -окрестностью Мура с ростом показателя Минковского π также возрастают: $\|e(129, 0)\|_2 = 0.1562 < \|e(129, \frac{1}{2})\|_2 = 0.1634 < \|e(129, 1)\|_2 = 0.1909 < \|e(129, 2)\|_2 = 0.2289$.

Список литературы

- Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
- Москалев П. В., Буховец А. Г.* К определению порога перколяции узлов на квадратной решетке в π -метрике // Информатика: проблемы, методология, технологии. Материалы XI Международной научно-методической конференции. — Т. 2. — Воронеж: ВГУ, 2011. — С. 50–54.
- Москалев П. В.* О статистическом оценивании мощности перколяционного кластера // Информатика: проблемы, методология, технологии. Материалы XIII Международной научно-методической конференции. — Т. 2. — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 395–398.
- Москалев П. В.* Иерархическое построение моделей перколяции узлов на n -мерных квадратных решетках // Математика. Компьютер. Образование. Сборник тезисов XX Международной научной конференции. — № 20. — М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2013. — С. 184.
- Москалев П. В.* Структура моделей перколяции узлов на трехмерных квадратных решетках // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — Т. 5, № 4.
- Тарасевич Ю. Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 112.
- Bates D. M., Watts D. G.* Nonlinear regression analysis and its applications. — New York: John Wiley & Sons, 1988. — 371 p.
- Lee M. J.* Pseudo-random-number generators and the square site percolation threshold // Physical Review E. — 2008. — Vol. 78, No. 3. — pp. 031131.
- Moskalev P. V.* SPSL: Site percolation on square lattice. — 2012. — R package version 0.1-8. — URL: <http://cran.r-project.org/package=SPSL>.
- Newman M. E. J., Ziff R. M.* Fast Monte Carlo algorithm for site or bond percolation // Physical Review E. — 2001. — Vol. 64., No. 1. — pp. 016706.
- Stauffer D.* Scaling theory of percolation clusters // Physics Reports. — 1979. — Vol. 54, No. 1. — pp. 1–74.