**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 3 С. 383–396**

Ки&М

МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИИ

УДК: 534.54:536.3

Численный анализ конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой воздушной полости с локальным источником энергии

С. Г. Мартюшев[1,а], М. А. Шеремет[1,2,б]

[1] Томский государственный университет
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 36
[2] Томский политехнический университет,
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 30

E-mail: [а]Naabym@sibmail.com, [б]Michael-sher@yandex.ru

Получено 2 апреля 2014 г.

Проведено математическое моделирование естественной конвекции и теплового излучения в квадратной замкнутой воздушной полости с изотермическими вертикальными стенками при наличии локального источника энергии постоянной температуры. Математическая модель построена в безразмерных переменных «функция тока – завихренность скорости – температура» в приближении Буссинеска и с учетом диатермичности воздушной среды. Получены распределения изолиний функции тока и температуры в широком диапазоне изменения определяющих параметров: число Рэлея $10^3 \le \mathrm{Ra} \le 10^6$, приведенная степень черноты ограждающих стенок $0 \le \varepsilon < 1$, отношение длины источника энергии к размеру полости $0.2 \le l/L \le 0.6$ и время $0 \le \tau \le 100$. Установлены корреляционные соотношения для интегрального коэффициента теплообмена в зависимости от Ra, ε и l/L.

Ключевые слова: естественная конвекция, поверхностное излучение, локальный источник постоянной температуры, замкнутая полость, математическое моделирование

Numerical analysis of convective-radiative heat transfer in an air enclosure with a local heat source

S. G. Martyushev[1], M. A. Sheremet[1,2]

[1] *Tomsk State University, 36 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia*
[2] *Tomsk Polytechnic University, 30 Lenin Prospekt, Tomsk, 634050, Russia*

Abstract. — Mathematical simulation of natural convection and surface radiation in a square air enclosure having isothermal vertical walls with a local heat source of constant temperature has been carried out. Mathematical model has been formulated on the basis of the dimensionless variables such as stream function, vorticity and temperature by using the Boussinesq approximation and diathermancy of air. Distributions of streamlines and isotherms reflecting an effect of Rayleigh number $10^3 \le \mathrm{Ra} \le 10^6$, surface emissivity $0 \le \varepsilon < 1$, ratio between the length of heat source and the size of enclosure $0.2 \le l/L \le 0.6$ and dimensionless time $0 \le \tau \le 100$ on fluid flow and heat transfer have been obtained. Correlations for the average heat transfer coefficient in dependence on Ra, ε and l/L have been ascertained.

Keywords: natural convection, surface radiation, local heat source of constant temperature, enclosure, mathematical simulation

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 383–396 (Russian).

Введение

Естественная конвекция как один из механизмов переноса энергии представляется наиболее эффективным способом охлаждения узлов и блоков радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники вследствие высокой надежности, низкой стоимости технической реализации системы охлаждения и отсутствия шумового загрязнения [Jaluria, 1998; Sezai, Mohamad, 2000; Дульнев, 1984]. В связи с этим повышенное внимание уделяется теоретическим и экспериментальным исследованиям режимов конвективного теплопереноса в замкнутых областях при наличии локальных источников энергии [Kuznetsov, Sheremet 2006; Sezai, Mohamad, 2000; Ермолаев, Жбанов, Отпущенников, 2008; Ермолаев, Отпущенников, 2009; Кузнецов, Шеремет, 2008; Моисеева, Черкасов, 1997; Полежаев, 1970; Шеремет, 2011]. Известно [Wang, Xin, Le Quere, 2006], что в диапазоне температур воздушной среды от 20 до 30 °C изменение степени черноты ограждающих поверхностей от 0 до 0.2 приводит к росту как температуры в отдельных зонах анализируемого объекта, так и интенсивности процесса передачи энергии. Отмеченное обстоятельство характеризует соизмеримость вклада конвекции и излучения в диатермичных средах даже при умеренных температурах. Следовательно, анализ транспортных режимов массы, импульса и энергии в элементах радиоэлектронной аппаратуры (РЭА) и электронной техники (ЭТ) требует совместного рассмотрения режимов естественной конвекции и теплового излучения.

К настоящему времени проведено не так много исследований конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутых областях с источниками энергии [Alvarado et al., 2008; Bahlaoui et al., 2007; Ridouane et al., 2004; Vivek, Sharma, Balaji, 2012; Wang, Xin, Le Quere, 2006]. Во всех указанных работах изучается влияние поверхностного излучения на режимы течения и теплообмен в замкнутых прямоугольных полостях, имеющих различную ориентацию относительно вектора силы тяжести, где источниками энергии являются изотермические стенки [Alvarado et al., 2008; Ridouane et al., 2004; Vivek, Sharma, Balaji, 2012; Wang, Xin, Le Quere, 2006] или некоторые их участки [Bahlaoui et al., 2007]. Проводя анализ таких геометрически простых физических систем, авторы [Alvarado et al., 2008; Ridouane et al., 2004; Vivek, Sharma, Balaji, 2012; Wang, Xin, Le Quere, 2006] акцентировали внимание на наиболее общих эффектах, обусловленных воздействием теплового излучения. Так, например, независимо от ориентации дифференциально обогреваемой полости (две противоположные стенки — изотермические, а остальные стенки — адиабатические) относительно направления силы тяжести [Alvarado et al., 2008; Ridouane et al., 2004; Vivek, Sharma, Balaji, 2012; Wang, Xin, Le Quere, 2006] учет излучения приводит к двум значительным физическим эффектам: увеличивается интенсивность конвективного течения в полости и наблюдается охлаждение или нагрев жидкости, расположенной вблизи адиабатических стенок. При рассмотрении задачи Рэлея–Бенара (нижняя стенка нагревается, верхняя стенка охлаждается, а вертикальные стенки являются адиабатическими) для квадратной полости [Ridouane et al., 2004] установлено, что изменение коэффициента излучения ограждающих поверхностей существенно отражается на величине критического числа Рэлея, характеризующего переход к колебательным режимам. В случае же прямоугольной полости с тремя участками постоянной максимальной температуры на нижней стенке, изотермической верхней стенкой с минимальной температурой и остальными адиабатическими стенками [Bahlaoui et al., 2007] установлены три режима течения в зависимости от значений числа Рэлея и степени черноты ограждающих стенок. В частности, показано, что увеличение Ra во всем диапазоне изменения приведенной степени черноты ($0 < \varepsilon < 1$) проявляется в повышении количества реализуемых режимов течения, а рост степени черноты при малых числах Рэлея отражается в сокращении количества реализуемых режимов течения.

В представленных работах [Alvarado et al., 2008; Bahlaoui et al., 2007; Ridouane et al., 2004; Vivek, Sharma, Balaji, 2012; Wang, Xin, Le Quere, 2006] отмечается также невозможность рассмотрения естественной конвекции и теплового излучения независимо друг от друга аналогично тому, как в случае естественной конвекции нельзя отделить гидродинамическую часть задачи от тепловой [Jaluria, 1998; Шеремет, 2011].

Во всех исследованиях [Alvarado et al., 2008; Bahlaoui et al., 2007; Ridouane et al., 2004; Vivek, Sharma, Balaji, 2012; Wang, Xin, Le Quere, 2006] в качестве источников энергии рассматривались стенки полости или их части. При анализе режимов теплопереноса в элементах РЭА и ЭТ необходимо отдельно учитывать наличие в полости тепловыделяющих объектов конечных размеров, режимы работы которых определяют формирование различных термогидродинамических структур в полости [Jaluria, 1998; Дульнев, 1984]. Необходимо также отметить, что наличие источников энергии конечных размеров в случае реализации естественной конвекции может существенным образом модифицировать структуру течения и режимы теплопереноса [Martyushev, Sheremet, 2012; Мартюшев, Шеремет, 2010; Шеремет, 2011].

Целью настоящей работы является математическое моделирование ламинарных режимов естественной конвекции и поверхностного теплового излучения в замкнутой квадратной полости с локальным источником постоянной температуры конечных размеров, расположенным в зоне основания анализируемого объекта. Рассматриваемая область решения достаточно хорошо моделирует типичный блок РЭА или ЭТ, содержащий тепловыделяющий элемент [Jaluria, 1998; Дульнев, 1984]. Практическая значимость работы заключается в изучении на основе подходов вычислительной механики наиболее острой проблемы в области электроники — разработка пассивных методов охлаждения тепловыделяющих элементов РЭА или ЭТ.

Математическая модель

Рассматривается краевая задача естественной конвекции и поверхностного теплового излучения в замкнутой воздушной полости, изображенной на рисунке 1. Во все время процесса температура источника тепловыделения, расположенного в зоне основания, постоянна. Горизонтальные стенки являются теплоизолированными, а вертикальные стенки поддерживаются при постоянной минимальной температуре, что отражает охлаждение анализируемого объекта со стороны вертикальных стенок. Такая система пассивного охлаждения (без привлечения зон активной внешней вентиляции) технически может быть реализована, например, введением тепловых труб [Jaluria, 1998] на вертикальных стенках.

Считается, что теплофизические свойства газа не зависят от температуры, а режим течения является ламинарным. Внутри полости находится воздух, который считается вязкой, теплопроводной, диатермичной, ньютоновской жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска. Движение воздуха и теплоотдача во внутреннем объеме принимаются плоскими, теплообмен излучением от источника тепловыделения и между стенками моделируется на основе приближения поверхностного излучения [Siegel, Howell, 2002]. Поверхности стенок считаются диффузно-серыми. Относительно отраженного излучения используются два предположения: 1) отраженное излучение является диффузным, т. е. интенсивность отраженного излучения в любой точке границы поверхности равномерно распределена по всем направлениям, и 2) отраженное излучение равномерно распределено по каждой поверхности замкнутой области решения.

Процесс теплопереноса в рассматриваемой области описывается системой нестационарных двумерных уравнений конвекции в приближении Буссинеска в воздушной полости [Шеремет, 2011] в условиях поверхностного излучения [Siegel, Howell, 2002].

Краевая задача формулируется в безразмерных переменных «функция тока – завихренность скорости – температура» [Шеремет, 2011]. В качестве масштаба расстояния выбрана длина воздушной полости по оси x. Для приведения к безразмерному виду системы уравнений использовались следующие соотношения:

$$X = \frac{x}{L},\ \ Y = \frac{y}{L},\ \ \tau = \frac{t}{t_0},\ \ U = \frac{u}{V_0},\ \ V = \frac{v}{V_0},\ \ \Theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_c},\ \ \Psi = \frac{\psi}{\psi_0},\ \ \Omega = \frac{\omega}{\omega_0},$$

где x, y — координаты декартовой системы координат; X, Y — безразмерные координаты, соответствующие координатам x, y; L — размер воздушной полости; t — время; $t_0 = L/V_0$ — масштаб времени; τ — безразмерное время; u, v — составляющие скорости в проекции на оси x, y соответственно; U, V — безразмерные составляющие скорости, соответствующие u, v; $V_0 = \sqrt{g\beta(T_h - T_c)L}$ — масштаб скорости (скорость естественной конвекции); g — ускорение свободного падения; β — температурный коэффициент объемного расширения; $T_0 = 0.5(T_h + T_c)$ — начальная температура области решения; T_h — температура источника тепловыделения; T_c — температура вертикальных стенок; Θ — безразмерная температура; Ψ — безразмерная функция тока, соответствующая ψ; ψ — функция тока $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$; $\psi_0 = V_0 L$ — масштаб функции тока; Ω — безразмерный аналог завихренности скорости, соответствующий ω; ω — завихренность скорости $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$; $\omega_0 = V_0/L$ — масштаб завихренности скорости.

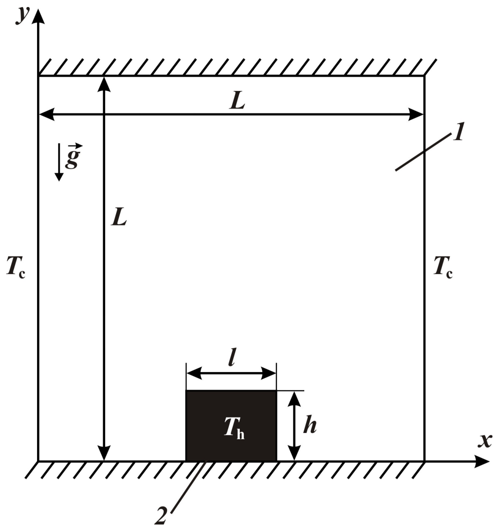

Рис. 1. Область решения: *1* — воздушная полость, *2* — источник тепловыделения

Безразмерные уравнения Буссинеска имеют следующий вид [Шеремет, 2011]:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Omega}{\partial X} - \frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Omega}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ra}}}\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial Y^2}\right) + \frac{\partial\Theta}{\partial X}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} + \frac{\partial\Psi}{\partial Y}\frac{\partial\Theta}{\partial X} - \frac{\partial\Psi}{\partial X}\frac{\partial\Theta}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ra}}}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}\right), \quad (3)$$

где $\mathrm{Pr} = \nu/a$ — число Прандтля; $\mathrm{Ra} = g\beta(T_h - T_c)L^3/\nu a$ — число Рэлея; a — коэффициент температуропроводности воздуха; ν — коэффициент кинематической вязкости воздуха.

Начальные и граничные условия для сформулированной задачи (1)–(3) рассматривались в следующем виде.

В **начальный момент времени** предполагалось, что воздух, заполняющий полость, неподвижен, поэтому $\Psi(X,Y,0) = \Omega(X,Y,0) = 0$. Начальная температура, вследствие выбранного обезразмеривания, принимала вид $\Theta(X,Y,0) = \Theta_0 = 0$.

Граничные условия:

- на границе $Y = 0$: $\Psi = 0$, $\dfrac{\partial\Psi}{\partial Y} = 0$, $\dfrac{\partial\Theta}{\partial Y} = \mathrm{N}_{rc}Q_{rad}$;

- на границе $Y = 1$: $\Psi = 0,\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0,\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial Y} = -\mathrm{N}_{\mathrm{rc}} Q_{\mathrm{rad}}$;
- на границах $X = 0$ и $X = 1$: $\Psi = 0,\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial X} = 0,\ \Theta = -0.5$;
- на поверхности источника энергии: $\Psi = 0,\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \overline{n}} = 0,\ \Theta = 0.5$.

Здесь $\mathrm{N}_{\mathrm{rc}} = \sigma T_{\mathrm{h}}^4 L \big/ \left[\lambda\left(T_{\mathrm{h}} - T_{\mathrm{c}}\right)\right]$ — радиационно-кондуктивный параметр; σ — постоянная Стефана–Больцмана; λ — коэффициент теплопроводности воздуха.

В представленных граничных условиях на поверхностях твердых стенок и локального источника энергии формулируются классические соотношения для функции тока $\left(\Psi = \mathrm{const} = 0,\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial \overline{n}} = 0\right)$ [Пасконов, Полежаев, Чудов, 1984; Шеремет, 2011], характеризующие наличие условий прилипания для скорости на стенке. На вертикальных стенках поддерживается постоянная температура охлаждения T_{c}, которая в результате обезразмеривания $\Theta_{\mathrm{c}} = \dfrac{T_{\mathrm{c}} - T_0}{T_{\mathrm{h}} - T_{\mathrm{c}}}$ при $T_0 = 0.5\left(T_{\mathrm{h}} + T_{\mathrm{c}}\right)$ принимает значение $\Theta_{\mathrm{c}} = -0.5$. На поверхности локального источника энергии моделируется постоянная температура T_{h}, которая в безразмерном виде принимает значение $\Theta_{\mathrm{h}} = 0.5$. Горизонтальные стенки считаются адиабатическими, что физически означает отсутствие теплообмена с окружающей средой. Поскольку вблизи твердых стенок теплота передается за счет теплопроводности и излучения, сумма размерных плотностей тепловых потоков за счет кондукции и излучения со стороны полости на этих стенках равна нулю: $q_{\mathrm{cond}} + q_{\mathrm{rad}} = 0$. Расписывая плотность кондуктивного теплового потока на основе закона Фурье: $q_{\mathrm{cond}} = \mp\lambda \dfrac{\partial T}{\partial y}$ (знак определяется расположением границы), получим условие теплоизоляции в виде $q_{\mathrm{rad}} = \pm\lambda \dfrac{\partial T}{\partial y}$. Обезразмеривая данное соотношение с учетом введенных масштабов, а также, принимая во внимание, что $q_{\mathrm{rad}} = Q_{\mathrm{rad}} \sigma T_{\mathrm{h}}^4$, получим $\dfrac{\partial \Theta}{\partial Y} = \pm \mathrm{N}_{\mathrm{rc}} Q_{\mathrm{rad}}$.

Дифференциальные уравнения (1)–(3) с соответствующими начальными и граничными условиями решены методом конечных разностей [Шеремет, 2011] на равномерной сетке 100×100. Для аппроксимации конвективных слагаемых в эволюционных уравнениях применялась монотонная схема А. А. Самарского второго порядка, позволяющая учесть знак скорости, для диффузионных слагаемых — центральные разности. Значения завихренности на поверхностях стенок определялись по формулам второго порядка точности. Уравнения дисперсии вихря (1) и энергии (3) решались с использованием локально-одномерной схемы А.А. Самарского. Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей разрешалась методом прогонки. Для дискретизации уравнения Пуассона (2) применялся пятиточечный шаблон «крест» на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученная СЛАУ разрешалась методом последовательной верхней релаксации. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Для определения безразмерной плотности радиационного потока Q_{rad} применялся метод решения с использованием плотности потока эффективного излучения [Siegel, Howell, 2002], который основан на реализации следующих двух разностных уравнений с применением метода последовательной верхней релаксации:

$$Q_{\mathrm{rad},k} = R_k - \sum_{i=1}^{N} F_{k-i} R_i, \tag{4}$$

$$R_k = \left(1-\varepsilon_k\right)\sum_{i=1}^{N} F_{k-i} R_i + \varepsilon_k \left(1-\xi\right)^4 \left(\Theta_k + 0.5\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^4. \tag{5}$$

Здесь $Q_{\text{rad},k}$ — безразмерная плотность радиационного потока, подводимого к k-й поверхности; R_k — безразмерная плотность эффективного излучения k-й поверхности; F_{k-i} — угловой коэффициент между поверхностями k и i; ε — приведенная степень черноты ограждающих стенок; ε_k — приведенная степень черноты k-й поверхности; Θ_k — безразмерная температура k-й поверхности; $\xi = T_\text{c}/T_\text{h}$ — температурный параметр.

Для вычисления угловых коэффициентов применялся метод Хоттеля [Siegel, Howell, 2002].

Разработанный метод решения был протестирован на ряде модельных задач свободноконвективного теплопереноса [Мартюшев, Шеремет, 2012; Шеремет, 2011]. В качестве первой тестовой задачи рассматривалась естественная конвекция вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости, находящейся в квадратной полости с изотермическими вертикальными и адиабатическими горизонтальными стенками [de Vahl Davis, 1983]. На рисунках 2, 3 представлены распределения изолиний функции тока и температуры при Pr = 0.7 и различных значениях числа Рэлея в сравнении с данными [Dixit, Babu, 2006].

(*a*) (*b*)

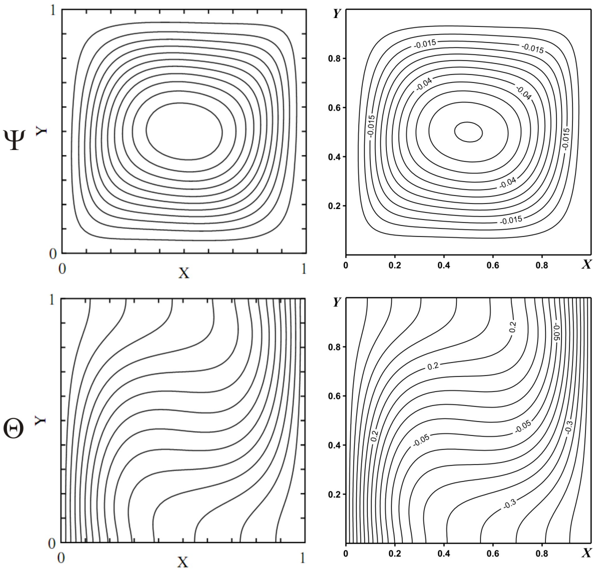

Рис. 2. Изолинии функции тока Ψ и температуры Θ при Ra = 10^4: данные [Dixit, Babu, 2006] (*a*), полученные результаты (*b*)

(*a*) (*b*)

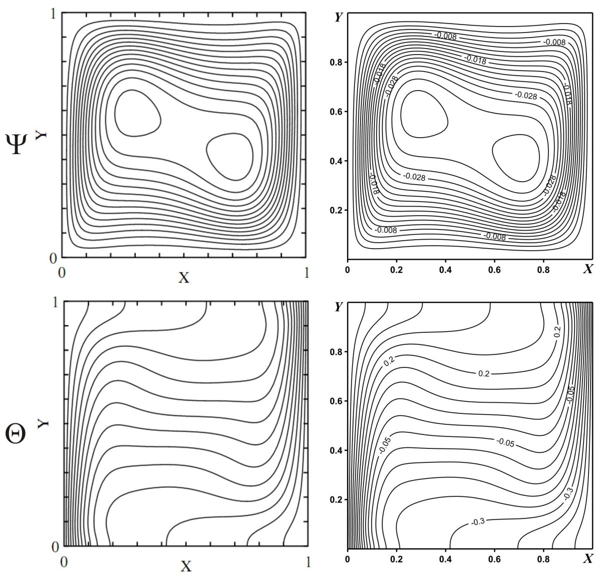

Рис. 3. Изолинии функции тока Ψ и температуры Θ при Ra = 10^5: данные [Dixit, Babu, 2006] (*a*), полученные результаты (*b*)

В таблице представлены зависимости значений компонент скорости, среднего и локального чисел Нуссельта на изотермических вертикальных стенках от числа Рэлея в сравнении с результатами других авторов.

Таблица. Зависимости значений компонент скорости и числа Нуссельта от числа Рэлея

	Полученные результаты	[de Vahl Davis, 1983]	[Manzari, 1999]	[Mayne, Usmani, Crapper, 2000]	[Wan, Patnaik, Wei, 2001]
Ra = 10^3					
$U_{\max}$ при $X = 0.5$	3.644 ($Y = 0.81$)	3.634 ($Y = 0.813$)	3.68 ($Y = 0.817$)	3.649 ($Y = 0.813$)	3.643 ($Y = 0.817$)
$V_{\max}$ при $Y = 0.5$	3.692 ($X = 0.18$)	3.679 ($X = 0.179$)	3.73 ($X = 0.183$)	3.696 ($X = 0.179$)	3.686 ($X = 0.183$)

	Полученные результаты	[de Vahl Davis, 1983]	[Manzari, 1999]	[Mayne, Usmani, Crapper, 2000]	[Wan, Patnaik, Wei, 2001]
Nu_{max}	1.507 ($Y = 0.09$)	1.5 ($Y = 0.092$)	1.47 ($Y = 0.109$)	1.51 ($Y = 0.09$)	1.444 ($Y = 0.092$)
Nu_{min}	0.691 ($Y = 1.0$)	0.692 ($Y = 1.0$)	0.623 ($Y = 1.0$)	0.691 ($Y = 1.0$)	0.665 ($Y = 1.0$)
Nu_{avg}	1.117	1.118	1.074	–	1.073
$\mathrm{Ra} = 10^4$					
U_{max} при $X = 0.5$	16.153 ($Y = 0.82$)	16.2 ($Y = 0.823$)	16.1 ($Y = 0.817$)	16.18 ($Y = 0.824$)	15.967 ($Y = 0.817$)
V_{max} при $Y = 0.5$	19.573 ($X = 0.12$)	19.51 ($X = 0.12$)	19.9 ($X = 0.125$)	19.618 ($X = 0.12$)	19.98 ($X = 0.117$)
Nu_{max}	3.531 ($Y = 0.14$)	3.53 ($Y = 0.143$)	3.47 ($Y = 0.125$)	3.531 ($Y = 0.143$)	3.441 ($Y = 0.133$)
Nu_{min}	0.584 ($Y = 1.0$)	0.586 ($Y = 1.0$)	0.497 ($Y = 1.0$)	0.585 ($Y = 1.0$)	0.528 ($Y = 1.0$)
Nu_{avg}	2.241	2.243	2.084	–	2.155
$\mathrm{Ra} = 10^5$					
U_{max} при $X = 0.5$	34.708 ($Y = 0.85$)	34.81 ($Y = 0.855$)	34.0 ($Y = 0.857$)	34.774 ($Y = 0.854$)	33.51 ($Y = 0.85$)
V_{max} при $Y = 0.5$	68.09 ($X = 0.07$)	68.22 ($X = 0.066$)	70.0 ($X = 0.068$)	68.692 ($X = 0.067$)	70.81 ($X = 0.07$)
Nu_{max}	7.755 ($Y = 0.08$)	7.71 ($Y = 0.08$)	7.71 ($Y = 0.08$)	7.708 ($Y = 0.084$)	7.662 ($Y = 0.085$)
Nu_{min}	0.721 ($Y = 1.0$)	0.729 ($Y = 1.0$)	0.614 ($Y = 1.0$)	0.728 ($Y = 1.0$)	0.678 ($Y = 1.0$)
Nu_{avg}	4.509	4.519	4.3	–	4.352
$\mathrm{Ra} = 10^6$					
U_{max} при $X = 0.5$	64.363 ($Y = 0.85$)	65.33 ($Y = 0.851$)	65.4 ($Y = 0.875$)	65.691 ($Y = 0.846$)	65.55 ($Y = 0.86$)
V_{max} при $Y = 0.5$	217.345 ($X = 0.04$)	216.75 ($X = 0.039$)	228.0 ($X = 0.039$)	220.833 ($X = 0.038$)	227.24 ($X = 0.04$)
Nu_{max}	18.266 ($Y = 0.03$)	17.92 ($Y = 0.038$)	17.46 ($Y = 0.039$)	17.531 ($Y = 0.038$)	17.39 ($Y = 0.04$)
Nu_{min}	0.934 ($Y = 1.0$)	0.989 ($Y = 1.0$)	0.716 ($Y = 1.0$)	0.985 ($Y = 1.0$)	0.903 ($Y = 1.0$)
Nu_{avg}	8.841	8.800	8.743	–	8.632

На рисунке 4 представлены профили температуры в сечении $Y = 0.5$ при различных значениях числа Рэлея в сравнении с данными [Dixit, Babu, 2006].

В качестве второй тестовой задачи рассматривалась естественная конвекция и поверхностное тепловое излучение в замкнутой квадратной воздушной полости с изотермическими вертикальными и адиабатическими горизонтальными стенками [Wang, Xin, Le Quere, 2006; Мартюшев, Шеремет, 2012]. Определяемыми величинами являлись распределения изолиний функции тока и температуры (рис. 5) при $\mathrm{Ra} = 10^6$, $\varepsilon = 0.8$, а также профили температуры (рис. 6a) и горизонтальной компоненты скорости (рис. 6b) в сечении $X = 0.5$ при $\mathrm{Ra} = 10^6$, $\varepsilon = 0.2$.

Результаты, представленные на рис. 2–6 и в таблице, наглядно показывают, что разработанный численный алгоритм решения задач естественной конвекции и конвективно-радиационного теплопереноса приводит к достаточно хорошему согласованию с результатами других авторов.

Разработанный метод решения также был протестирован на множестве сеток. На рисунке 7 представлены временные зависимости средних конвективного $\overline{\mathrm{Nu}}_{con} = \int_0^1 \left|\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right|_{X=0} dY$ и радиационного

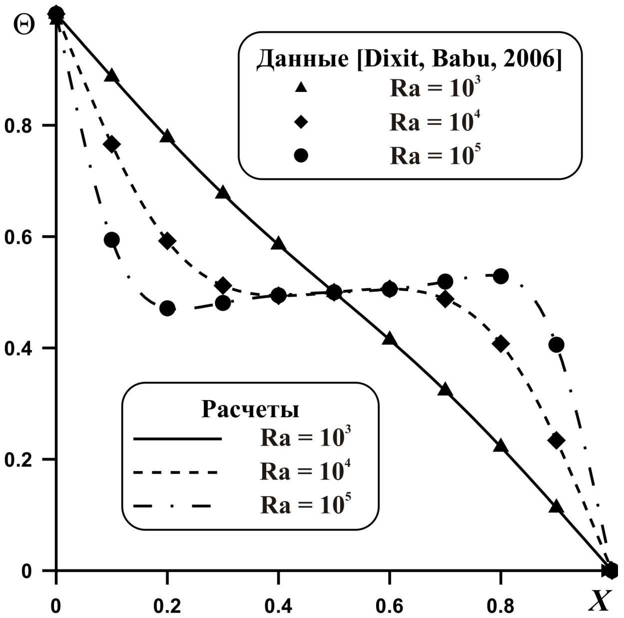

Рис. 4. Профили температуры в сечении $Y = 0.5$ при различных Ra

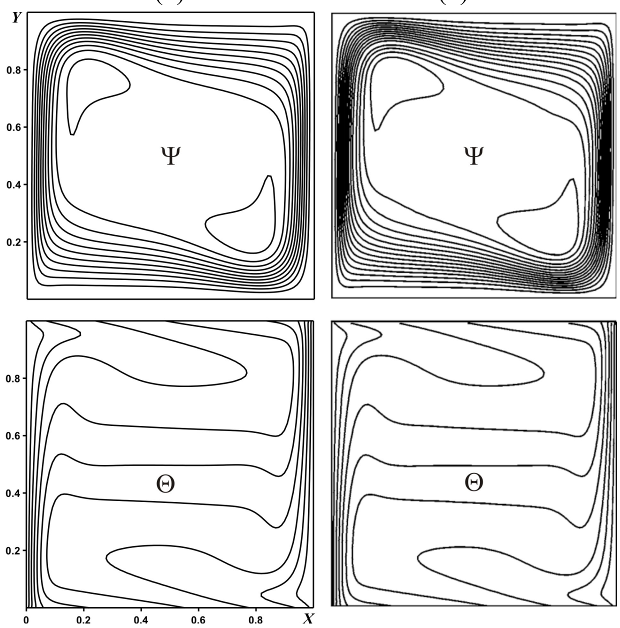

Рис. 5. Линии тока Ψ и изотермы Θ: полученные результаты (*a*), данные [Wang et al., 2006] (*б*)

$\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}} = \mathrm{N}_{\mathrm{rc}} \int\limits_0^1 Q_{\mathrm{rad}}\big|_{X=0}\, dY$ чисел Нуссельта от размерности разностной сетки при $\mathrm{Ra} = 10^5$, $\mathrm{Pr} = 0.7$, $\varepsilon = 0.6$, $l/L = 0.2$. Из рисунка 7 видно, что с течением времени наблюдается тепловое установление процесса, поскольку интегральные коэффициенты теплообмена при $\tau = 100$ не изменяются. В связи с последним считается, что $\tau = 100$ характеризует стационарный режим теплопереноса. В стационарном режиме влияние сеточных параметров на $\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}$ и $\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}$ можно описать следующим образом: $\dfrac{\left|\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}^{100\times100} - \overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}^{50\times50}\right|}{\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}^{100\times100}} \times 100\,\% \approx 8.1\,\%$, $\dfrac{\left|\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}^{100\times100} - \overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}^{150\times150}\right|}{\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}^{100\times100}} \times 100\,\% \approx 2.3\,\%$,

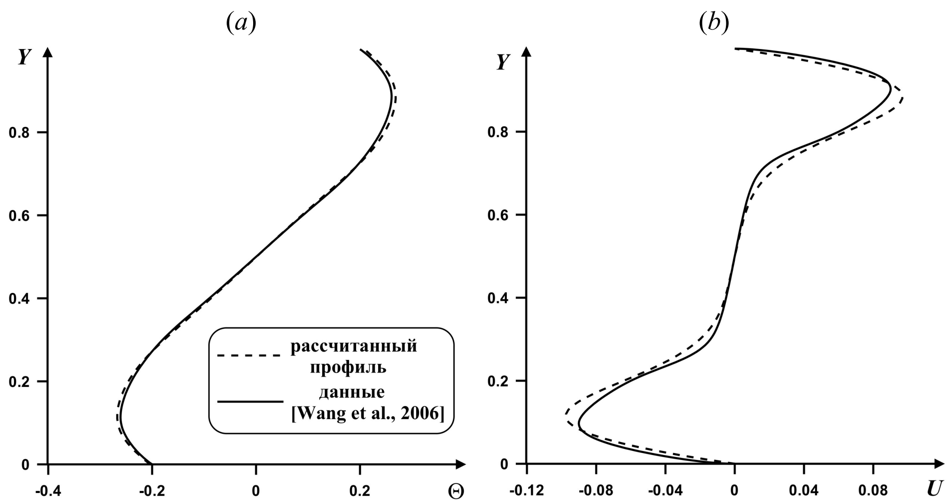

Рис. 6. Профили температуры (a) и горизонтальной компоненты скорости (b) в сечении $X = 0.5$

$\dfrac{\left|\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}^{100\times100} - \overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}^{50\times50}\right|}{\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}^{100\times100}} \times 100\% \approx 2.3\,\%$, $\dfrac{\left|\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}^{150\times150} - \overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}^{100\times100}\right|}{\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}^{100\times100}} \times 100\,\% \approx 0.7\,\%$. Поскольку уменьшение шага разностной сетки отражается на повышении времени счета, то для дальнейшего анализа была выбрана разностная сетка размерности 100×100 с целью оптимизации точности вычислений и времени расчета.

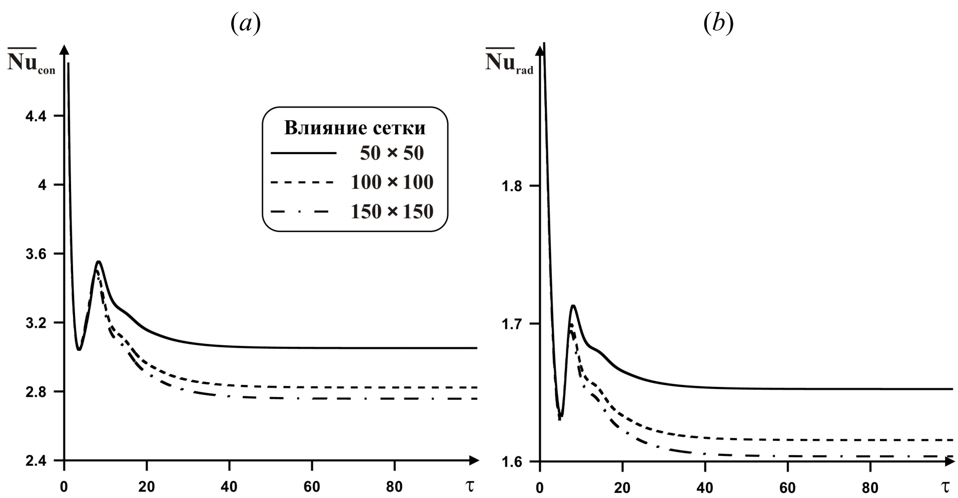

Рис. 7. Зависимости среднего конвективного (a) и радиационного (b) чисел Нуссельта от времени и размерности разностной сетки

Результаты численного моделирования

Численный анализ проведен при следующих значениях безразмерных комплексов, характеризующих режимы конвективно-радиационного теплопереноса: $\mathrm{Ra} = 10^3$, $N_{rc} = 16.79$; $\mathrm{Ra} = 10^4$, $N_{rc} = 36.34$; $\mathrm{Ra} = 10^5$, $N_{rc} = 77.87$; $\mathrm{Ra} = 10^6$, $N_{rc} = 167.85$; $\mathrm{Pr} = 0.7$; $\xi = 0.97$; $h/L = 0.2$; $0 \le \tau \le 100$; $0 \le \varepsilon < 1$; $0.2 \le l/L \le 0.6$. Необходимо отметить, что влияние числа Рэлея, приведенной степени черноты и относительной длины тепловыделяющего элемента на локальные распределения изолиний функции тока и температуры продемонстрировано в условиях стационарного процесса (при $\tau = 100$). Данный момент времени характеризует термогидродинамическое установление анализируемого явления, что можно проследить, например, по временным зависимостям для интегральных коэффициентов теплообмена.

На рисунке 8 представлены распределения изолиний функции тока и температуры, отражающие влияние числа Рэлея на структуру течения и теплоперенос при $\varepsilon = 0.6$, $l/L = 0.2$. Во всем диапазоне изменения Ra в полости формируются две конвективные ячейки, отражающие наличие восходящих потоков в центральной части полости и нисходящих вблизи холодных вертикальных стенок. При $\mathrm{Ra} = 10^3$ определяющим механизмом переноса энергии в полости является теплопроводность, что достаточно хорошо проиллюстрировано в распределении изотерм (рис. 8a). Увеличение числа Рэлея приводит к смещению ядер конвективных ячеек к верхней стенке полости. Рост максимального абсолютного значения функции тока $\left|\Psi\right|_{\max}\Big|_{\mathrm{Ra}=10^3} = 0.0081 < \left|\Psi\right|_{\max}\Big|_{\mathrm{Ra}=10^4} = 0.034 < \left|\Psi\right|_{\max}\Big|_{\mathrm{Ra}=10^5} = 0.05$ характеризует увеличение скорости конвективного течения, что проявляется в интенсификации конвективного переноса энергии (наблюдается рост интегральных безразмерных коэффициентов теплоотдачи на характерных границах). Формирование устойчивого термического факела над источником энергии происходит в режиме, соответствующем $\mathrm{Ra} = 10^5$ (рис. 8c). Рост Ra также проявляется в уменьшении толщины тепловых пограничных слоев как вблизи вертикальных стенок тепловыделяющего элемента, так и вблизи вертикальных стенок полости, что подтверждается сгущением изолиний температуры на рисунке 8 вблизи этих поверхностей.

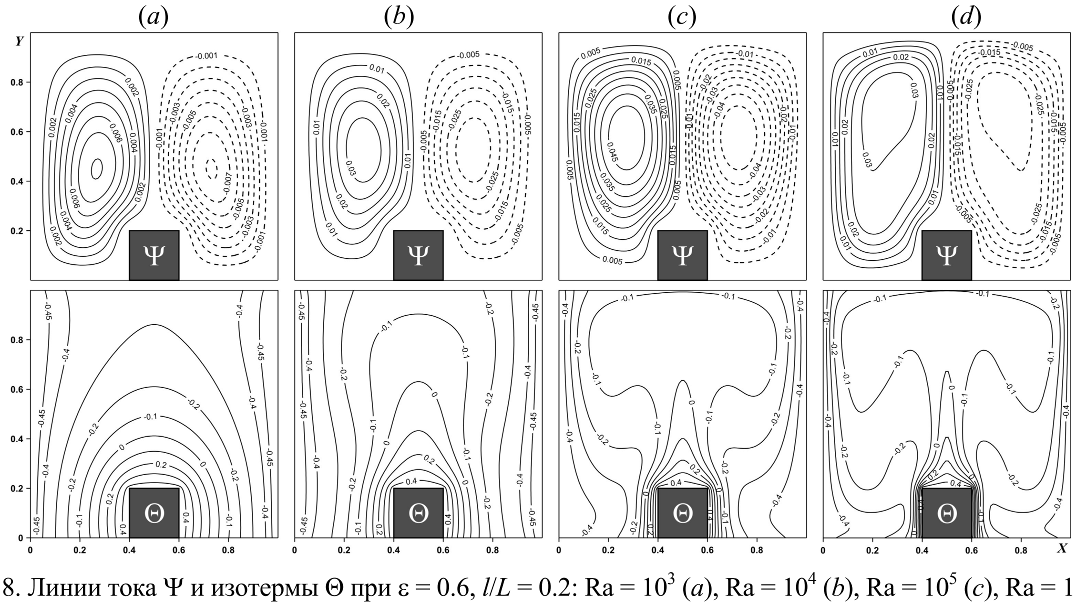

Рис. 8. Линии тока Ψ и изотермы Θ при $\varepsilon = 0.6$, $l/L = 0.2$: $\mathrm{Ra} = 10^3$ (*a*), $\mathrm{Ra} = 10^4$ (*b*), $\mathrm{Ra} = 10^5$ (*c*), $\mathrm{Ra} = 10^6$ (*d*)

Детальная картина распределения температуры и вертикальной компоненты скорости представлена на рисунке 9.

Следует отдельно отметить существенный рост Θ в верхней части полости с повышением числа Рэлея (рис. 9a). Увеличение роли выталкивающей силы отражается в росте скоростей движения воздушной среды (рис. 9b).

Влияние приведенной степени черноты на распределения линий тока и изотерм при $\mathrm{Ra} = 10^5$, $l/L = 0.2$ показано на рисунке 10. Необходимо отметить, что рост ε незначительно отражается в интенсификации конвективного течения. Наиболее существенные изменения претерпевают изотермы вблизи адиабатических горизонтальных стенок — наблюдается искривление линий постоянных температур в этой области с увеличением степени черноты. Распределения изотерм также наглядно демонстрируют уменьшение температуры в верхней части полости и увеличение Θ в нижней части с ростом ε.

На рисунке 11 представлена зависимость средних конвективного и радиационного чисел Нуссельта от времени и приведенной степени черноты ограждающих стенок. С увеличением ε

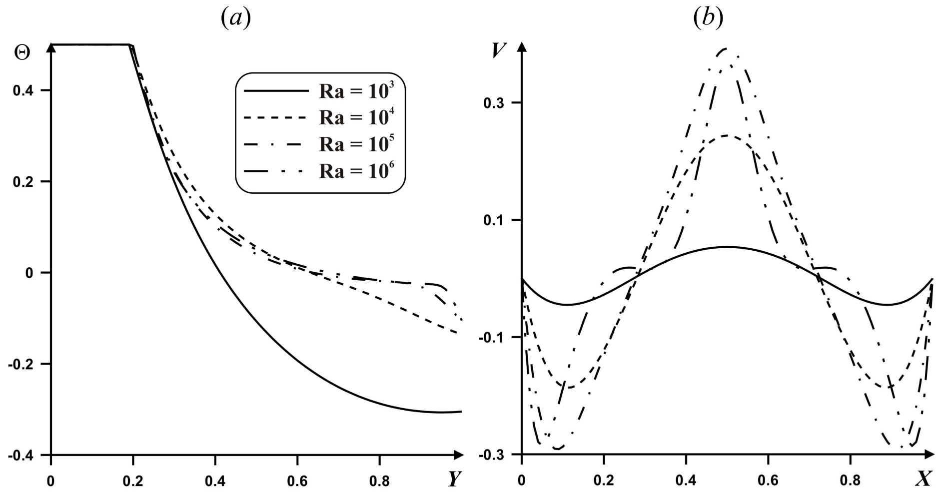

Рис. 9. Профили температуры в сечении $X = 0.5$ (a) и вертикальной компоненты скорости в сечении $Y = 0.5$ (b) при $\varepsilon = 0.6$, $l/L = 0.2$ и различных значениях числа Рэлея

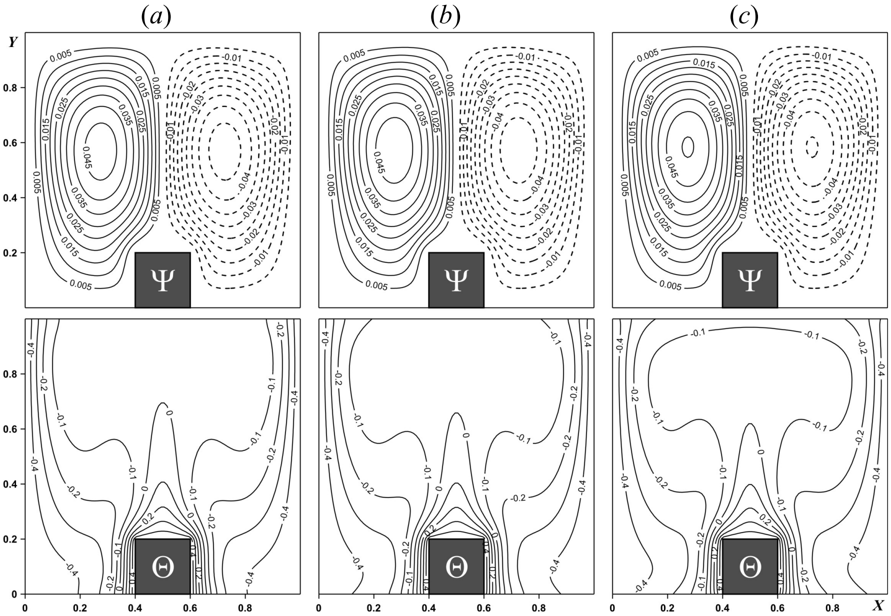

Рис. 10. Линии тока Ψ и изотермы Θ при $\mathrm{Ra} = 10^5$, $l/L = 0.2$: $\varepsilon = 0$ (a), $\varepsilon = 0.3$ (b), $\varepsilon = 0.9$ (c)

наблюдается характерное снижение интенсивности конвективного теплообмена на поверхности вертикальных стенок (при $\tau = 100$ среднее конвективное число Нуссельта при изменении ε от 0 до 0.9 уменьшается на 9.2 %), в то время как среднее радиационное число Нуссельта увеличивается (при $\tau = 100$ $\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}$ при изменении ε от 0.3 до 0.9 повышается в 3.1 раза). Изменение приведенной степени черноты $0 \le \varepsilon < 1$ не отражается на скорости установления $\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}}$ и $\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}}$.

Увеличение длины тепловыделяющего элемента в диапазоне $0.2 \le l/L \le 0.4$ приводит к существенному росту температуры на оси теплового факела (рис. 12a). Дальнейшее повышение l/L до значения 0.6 незначительно изменяет Θ на центральной оси полости $X = 0.5$. Такое влияние относительного размера источника энергии связано с формированием при $l/L = 0.4$ теплового факела, полностью определяющего температурное поле в полости, которое незначительно изменяется с ростом l/L в зоне $Y > 0.35$ (рис. 13). При этом вертикальная компонента скорости в сечении $Y = 0.5$ также изменяется несущественно (рис. 12b).

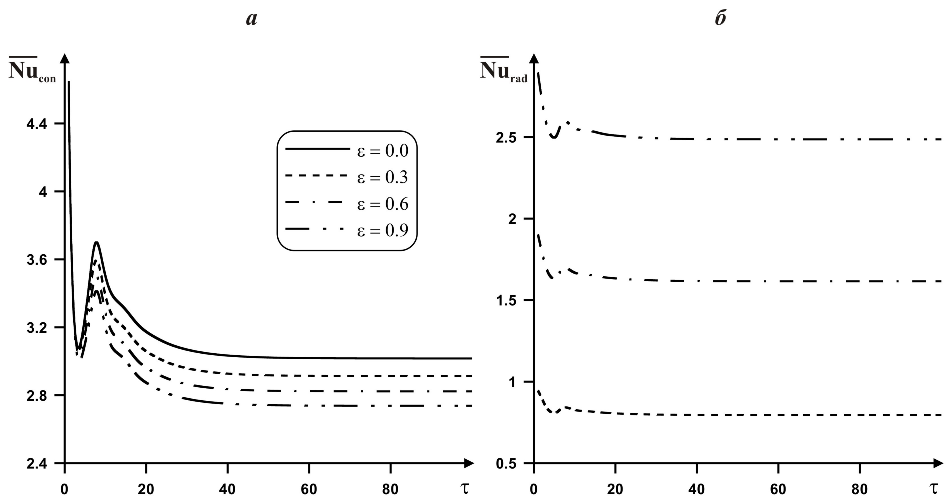

Рис. 11. Зависимости среднего конвективного (*а*) и радиационного (*б*) чисел Нуссельта от времени и приведенной степени черноты при Ra = 10^5, $l/L = 0.2$

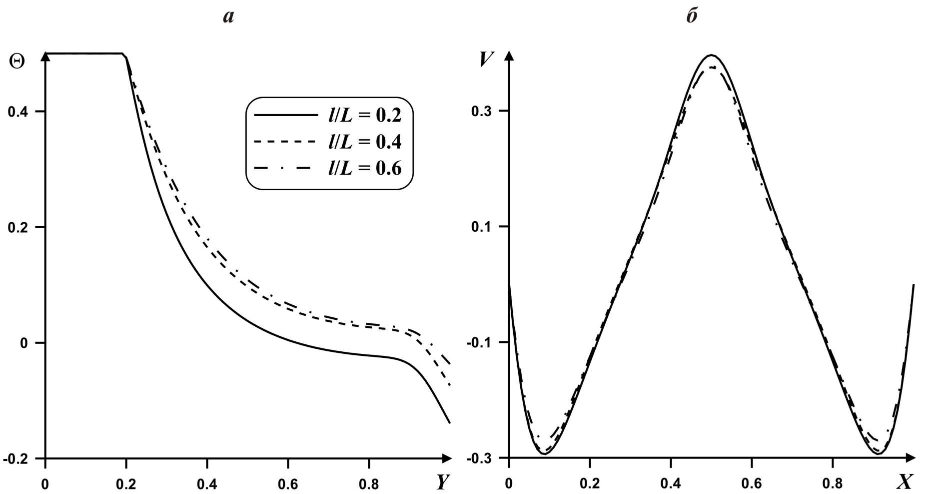

Рис. 12. Профили температуры в сечении $X = 0.5$ (*а*) и вертикальной компоненты скорости в сечении $Y = 0.5$ (*б*) при Ra = 10^5, ε = 0.9 и различных длинах источника энергии

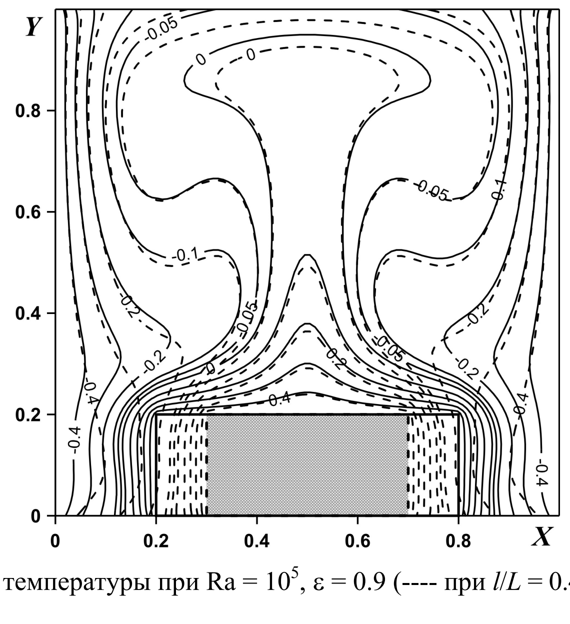

Рис. 13. Изолинии температуры при Ra = 10^5, ε = 0.9 (---- при $l/L = 0.4$, —— при $l/L = 0.6$)

В результате проведенных исследований были получены корреляционные соотношения для средних конвективного и радиационного чисел Нуссельта на изотермических вертикальных стенках полости при $10^3 \le \mathrm{Ra} \le 10^6$, $0.3 \le \varepsilon \le 0.9$, $0.2 \le l/L \le 0.6$ в стационарном режиме:

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{con}} = 0.575 \cdot \mathrm{Ra}^{0.185} \cdot \varepsilon^{-0.014} \cdot \left(l/L\right)^{0.359};$$

$$\overline{\mathrm{Nu}}_{\mathrm{rad}} = 0.084 \cdot \mathrm{Ra}^{0.348} \cdot \varepsilon^{1.074} \cdot \left(l/L\right)^{0.311}.$$

Следует отметить, что полученные результаты в качестве первого приближения можно использовать для оценки режимов переноса массы, импульса и энергии в типичных блоках РЭА или ЭТ (малых габаритных размеров) при наличии тепловыделяющих элементов [Jaluria, 1998; Кузнецов, Шеремет, 2008; Кузнецов, Шеремет, 2009] в условиях системы пассивного охлаждения. Приближенность полученных результатов в первую очередь обусловлена формулировкой граничных условий первого рода на поверхности тепловыделяющего элемента, в то время как для практики желательно учитывать теплопроводность в таком элементе при наличии внутреннего ядра с заданной плотностью объемного тепловыделения [Кузнецов, Шеремет, 2009]. Использование постоянной температуры на поверхности источника энергии отражает наличие нестационарного теплового потока уменьшающегося со временем. На основе представленных соображений полученные результаты применимы для оценки теплопереноса в прикладных задачах. Наиболее ценными для практики являются установленные корреляционные соотношения для интегральных коэффициентов теплообмена, поскольку эти выражения учитывают не только эффекты термогравитационной конвекции [Дульнев, 1984; Кузнецов, Шеремет, 2008; Кузнецов, Шеремет, 2009], но и поверхностное тепловое излучение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 14-08-31137 мол_а).

Список литературы

Дульнев Г. Н. Тепло- и массообмен в радиоэлектронной аппаратуре. — М.: Высшая школа, 1984. — 247 с.

Ермолаев И. А., Жбанов А. И., Отпущенников С. В. Исследование режимов малоинтенсивной конвекции в прямоугольной полости с тепловым потоком на границе // Известия РАН. МЖГ. — 2008. — № 3. — С. 3–11.

Ермолаев И. А., Отпущенников С. В. Влияние тепловых граничных условий на локальные особенности естественной конвекции малой интенсивности в квадратной области // Теплофизика высоких температур. — 2009. — Т. 47, № 6. — С. 914–920.

Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Об одном подходе к математическому моделированию тепловых режимов радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники // Микроэлектроника. — 2008. — Т. 37, № 2. — С. 150–158.

Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Численное моделирование температурных полей узлов и блоков радиоэлектронной аппаратуры и электронной техники // Микроэлектроника. — 2009. — Т. 38, № 5. — С. 344–352.

Мартюшев С. Г., Шеремет М. А. Численный анализ сопряженного конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой области // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2010. — № 1(9). — С. 96–106.

Мартюшев С. Г., Шеремет М. А. Численный анализ сопряженного конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой полости, заполненной диатермичной средой // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — Вып. 3. — С. 114–125.

Моисеева Л. А., Черкасов С. Г. Стационарный свободно-конвективный теплообмен в цилиндрической емкости при равномерном теплоподводе и одновременном отводе тепла через локальные стоки // Теплофизика высоких температур. — 1997. — Т. 35, № 4. — С. 564–569.

Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Наука, 1984. — 288 с.

Полежаев В. И. Нестационарная ламинарная тепловая конвекция в замкнутой области при заданном потоке тепла // Известия АН СССР. МЖГ. — 1970. — № 4. — С. 109–117.

Шеремет М. А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. — Берлин: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. — 176 с.

Alvarado R., Xaman J., Hinojosab J., Alvarez G. Interaction between natural convection and surface thermal radiation in tilted slender cavities // International Journal of Thermal Sciences. — 2008. — Vol. 47. — P. 355–368.

Bahlaoui A., Raji A., El Ayachi R., Hasnaoui M., Lamsaadi M., Naimi M. Coupled natural convection and radiation in a horizontal rectangular enclosure discretely heated from below // Numerical Heat Transfer. Part A. — 2007. — Vol. 52. — P. 1027–1042.

de Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution // International Journal for Numerical Methods of Fluids. — 1983. — Vol. 3. — P. 249–264.

Dixit H. N., Babu V. Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2006. — Vol. 49. — P. 727–739.

Jaluria Y. Design and Optimization of Thermal Systems. — New York: McGraw-Hill, 1998. — 626 p.

Kuznetsov G. V., Sheremet M. A. Two-dimensional problem of natural convection in a rectangular domain with local heating and heat-conducting boundaries of finite thickness // Fluid Dynamics. — 2006. — Vol. 41, № 6. — P. 881–890.

Manzari M. T. An explicit finite element algorithm for convective heat transfer problems // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. — 1999. — Vol. 9. — P. 860–877.

Martyushev S. G., Sheremet M. A. Characteristics of Rosseland and P-1 approximations in modeling nonstationary conditions of convection-radiation heat transfer in an enclosure with a local energy source // Journal of Engineering Thermophysics. — 2012. — Vol. 21, № 2. — P. 111–118.

Mayne D. A., Usmani A. S., Crapper M. H-adaptive finite element solution of high Rayleigh number thermally driven cavity problem // International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow. — 2000. — Vol. 10. — P. 598–615.

Ridouane E. H., Hasnaoui M., Amahmid A., Raji A. Interaction between natural convection and radiation in a square cavity heated from below // Numerical Heat Transfer. Part A. — 2004. — Vol. 45. — P. 289–311.

Sezai I., Mohamad A. A. Natural convection from a discrete heat source on the bottom of a horizontal enclosure // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2000. — Vol. 43. — P. 2257–2266.

Siegel R., Howell J. R. Thermal radiation heat transfer. — London: Taylor & Francis, 2002. — 868 p.

Vivek V., Sharma A. K., Balaji C. Interaction effects between laminar natural convection and surface radiation in tilted square and shallow enclosures // International Journal of Thermal Sciences. — 2012. — Vol. 60. — P. 70–84.

Wan D. C., Patnaik B. S. V., Wei G. W. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution // Numerical Heat Transfer. Part B. — 2001. — Vol. 40. — P. 199–228.

Wang H., Xin S., Le Quere P. Numerical study of natural convection-surface radiation coupling in air-filled square cavities // C.R. Mecanique. — 2006. — Vol. 334. — P. 48–57.