

УДК: 519.62/64+517.958:536

Модифицированный вариант метода решеточных уравнений Больцмана для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости

Г. В. Кривовичев

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики — процессов управления
Россия, 198504, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский просп., д. 35

E-mail: gera1983k@bk.ru

*Получено 13 декабря 2013 г.,
после доработки 22 апреля 2014 г.*

Предложен модифицированный вариант метода решеточных уравнений Больцмана для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. Метод основан на использовании расщепления дифференциального оператора в уравнении Навье–Стокса и идее о мгновенной максвеллизации функций распределения. Метод основан на использовании явных схем и не приводит к сложностям при распараллеливании вычислений. С помощью метода фон Неймана показана устойчивость метода в широком диапазоне изменения входного параметра. Эффективность предложенного метода показана при решении задачи о плоском течении в каверне.

Ключевые слова: метод решеточных уравнений Больцмана, метод расщепления

Modification of the lattice Boltzmann method for the computations of viscid incompressible fluid flows

G. V. Krivovichev

*Saint-Petersburg State University, Department of Applied Mathematics — Processes of Control,
35 University prospekt, Saint-Petersburg, Peterhof, 198504, Russia*

Abstract. — Modification of the lattice Boltzmann method for computation of viscous incompressible fluid flows is proposed. The method is based on the splitting of differential operator in Navier–Stokes equation and on the idea of instantaneous Maxwellisation of distribution function. The method is based on explicit schemes and didn't have any problems with parallelization of computations. The stability of the method is demonstrated using von Neumann method in a wide range of input parameter values. The efficiency of the method proposed is demonstrated on the solution of the problem of 2D lid-driven cavity flow.

Keywords: lattice Boltzmann method, splitting method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 365–381 (Russian).

Введение

В последние годы в задачах, связанных с моделированием течений жидкости и газа, часто используется метод решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann method, далее LBM). При применении метода решается не система уравнений механики сплошной среды, как это принято в большинстве работ по вычислительной гидродинамике, а система кинетических уравнений для функций распределения [Chen, Doolen, 1998; Nourgaliev и др., 2003; Wolf-Gladrow, 2005]. Значения величин, характеризующих среду на макроуровне, вычисляются как моменты функций распределения. Макроскопические уравнения можно получить из системы кинетических уравнений посредством применения метода Чепмена–Энскога [Коган, 1967].

Серьезные преимущества LBM перед численными методами, основанными на дискретизации уравнений гидродинамики, проявляются при его реализации на многопроцессорных и распределенных системах [Гугушвили, Евстигнеев, 2010; Velivelli, Bryden, 2006]. Метод хорошо приспособлен для реализации расчетов на графических ускорителях с использованием технологии CUDA [Бикулов и др., 2012; Бикулов, Сенин, 2013; Грачев, Дмитриев, Сенин, 2011; Гугушвили, Евстигнеев, 2010; Евстигнеев, Магницкий, 2010; Xiong и др., 2012], что в настоящее время является весьма актуальным [Геллер, Васильев, Холодов, 2010]. Преимущества LBM перед традиционными методами проявляются также при расчетах течений со свободными поверхностями [Гугушвили, Евстигнеев, 2010; Zhao и др., 2013], многофазных течений [Kupershtokh, 2011; Nourgaliev и др., 2003] и течений в пористых средах [Pan, Luo, Miller, 2006].

Статья посвящена развитию варианта LBM, предложенного в [Кривовичев, 2013а]. Основное отличие предлагаемого в настоящей работе подхода заключается в построении схемы, в которой не используется предположение о неизменности давления на одном из этапов метода расщепления. Предлагаемая модификация строится для варианта LBM, предложенного для расчета течений несжимаемой вязкой жидкости в работе Хе и Люо [He, Luo, 1997]. В статье исследуется устойчивость основной расчетной схемы с помощью метода фон Неймана. Эффективность предложенного варианта LBM показана при решении задачи о течении в каверне при малых числах Рейнольдса.

Метод решеточных уравнений Больцмана для расчета течений несжимаемой жидкости (подход Хе и Люо)

В дальнейшем будут рассматриваться только плоские изотермические течения вязкой ньютоновской жидкости. Заметим, что полученные в работе результаты легко распространяются на случай пространственных течений.

При применении LBM среда описывается ансамблем крупных частиц, каждая из которых имеет конечное число возможных скоростей. В области, в которой происходит течение, строится решетка (lattice) — равномерная по обеим координатам сетка с ячейками определенной формы. Частицы без взаимодействия друг с другом переходят между узлами решетки за шаг по времени δt . Взаимодействие между частицами может осуществляться только в узлах решетки.

При расчетах плоских течений удобно рассматривать решетку с ячейками в форме квадратов со сторонами длины l . В этом случае часто используется набор скоростей D2Q9 [Chen, Doolen, 1998]: $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 9$, где $V = l/\delta t$, а векторы \mathbf{v}_i задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_4 = (-1, 0), \quad \mathbf{v}_5 = (0, -1), \quad \mathbf{v}_6 = (1, 1), \quad \mathbf{v}_7 = (-1, 1), \\ \mathbf{v}_8 = (-1, -1), \quad \mathbf{v}_9 = (1, -1). \end{aligned}$$

Динамика ансамбля частиц на решетке описывается системой решеточных уравнений Больцмана (lattice Boltzmann equations, далее LBE)[Chen, Doolen, 1998; Nourgaliev и др., 2003; Wolf-Gladrow, 2005]:

$$f_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = -\frac{1}{\tau} \left(f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - f_i^{(eq)}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \right), \quad (1)$$

где $\mathbf{r}_{kl} = (x_k, y_l)$ — радиус-вектор узла решетки, t_j — узел временной равномерной сетки, построенной с шагом δt , $f_i, i = 1, \dots, 9$ — одночастичные функции распределения частиц со скоростями \mathbf{V}_i , τ — безразмерный параметр релаксации, $f_i^{(eq)}$ — функции, аппроксимирующие локальные равновесные функции распределения Максвелла.

Систему вида (1) можно получить разными способами: как обобщение модели решеточного газа [Wolf-Gladrow, 2005], или посредством дискретизации кинетического уравнения Бхатнагара–Гросса–Крука [Abe, 1997; Bhatnagar, Gross, Krook, 1954].

Необходимо отметить, что LBM, вообще говоря, предназначен для расчета течений сжимаемых сред, но при определенных условиях он может успешно применяться и для моделирования течений несжимаемых жидкостей. Последнее возможно при малых значениях безразмерного параметра $M = |\mathbf{u}|/V$, где \mathbf{u} есть вектор скорости среды. Параметр M имеет смысл числа Маха. Некоторыми авторами [Asinari и др., 2012; Ohwada, Asinari, 2010] отмечалось, что LBM тесно связан с методом искусственной сжимаемости [Яненко, 1967, с. 136–140; Chorin, 1967], широко применяемым в вычислительной гидродинамике для расчетов течений несжимаемой жидкости.

В [He, Luo, 1997] предложен специальный вариант LBM, ориентированный на расчет течений несжимаемой жидкости с постоянной плотностью ρ_0 . Из-за того что в рамках LBM среда считается сжимаемой, по сути, производится расчет не с плотностью ρ_0 , а с переменной плотностью $\rho(t, \mathbf{r}) = \rho_0 + \delta\rho(t, \mathbf{r})$. При предположении о малости $\delta\rho$ по сравнению с единицей, авторы [He, Luo, 1997] получили следующие выражения для $f_i^{(eq)}$:

$$f_i^{(eq)} = W_i \left(\rho + \rho_0 \left(3 \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{V^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})^2}{V^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{V^2} \right) \right),$$

где

$$W_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 1, \\ \frac{1}{9}, & i = 2, 3, 4, 5, \\ \frac{1}{36}, & i = 6, 7, 8, 9. \end{cases}$$

Эти выражения несколько отличаются от формул для $f_i^{(eq)}$ для обычного варианта LBM.

Значения макроскопических переменных ρ и \mathbf{u} в узлах решетки вычисляются через значения функций распределения следующим образом:

$$\rho(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^9 f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}), \quad \rho(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \mathbf{u}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i f_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}). \quad (2)$$

При расчетах течений несжимаемых жидкостей интерес представляет не плотность, а давление p . В связи с этим вместо функций f_i авторы [He, Luo, 1997] с учетом уравнения состояния $p = c_s^2 \rho$, где $c_s^2 = V/3$ для набора D2Q9 предложили ввести новые переменные $p_i = c_s^2 f_i$. Данные функции удовлетворяют системе, аналогичной (1):

$$p_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \delta t) - p_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = -\frac{1}{\tau} \left(p_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}) - p_i^{(eq)}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) \right), \quad (3)$$

где

$$p_i^{(eq)} = W_i \left(p + p_0 \left(3 \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})}{V^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{u})^2}{V^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{V^2} \right) \right),$$

где $p_0 = c_s^2 \rho_0$.

Значения p и \mathbf{u} в узлах решетки вычисляются через значения p_i по формулам, аналогичным (2), с учетом малости $\delta\rho$ [He, Luo, 1997]:

$$p(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^9 p_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}), \quad p_0 \mathbf{u}(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^9 \mathbf{V}_i p_i(t_j, \mathbf{r}_{kl}). \quad (4)$$

В [He, Luo, 1997] с помощью метода Чепмена–Энскога из (3)–(4) получены следующие уравнения для нахождения p и \mathbf{u} :

$$\frac{1}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} + O(M^3) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + O(M^3), \quad (6)$$

где ν есть кинематический коэффициент вязкости, вычисляемый через параметр τ следующим образом:

$$\nu = \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{2\delta t}. \quad (7)$$

Член $1/(\rho_0 c_s^2) \partial p / \partial t$ в (5) имеет порядок малости $O(M^2)$ [He-Luo, 1997]. Таким образом, система (5)–(6) с точностью до членов одного порядка малости с M^2 и M^3 соответствует системе уравнений для описания течений вязкой несжимаемой жидкости. В дальнейшем будем рассматривать только случай малых значений M , и члены порядка малости $O(M^3)$ в (5)–(6) будем опускать.

Заметим, что при малых M в (5) можно пренебречь и членом порядка малости $O(M^2)$. В настоящей работе этого делаться не будет, поскольку наличие такого члена позволяет осуществлять коррекцию давления на одном из этапов метода расщепления. Кроме того, уравнение (5) с точностью до обозначений соответствует скалярному уравнению для давления в методе искусственной сжимаемости [Яненко, 1967; Chorin, 1967; Ohwada, Asinari, 2010], где этим членом тоже не пренебрегают.

Модифицированный вариант LBM

Предлагаемый в настоящей работе подход основан на методе расщепления Н. Н. Яненко [Яненко, 1967] и идее о мгновенной максвеллизации функций распределения Б. Н. Четверушкина [Четверушкин, 1999]. В работе [Кривовичев, 2013а] с использованием такого подхода был построен модифицированный вариант обычного LBM. Произведем аналогичные построения для варианта LBM, предложенного Хе и Люо.

В уравнение (6) введем параметр ν_1 , имеющий размерность коэффициента ν , добавляя и вычитая в правой части (6) член $\nu_1 \Delta \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + (\nu - \nu_1) \Delta \mathbf{u} + \nu_1 \Delta \mathbf{u}. \quad (8)$$

Вводя обозначения $A_1(\mathbf{u}, p) = -(\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu_1 \Delta \mathbf{u}$, $A_2(\mathbf{u}) = (\nu - \nu_1) \Delta \mathbf{u}$, перепишем систему (5),(8):

$$\frac{1}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A_1(\mathbf{u}, p) + A_2(\mathbf{u}). \quad (9)$$

Далее, следуя методу расщепления Н. Н. Яненко, будем численно решать задачи для системы (9) следующим образом: построив ее дискретный аналог, на промежутке времени $[t_j, t_{j+1}]$, где $t_{j+1} = t_j + \delta t$, введем промежуточный слой $t_{j+1/2} = t_j + \delta t/2$. На промежутке $[t_j, t_{j+1/2}]$ будем решать задачу для дискретного аналога системы:

$$\frac{1}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A_1(\mathbf{u}, p), \quad (10)$$

а на промежутке времени $[t_{j+1/2}, t_{j+1}]$ — решать задачу для дискретного аналога системы:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A_2(\mathbf{u}), \quad (11)$$

в качестве начального условия для которой при $t = t_{j+1/2}$ используется значение \mathbf{u} , найденное при решении задачи для (10). Расчет значений давления в момент t_{j+1} будет производиться по известному после решения (11) полю скоростей с использованием разностной схемы для (5), представленной ниже.

По аналогии с [Кривовичев, 2013а] вместо решения задачи для (10) будем решать задачу для соответствующей ей системы LBE-уравнений (3) с параметром τ_1 , связанным со значением ν_1 соотношением (7). Поскольку ν_1 не имеет физического смысла, за счет выбора его значения можно осуществлять стабилизацию разностной схемы (3), соответствующим образом вычисляя τ_1 . В [Кривовичев, 2013а] из соображений обеспечения устойчивости по начальным условиям предлагалось брать единичное значение τ_1 . Оно соответствует внутренним точкам области устойчивости в пространстве параметров [Nourgaliev и др., 2003] и согласуется с идеей о мгновенной максвеллизации функций распределения Б. Н. Четверушкина (подробнее см. [Кривовичев, 2013а]), успешно применяемой при реализации кинетически согласованных разностных схем решения задач газовой динамики [Четверушкин, 1999].

Таким образом, на первом этапе модифицированного метода на промежутке $[t_j, t_{j+1/2}]$ предлагается решать задачу для следующей разностной системы, полученной из (3) при $\tau = 1$:

$$p_i \left(t_j + \frac{\delta t}{2}, \mathbf{r}_{kl} + \mathbf{V}_i \frac{\delta t}{2} \right) = p_i^{(eq)}(t_j, \mathbf{r}_{kl}). \quad (12)$$

В [Бикулов, Сенин, 2013] предложен алгоритм LBM, оптимизированный для расчетов на GPU (graphics processing units). Использование этого алгоритма позволяет существенно сократить объем хранимых в DRAM (dynamic random access memory) данных. Ключевой особенностью алгоритма является расчет с фиксированным значением параметра $\tau = 1$. Таким образом, для одного из этапов предлагаемого в настоящей работе варианта LBM при его реализации на GPU можно использовать эффективный в смысле минимизации затрат памяти алгоритм.

Система (11) представляет собой систему из двух линейных уравнений диффузии, никак не связанных друг с другом. Задачи для них могут решаться одновременно и независимо, что весьма важно для реализации расчетов на многопроцессорных и распределенных системах. За счет выбора той или иной разностной схемы численного решения задач для уравнений из (11) можно осуществлять стабилизацию предлагаемого варианта LBM [Кривовичев, 2013а].

Для того чтобы при практической реализации не нарушать общей логики программ и не испытывать сложностей с распараллеливанием вычислений, предлагается не использовать разностные схемы для решения уравнения диффузии, отличные от схем, основанных на LBE. В настоящей работе предлагается использовать схему, предложенную в [Wolf-Gladrow, 1995]. Схема основана на использовании набора скоростей D2Q4: $\mathbf{V}_i = V\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, 4$, где:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (-1, 0), \quad \mathbf{v}_4 = (0, -1).$$

Для получения решения каждого из уравнений системы (11) на промежутке $[t_{j+1/2}, t_{j+1}]$ решаются задачи для систем вида:

$$g_i(t_j + \delta t, \mathbf{r}_{kl}) - g_i\left(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{V}_i \frac{\delta t}{2}\right) = -\frac{1}{\chi} \left(g_i\left(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{V}_i \frac{\delta t}{2}\right) - g_i^{(eq)}\left(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{V}_i \frac{\delta t}{2}\right) \right), \quad (13)$$

где g_i — функции, через которые вычисляются значения решения уравнения диффузии $c(t, \mathbf{r})$:

$$c(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = \sum_{i=1}^4 g_i(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}). \quad (14)$$

Функции $g_i^{(eq)}$ связаны с решением уравнения диффузии следующим образом [Wolf-Gladrow, 1995]:

$$g_i^{(eq)} = \frac{c}{4}. \quad (15)$$

Связь параметра релаксации χ с коэффициентом диффузии D дается соотношением

$$D = \left(\chi - \frac{1}{2} \right) \frac{l^2}{2\delta t}.$$

Отметим, что основанная на использовании набора D2Q4 схема является наиболее простой среди всех известных LBE-схем, предложенных для решения уравнения диффузии. Другие схемы представлены, к примеру, в работе [Кривовичев, 2013b].

В силу того что в уравнениях из системы (11) на месте коэффициента диффузии стоит коэффициент $\nu - \nu_1$, то для обеспечения устойчивости решений уравнений диффузии необходимо потребовать положительности этого коэффициента. При значении $\tau_1 = 1$ при использовании (7) для вычисления ν и ν_1 это ограничение приведет к неравенству

$$(\tau - 1) \frac{l^2}{3\delta t} > 0, \Rightarrow \tau > 1,$$

которое задает основное ограничение на пределы применимости предложенного варианта LBM. В частности, метод не будет применим для моделирования течений при больших числах Рейнольдса, для которых характерна близость τ к $1/2$ [Wolf-Gladrow, 2005].

Необходимо отметить, что в системе (11) в качестве зависимой переменной не фигурирует давление p . Это приводит к тому, что в момент $t = t_{j+1}$ по изложенной выше схеме можно найти лишь значения \mathbf{u} . В [Кривовичев, 2013а] для нахождения давления при $t = t_{j+1}$ вводилось предположение о том, что $p(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) \approx p(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl})$, которое накладывало ограничения на пределы применимости метода. В настоящей работе предлагается избегать этого предположения, находя значения p при $t = t_{j+1}$ решая задачу для уравнения (5).

Пусть при численном решении задач для уравнений из (11) в узлах решетки найдены значения \mathbf{u} при $t = t_{j+1}$. Для расчета давления в этот момент времени воспользуемся уравнением (5), которое выпишем в компонентной форме после умножения на $p_0 = \rho_0 c_s^2$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = 0. \tag{16}$$

Построим разностную схему, аппроксимирующую (16) на слое $t = t_{j+1}$. Производную $\partial p / \partial t$ аппроксимируем с первым порядком с помощью левой разностной производной:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t_{j+1}, x_k, y_l) \approx \frac{p(t_{j+1}, x_k, y_l) - p(t_{j+1/2}, x_k, y_l)}{\delta t / 2}.$$

Заметим, что значения p на слое $t = t_{j+1/2}$ будут известны после решения задачи для (12) в полуцелых узлах решетки. Значения p в целых узлах решетки легко получить с помощью простейшей линейной сплайн-интерполяции.

Производные u_x и u_y по пространственным переменным аппроксимируем со вторым порядком с помощью центральных разностных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x}(t_{j+1}, x_k, y_l) &\approx \frac{u_x(t_{j+1}, x_{k+1}, y_l) - u_x(t_{j+1}, x_{k-1}, y_l)}{2l}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial y}(t_{j+1}, x_k, y_l) &\approx \frac{u_y(t_{j+1}, x_k, y_{l+1}) - u_y(t_{j+1}, x_k, y_{l-1})}{2l}. \end{aligned}$$

В результате получим разностную схему, аппроксимирующую уравнение (16):

$$p(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = p(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - p_0 \frac{\delta t}{4l} (u_x(t_{j+1}, \mathbf{r}_{k+1l}) + u_y(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl+1}) - u_x(t_{j+1}, \mathbf{r}_{k-1l}) - u_y(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl-1})). \tag{17}$$

Заметим, что построенная схема является явной, поскольку значения u_x и u_y при $t = t_{j+1}$ известны после решения задачи для (11). Таким образом, предложенный вариант LBM позволяет производить расчет всех гидродинамических величин на каждом из этапов метода расщепления без использования каких-либо вспомогательных предположений и неявных схем.

Приведем алгоритм предлагаемого метода:

1. По известным при $t = t_j$ значениям $p_i^{(eq)}$ по (12) находятся значения p_i в дробных узлах пространственной сетки при $t = t_{j+1/2}$.
2. По (4) вычисляются значения p и \mathbf{u} при $t = t_{j+1/2}$.
3. Производится сплайн-интерполяция для получения значений p при $t = t_{j+1/2}$ в узлах пространственной сетки с целыми индексами.
4. Проводится решение системы (11) с использованием разностной схемы (13) или какой-либо другой. В результате находятся значения \mathbf{u} при $t = t_{j+1}$.
5. По разностной схеме (13) находятся значения давления p при $t = t_{j+1}$.

Необходимо отметить, что идея о применении метода расщепления в рамках LBM высказывалась в большом числе работ. В основном речь идет о расщеплении по физическим процессам. Так, в [Куперштох, 2012] представлен алгоритм моделирования двухфазных систем с использованием LBM, основанный на расщеплении по физическим процессам. В [Dellar, 2011] проводится математическое обоснование LBM с использованием схемы решения уравнения Больцмана, основанной на расщеплении по двум процессам — соударению частиц и их свободному разлету. В [Guo, Zheng, Zhao, 2001] эта идея используется для построения конечно-разностных схем с возможностью использования значений шагов, отличных от δt и l . Различные варианты метода расщепления для решения уравнения Больцмана представлены, к примеру, в [Аристов, Черемисин, 1980; Попов, Черемисин, 1999; Filbert, Russo, 2003].

Подход, основанный на расщеплении дифференциального оператора в уравнении Навье–Стокса при реализации LBM применяется в работах [Shu и др., 2006; Кривовичев, 2013а]. В [Shu и др., 2009] макроскопические уравнения после проведения расщепления решаются при $t \in [t_j, t_{j+1}]$ не на отдельных промежутках $[t_j, t_{j+1/2}]$ и $[t_{j+1/2}, t_{j+1}]$, как в [Кривовичев, 2013а] и в настоящей работе, а используется идея методов типа предиктор-корректор. На этапе предиктора реализуется разностная схема типа (1) при $\tau = 1$, на этапе корректора решается задача для системы (11). При этом в работе упоминается лишь о расчете поля скоростей \mathbf{u} и остается неясным, каким же образом вычисляется плотность ρ (а следовательно, и давление), знание значений которой требуется для вычисления $f_i^{(eq)}$. При этом авторы [Shu и др., 2006] никак не обсуждают ограничение на значения параметра релаксации $\tau > 1$, гарантирующее устойчивость решений уравнений диффузии и налагающее ограничение на пределы применимости метода. В [Duruu и др., 2009] предложенный подход применяется для моделирования двухфазных систем.

Подход, предложенный в [Кривовичев, 2013а] и развиваемый в настоящей работе, основан на проведении расчетов в два этапа на отдельных промежутках интервала $[t_j, t_{j+1}]$. При этом в основе первого этапа лежит известная идея о мгновенной максвеллизации функций распределения, то есть он имеет явный физический смысл. За счет выбора различных разностных схем для решения уравнений системы (11) можно осуществлять стабилизацию LBM. Метод позволяет явным образом находить давление при $t = t_{j+1}$ — при использовании предположения о его неизменности на втором этапе, как в [Кривовичев, 2013а] или же с помощью разностной схемы (17), как в настоящей работе. Но возможности метода ограничены соответствующим диапазоном изменения числа Рейнольдса.

Исследование устойчивости по начальным условиям

В данном разделе проведем исследование устойчивости схемы, по которой производится расчет на промежутке $[t_{j+1/2}, t_{j+1}]$. Заметим, что схема (12), по которой производится расчет на $[t_j, t_{j+1/2}]$, является устойчивой за счет специального выбора τ_1 .

Необходимо отметить, что u_x и u_y вычисляются по (14) через решения систем вида (13), а затем по (17) через них вычисляются значения p в узлах решетки. Таким образом, расчет по (13) и (17) проводится не одновременно. Несмотря на это, нельзя отдельно производить исследования устойчивости схем (13) и (17), поскольку в (17) в выражения для компонент \mathbf{u} входят, в силу (14), значения функций распределения g_i^α , $\alpha = x, y$, которые вычисляются как решения (13). Таким образом, развитие неустойчивостей в схемах вида (13) будет влиять и на развитие неустойчивостей в схеме (17).

Исследуемая схема составлена из разностных систем вида (13), предназначенных для решения задач для каждого из уравнений системы (11) и схемы для расчета давления (17). Выпишем эту схему с учетом (14) и (15):

$$\left\{ \begin{array}{l} g_i^\alpha(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) g_i^\alpha(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{V}_i \frac{\delta t}{2}) + \frac{1}{4\chi} \sum_{s=1}^4 g_s^\alpha(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{V}_i \frac{\delta t}{2}), \quad \alpha = x, y, \\ p(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = p(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}) - p_0 \frac{\delta t}{4l} \sum_{s=1}^4 (g_s^x(t_{j+1}, \mathbf{r}_{k+1l}) + g_s^y(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl+1}) - g_s^x(t_{j+1}, \mathbf{r}_{k-1l}) - \\ - g_s^y(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl-1})). \end{array} \right. \quad (18)$$

Заметим, что построенная схема из девяти разностных уравнений является линейной, и для исследования ее устойчивости можно применить метод фон Неймана [Рихтмайер, Мортон, 1972; Федоренко, 2008].

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\tilde{t} = \frac{t}{\delta t/2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{l}, \quad \tilde{g}_i^\alpha = \frac{g_i^\alpha}{G}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_0}, \quad (19)$$

где G есть «характерное значение» функций распределения. В дальнейшем, для удобства, знак тильды в обозначении безразмерных переменных (19) будем опускать, при исследовании устойчивости подразумевая только безразмерные переменные. Система (18) в новых переменных примет следующий вид:

$$\begin{cases} g_i^\alpha(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) = \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) g_i^\alpha(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i) + \frac{1}{4\chi} \sum_{s=1}^4 g_s^\alpha(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl} - \mathbf{v}_i), & \alpha = x, y, \\ p(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl}) + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^4 (g_s^x(t_{j+1}, \mathbf{r}_{k+1l}) + g_s^y(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl+1}) - g_s^x(t_{j+1}, \mathbf{r}_{k-1l}) - g_s^y(t_{j+1}, \mathbf{r}_{kl-1})) = \\ = p(t_{j+1/2}, \mathbf{r}_{kl}). \end{cases} \quad (20)$$

На первом этапе анализа устойчивости по аналогии с работами [Кривовичев, 2012; Worthing и др., 1997] рассмотрим случай отсутствия зависимости от пространственных переменных $g_i^\alpha = g_i^\alpha(t_j)$, $p = p(t_j)$, с целью определения возможного диапазона значений χ , при которых имеет место устойчивость.

В этом случае система (20) сведется к системе разностных уравнений

$$\begin{cases} g_i^\alpha(t_{j+1}) = \left(1 - \frac{1}{\chi}\right) g_i^\alpha(t_{j+1/2}) + \frac{1}{4\chi} \sum_{s=1}^4 g_s^\alpha(t_{j+1/2}), & \alpha = x, y, \\ p(t_{j+1}) = p(t_{j+1/2}). \end{cases} \quad (21)$$

В силу однородности (21) исследование устойчивости ее невозмущенных решений, соответствующих определенным начальным условиям, сводится к исследованию устойчивости нулевого решения соответствующей системы в отклонениях, тоже имеющей вид (21) [Леонов, Шумафов, 2005].

Как можно видеть, (21) составлена из трех различных подсистем, не зависящих друг от друга: двух систем из четырех уравнений, каждая для нахождения $\{g_i^x\}$ и $\{g_i^y\}$ соответственно и уравнения для нахождения p . Матрицы систем для нахождения $\{g_i^\alpha\}$ имеют простое собственное значение, равное единице, и собственное значение третьей кратности, равное $1 - 1/\chi$, скалярное уравнение имеет единичное собственное значение.

Таким образом, согласно критерию устойчивости линейных разностных систем [Леонов, Шумафов, 2005], для обеспечения устойчивости решений (21) необходимо потребовать, чтобы все собственные значения по модулю не превосходили единицы. Причем собственные значения, лежащие на единичной окружности, должны быть простыми. Последнее выполняется в силу независимости друг от друга подсистем (21). Условие принадлежности кратных корней внутреннейности единичного круга имеет вид следующего ограничения на χ :

$$\left|1 - \frac{1}{\chi}\right| < 1, \Rightarrow \chi > \frac{1}{2}.$$

Переходя к исследованию устойчивости системы (20), заметим, что она в силу однородности тоже имеет нулевое решение. Задача об исследовании любого невозмущенного решения сведется к исследованию устойчивости нулевого решения системы для отклонений от невозмущенного решения, которая тоже будет иметь вид (20).

В соответствии с методом фон Неймана [Рихтмайер, Мортон, 1972], представим решение (20) в виде

$$g_m^\alpha(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = G_m^\alpha(t_j) \exp(i\Theta \mathbf{r}_{kl}), \quad p(t_j, \mathbf{r}_{kl}) = P(t_j) \exp(i\Theta \mathbf{r}_{kl}), \quad (22)$$

где $i^2 = -1$, $\Theta = (\theta_x, \theta_y)$, $\theta_\beta \in [-\pi, \pi]$, $\beta = x, y$.

Подставляя (22) в (20), получим систему разностных уравнений для нахождения G_m^α , P :

$$\begin{cases} G_m^\alpha(t_{j+1}) = \exp(-i\Theta \mathbf{v}_m) \left(\left(1 - \frac{1}{\chi}\right) G_m^\alpha(t_{j+1/2}) + \frac{1}{4\chi} \sum_{s=1}^4 G_m^\alpha(t_{j+1/2}) \right), & \alpha = x, y, \\ P(t_{j+1}) + \sum_{s=1}^4 (G_s^x(t_{j+1}) i \sin(\theta_x) + G_s^y(t_{j+1}) i \sin(\theta_y)) = P(t_{j+1/2}). \end{cases} \quad (23)$$

Вводя новые переменные

$$X_1(t_j) = G_1^x(t_j), \dots, X_4(t_j) = G_4^x(t_j), X_5(t_j) = G_1^y(t_j), \dots, X_8(t_j) = G_4^y(t_j), X_9(t_j) = P(t_j),$$

перепишем (23) в виде

$$\mathbf{X}(t_{j+1}) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t_{j+1/2}), \quad (24)$$

где $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_9)^T$, матрица $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Компоненты матрицы \mathbf{A} задаются по следующим формулам:

$$A_{mj} = \begin{cases} 1, & j = m, \\ 0, & j \neq m, m \neq 9, \\ i \sin(\theta_x), & m = 9, j = \overline{1, 4}, \\ i \sin(\theta_y), & m = 9, j = \overline{5, 8}. \end{cases}$$

Заметим, что $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

Компоненты матрицы \mathbf{B} задаются следующим образом:

$$B_{mj} = \begin{cases} H_{mj}, & m, j = \overline{1, 8}, \\ 0, & m = 9, j = \overline{1, 8}; m = \overline{1, 8}, j = 9, \\ 1, & m = 9, j = 9, \end{cases}$$

где H_{mj} образуют матрицу размерности 8×8 , имеющую блочную структуру:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{4 \times 4} & \mathbf{O}_{4 \times 4} \\ \mathbf{O}_{4 \times 4} & \mathbf{T}_{4 \times 4} \end{pmatrix},$$

где компоненты ненулевых блоков задаются таким образом:

$$T_{mj} = \begin{cases} \exp(-i\Theta \mathbf{v}_m) \left(1 - \frac{3}{4\chi}\right), & j = m, \\ \exp(-i\Theta \mathbf{v}_m) \frac{1}{4\chi}, & j \neq m. \end{cases}$$

Таким образом, задача об исследовании нулевого решения системы вида (20) сведена к задаче об исследовании устойчивости нулевого решения системы разностных уравнений (24).

Собственные значения матрицы \mathbf{C} являются функциями следующих параметров: χ, θ_x, θ_y . Исследование устойчивости проводилось при изменении безразмерного параметра χ в диапазоне от 0.5 до 50. Промежуток $[0.5, 50]$ разбивался сеткой из 500 узлов, построенной с постоянным

шагом (рассматривался также случай сетки из 1000 узлов, не выявивший особых отличий). При этом область изменения параметров θ_x и θ_y разбивалась равномерной сеткой из 100×100 узлов (также рассматривался случай сетки из 200×200 узлов, не выявивший существенных отличий). В ходе расчетов находились значения следующих функций:

$$\Lambda_{\max} = \max_i \left(\max_{\theta_x, \theta_y} |\lambda_i(\chi, \theta_x, \theta_y)| \right), \quad \Lambda_{\min} = \min_i \left(\min_{\theta_x, \theta_y} |\lambda_i(\chi, \theta_x, \theta_y)| \right),$$

где λ_i — собственные значения матрицы \mathbf{C} , максимум и минимум по (θ_x, θ_y) берутся по узлам сетки. Задачи на нахождение собственных значений матрицы \mathbf{C} численно решались с помощью программы, написанной на языке FORTRAN 90 с использованием QR-алгоритма, реализованного в свободно распространяемом пакете EISPACK [Smith и др., 1976].

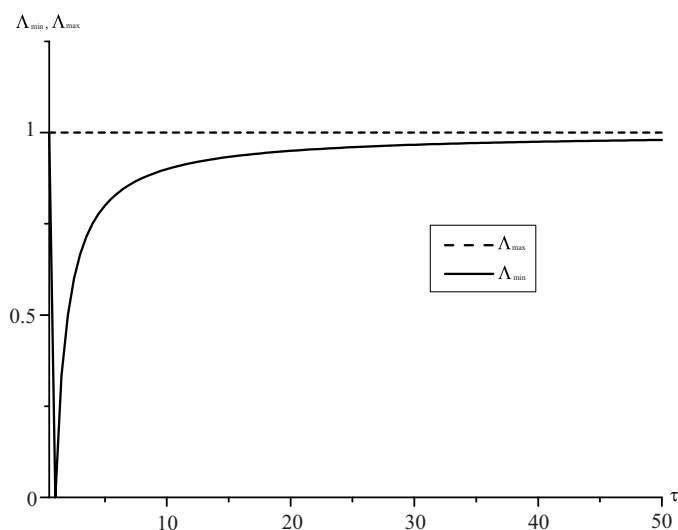


Рис. 1. Графики функций $\Lambda_{\min}(\chi)$, $\Lambda_{\max}(\chi)$ при $\chi \in [0.5, 50]$

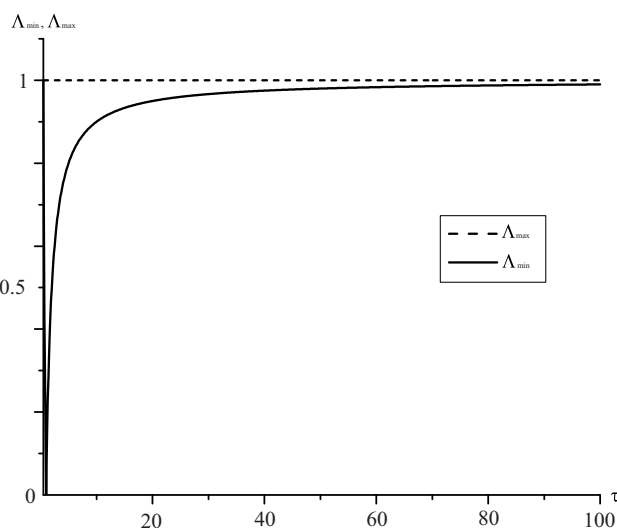


Рис. 2. Графики функций $\Lambda_{\min}(\chi)$, $\Lambda_{\max}(\chi)$ при $\chi \in [0.5, 100]$

На рисунке 1 представлены графики функций Λ_{\max} и Λ_{\min} . Как можно видеть, значения функции Λ_{\max} не превышают единицы. Последнее связано с тем, что наибольшие по модулю

собственные значения лежат на единичной окружности. Заметим, что в программе проверялось условие их простоты. Таким образом, критерий устойчивости нулевого решения системы (24) является выполненным. Последнее говорит об устойчивости (24) в заданном диапазоне изменения χ .

Значения Λ_{\min} при возрастании χ стремятся к единичному значению, но не превосходят его, что можно видеть и для случая изменения χ в промежутке $[0.5, 100]$ (см. рис. 2).

Таким образом, в силу устойчивости предложенная схема вполне может применяться при расчетах с использованием LBM. Но необходимо учитывать и тот факт, что при решении практических задач на устойчивость будут влиять еще и внешние силы (этот случай в работе не рассматривается).

Решение задачи о течении в каверне

Предложенный вариант LBM применялся к решению известной тестовой задачи вычислительной гидродинамики — о плоском течении в каверне с подвижной верхней крышкой [Семина, Шапеев, 1998; Ghia, Ghia, Shin, 1982].

Рассматривается течение в области в форме квадрата со сторонами длины P . На границах ставятся условия следующего вида:

$$\begin{aligned} u_x(t, x, 0) = u_y(t, x, 0) = 0, \quad u_x(t, x, P) = U_0, \quad u_y(t, x, P) = 0, \quad x \in [0, P], \\ u_x(t, 0, y) = u_y(t, 0, y) = u_x(t, P, y) = u_y(t, P, y) = 0, \quad y \in [0, P], \end{aligned}$$

где $U_0 = \text{const}$.

В качестве граничных условий для функций распределения f_i , применяемых на первом этапе метода, использовались равновесные граничные условия — полагалось, что в граничных точках $f_i = f_i^{(eq)}$. В качестве граничных условий для функций g_i^α , применяемых на втором этапе, рассматривались условия, предложенные в работе [Wolf-Gladrow, 1995]. В начальный момент времени полагалось, что жидкость покоится, значения функций f_i также полагались совпадающими со значениями $f_i^{(eq)}$.

Расчеты проводились при задании значения числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{UL}{\nu}, \quad (25)$$

где L — характерный линейный размер области, в которой происходит течение, U — характерная скорость. При решении поставленной задачи в качестве L можно взять длину стороны квадрата P , в качестве U — значение U_0 .

В рамках настоящей работы не производилось решения реальных физических задач. Поэтому параметр ν не задавался, а вычислялся с использованием (25) по известным значениям Re , U и L . Как и в работе [Кривовичев, 2013а], брались следующие значения параметров: $L = 1$ м, $U_0 = 0.01$ м/с. Рассматривался промежуток времени от 0 до 1000 с. Расчеты проводились при разбиении области равномерными сетками из 50×50 , 100×100 и 200×200 узлов.

В связи с тем, что предложенный метод не будет применим при больших значениях Re , было принято решение производить расчеты при следующих значениях Re : 10, 1, 0.1, 0.01. Примерами течений при таких Re являются течения в пористых средах, для расчетов которых активно используется LBM [Guo, Zhao, 2002; Pan, Luo, Miller, 2006].

Для сравнения, аналогичная задача решалась и с помощью варианта LBM из [He, Luo, 1997] с использованием граничных условий из работы [Le Coupanec, Verschaeve, 2011].

Расчеты производились с помощью программ, написанных на языке C++, откомпилированных с использованием компилятора gcc.

Полученные с помощью обоих вариантов LBM численные решения сравнивались с результатами решения аналогичной задачи для системы уравнений гидродинамики в переменных «завихренность – функция тока» с использованием хорошо известной пятиточечной разностной схемы второго порядка аппроксимации [Роуч, 1972], положительно зарекомендовавшей себя при решении большого числа задач. Программа, реализующая алгоритм расчета по этой разностной схеме, была отлажена при сравнении с результатами, представленными в [Ghia, Ghia, Shin, 1982].

При использовании каждого из вариантов LBM вычислялись значения следующей величины:

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2},$$

где I_x и I_y вычисляются следующим образом:

$$I_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_x(T, 0.5P, y_i) - U_x(T, 0.5P, y_i))^2, \quad I_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_y(T, x_i, 0.5P) - U_y(T, x_i, 0.5P))^2,$$

где T – длина рассматриваемого временного промежутка, U_x, U_y – значения компонент вектора скорости, полученные при решении уравнений гидродинамики. В качестве N выступало число узлов сетки по каждой из координат. Для сравнения обоих вариантов LBM после решения задачи значения I вычислялись для случаев одних и тех же пространственных и временных сеток.

Как отмечают авторы [He, Luo, 1997], предложенный ими вариант LBM применим при значениях $M < 0.15$. В связи с этим, шаги l и δt специально подбирались таким образом, чтобы обеспечить указанное для M ограничение. При этом для случаев $Re \leq 1$ значение M подбиралось еще и таким, чтобы схема, на которой основан метод, предложенный в [He, Luo, 1997], была устойчивой. Так, для значения $Re = 10$ расчеты на всех сетках производились при значении $M = 0.1442$, при $Re = 1$ – при $M = 1.531 \cdot 10^{-2}$, при $Re = 0.1$ – при $M = 1.493 \cdot 10^{-3}$, при $Re = 0.01$ – при $M = 1.472 \cdot 10^{-4}$.

В таблице 1 представлены значения δt , при которых производился расчет с помощью обоих вариантов LBM на указанных пространственных сетках.

Таблица 1. Значения δt для случаев различных Re и различных разбиений пространственной сетки.

| Разбиение сетки | $Re = 10$ | $Re = 1$ | $Re = 0.1$ | $Re = 0.01$ |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 50×50 | $2.942 \cdot 10^{-1}$ | $3.125 \cdot 10^{-2}$ | $3.048 \cdot 10^{-3}$ | $3.004 \cdot 10^{-4}$ |
| 100×100 | $1.471 \cdot 10^{-1}$ | $1.562 \cdot 10^{-2}$ | $1.524 \cdot 10^{-3}$ | $1.502 \cdot 10^{-4}$ |
| 200×200 | $7.354 \cdot 10^{-2}$ | $7.812 \cdot 10^{-3}$ | $7.621 \cdot 10^{-4}$ | $7.512 \cdot 10^{-5}$ |

Как можно заметить, для обеспечения устойчивости варианта LBM из [He, Luo, 1997] значения δt при фиксированных разбиениях пространственной области при уменьшении значений Re пришлось сократить на порядок. Поиск приближенной границы значений δt , при которых происходит переход к численным неустойчивостям, в настоящей работе не производился.

В таблице 2 представлены значения I , полученные с помощью варианта LBM из [He, Luo, 1997] при различных Re и различных разбиениях сетки. Аналогичные значения для случая модифицированного LBM представлены в таблице 3.

Следует отметить, что значения I для случая модифицированного варианта LBM для всех разбиений и всех значений Re оказались меньше, чем для случая варианта LBM из [He, Luo, 1997]. Последнее говорит о более высокой точности предложенного в настоящей работе метода. Это, по всей видимости, связано с тем, что при расчетах используется схема второго порядка

Таблица 2. Значения I для случаев различных Re и различных разбиений пространственной сетки для случая варианта LBM из [He, Luo, 1997].

| Разбиение сетки | $Re = 10$ | $Re = 1$ | $Re = 0.1$ | $Re = 0.01$ |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 50×50 | $1.939 \cdot 10^{-4}$ | $2.384 \cdot 10^{-4}$ | $2.186 \cdot 10^{-4}$ | $2.079 \cdot 10^{-4}$ |
| 100×100 | $1.763 \cdot 10^{-4}$ | $2.246 \cdot 10^{-4}$ | $2.025 \cdot 10^{-4}$ | $1.906 \cdot 10^{-4}$ |
| 200×200 | $1.683 \cdot 10^{-4}$ | $2.185 \cdot 10^{-4}$ | $1.955 \cdot 10^{-4}$ | $1.832 \cdot 10^{-4}$ |

Таблица 3. Значения I для случаев различных Re и различных разбиений пространственной сетки для случая модифицированного варианта LBM.

| Разбиение сетки | $Re = 10$ | $Re = 1$ | $Re = 0.1$ | $Re = 0.01$ |
|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 50×50 | $7.656 \cdot 10^{-6}$ | $5.058 \cdot 10^{-7}$ | $5.009 \cdot 10^{-7}$ | $1.827 \cdot 10^{-7}$ |
| 100×100 | $1.865 \cdot 10^{-5}$ | $2.216 \cdot 10^{-5}$ | $2.067 \cdot 10^{-5}$ | $1.981 \cdot 10^{-5}$ |
| 200×200 | $2.322 \cdot 10^{-5}$ | $2.602 \cdot 10^{-5}$ | $2.468 \cdot 10^{-5}$ | $2.393 \cdot 10^{-5}$ |

аппроксимации для (16). При этом модифицированный метод обладает устойчивостью в широком диапазоне изменения параметра τ , несмотря на то что он основан на использовании явных схем. Заметим, что точность метода можно улучшить за счет использования схем более высокого порядка аппроксимации для (11) и (16).

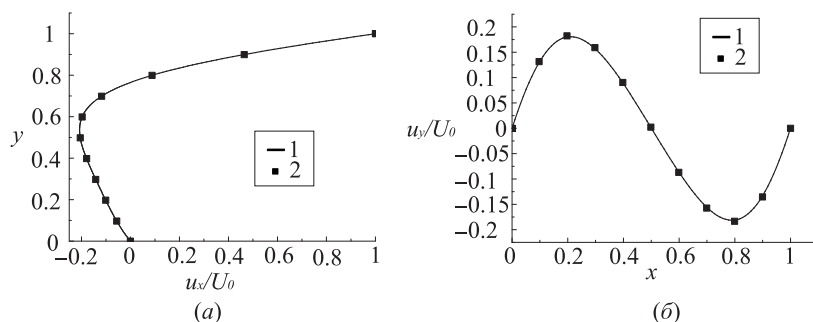


Рис. 3. Графики компонент вектора скорости, отнесенных к U_0 при $Re = 1$: 1 — результаты расчетов по модифицированному LBM; 2 — результаты из [Семин, Шапеев, 1998]

Отметим, что для случая варианта LBM из [He, Luo, 1997] значения I при фиксированных Re уменьшаются при увеличении разбиения сетки. Для случая модифицированного LBM этого не наблюдается, хотя значения I малы, что обеспечивает хорошую точность. Так, визуальные полученные графики компонент вектора скорости, отнесенных к U_0 , не отличимы от представленных в литературе данных (см. рис. 3). При этом нужно отметить, что значения I при фиксированном разбиении пространственной сетки можно уменьшить за счет использования меньшего шага по времени δt . Так, если при $Re = 10$ производить расчет по модифицированному LBM на сетке 100×100 с вдвое меньшим значением δt , то значение I будет равно $7.085 \cdot 10^{-6}$, на сетке 200×200 соответствующее значение составит $4.447 \cdot 10^{-6}$. При $Re = 1$ аналогичные значения I составят $8.826 \cdot 10^{-8}$ и $5.387 \cdot 10^{-6}$, при $Re = 0.1$ — $6.246 \cdot 10^{-8}$ и $5.035 \cdot 10^{-6}$, при $Re = 0.01$ — $1.884 \cdot 10^{-9}$ и $4.833 \cdot 10^{-6}$.

Заключение

В настоящей работе предложен новый вариант LBM для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости при умеренных и малых значениях Re . Метод основан на использовании расщеп-

ления дифференциального оператора, входящего в уравнения Навье–Стокса, и идее о мгновенной маквеллизации функций распределения. В отличие от известного варианта LBM, предлагаемый подход за счет выбора различных разностных схем для решения (11) и (16) позволяет осуществлять стабилизацию метода, таким образом улучшая его устойчивость. При этом за счет выбора схем повышенных порядков аппроксимации можно улучшать и его точность.

Метод сохраняет все достоинства LBM, так как основан на использовании явных схем и не приводит к сложностям при распараллеливании вычислений. Показана устойчивость метода в широком диапазоне изменения значений параметра τ . При решении тестовой задачи показано, что метод позволяет получать более точные результаты по сравнению с ранее известным вариантом LBM для расчета течений несжимаемой жидкости.

Предложенный вариант LBM без особого труда может быть распространен на случаи пространственных течений и течений при наличии внешних сил.

Список литературы

- Аристов В. В., Черемисин Ф. Г. Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1980. — Т. 20, № 1. — С. 191–207.
- Бикулов Д. А., Сенин Д. С., Демин Д. С., Дмитриев А. В., Грачев Н. Е. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана для расчетов на GPU-кластере // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13, № 1. — С. 221–228.
- Бикулов Д. А., Сенин Д. С. Реализация метода решеточных уравнений Больцмана без хранимых значений функций распределения для GPU // Вычислительные методы и программирование. — 2013. — Т. 14. — С. 370–374.
- Геллер О. В., Васильев М. О., Холодов Я. А. Построение высокопроизводительного вычислительного комплекса для моделирования задач газовой динамики // Компьютерные исследования и моделирование. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 309–317.
- Грачев Н. Е., Дмитриев А. В., Сенин Д. С. Моделирование динамики газа при помощи решеточного метода Больцмана // Вычислительные методы и программирование. — 2011. — Т. 12, № 1. — С. 227–231.
- Гугушвили И. В., Евстигнеев Н. М. Некоторые результаты для различных методов моделирования несжимаемой гидродинамики свободной поверхностью на графических процессорах // Ученые записки. Электронный научный журнал Курского государственного университета. — 2010. — Вып. 4. — С. 15–23.
- Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А. Нелинейная динамика в начально-краевой задаче течения жидкости с уступа для гидродинамического приближения уравнений Больцмана // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 12. — С. 1794–1798.
- Коган М. Н. Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967. — 440 с.
- Кривовичев Г. В. О применении интегро-интерполяционного метода к построению одношаговых решеточных кинетических схем Больцмана // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13. — С. 19–27.
- Кривовичев Г. В. О расчете течений вязкой жидкости методом решеточных уравнений Больцмана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013а. — Т. 5, № 2. — С. 165–178.
- Кривовичев Г. В. Анализ устойчивости решеточных схем Больцмана для решения уравнения диффузии // Вычислительные методы и программирование. — 2013б. — Т. 14. — С. 175–182.
- Куперитох А. Л. Трехмерное моделирование двухфазных систем типа «жидкость–пар» методом решеточного уравнения Больцмана // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — Т. 13. — С. 130–138.

- Леонов Г. А., Шумафов М. М. Методы стабилизации линейных управляемых систем. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 2005. — 421 с.
- Попов С. П., Черемисин Ф. Г. Консервативный метод решения уравнения Больцмана для центрально-симметричных потенциалов взаимодействия // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 1. — С. 163–176.
- Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 418 с.
- Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1972. — 612 с.
- Семи́н Л. Г., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших квадратов для уравнений Навье–Стокса // Вычислительные технологии. — 1998. — Т. 3, № 3. — С. 72–84.
- Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2008. — 504 с.
- Четверушкин Б. Н. Кинетически-согласованные разностные схемы в газовой динамике. — М.: Изд-во МГУ, 1999. — 232 с.
- Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — Новосиб.: Наука, 1967. — 197 с.
- Abe T. Derivation of the lattice Boltzmann method by means of the discrete ordinate method for the Boltzmann equation // Journal of Computational Physics. — 1997. — V. 131, № 1. — P. 241–246.
- Asinari P., Ohwada T., Chiavazzo E., Rienzo A. F. Link-wise artificial compressibility method // Journal of Computational Physics. — 2012. — V. 231. — P. 5109–5143.
- Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems // Physical Review. — 1954. — V. 94, № 3. — P. 511–525.
- Chen S., Doolen G. D. Lattice Boltzmann method for fluid flows // Annual Review of Fluid Mechanics. — 1998. — V. 30. — P. 329–364.
- Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // Journal of Computational Physics. — 1967. — V. 2. — P. 12–26.
- Dellar P. J. An interpretation and derivation of the lattice Boltzmann method using Strang splitting // Computers and Mathematics with Applications. — 2013. — V. 65. — P. 129–141.
- Dupuy P. M., Fernandino M., Jakobsen H. A., Svendsen H. F. Fractional step two-phase flow lattice Boltzmann model implementation // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2009. — V. 65. — P. 129–141.
- Filbert F., Russo G. High order numerical methods for the space non-homogeneous Boltzmann equation // Journal of Computational Physics. — 2003. — V. 186. — P. 457–480.
- Ghia U., Ghia K. N., Shin C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method // Journal of Computational Physics. — 1982. — V. 48. — P. 387–411.
- Guo Z., Zheng C., Zhao T. S. A Lattice BGK Scheme with General Propagation // Journal of Scientific Computing. — 2001. — V. 16, N. 4. — P. 569–585.
- Guo Z., Zhao T. S. Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media // Physical Review E. — 2002. — V. 66. — P. 036304-1–036304-9.
- He X., Luo L. S. Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier–Stokes equation // Journal of Statistical Physics. — 1997. — V. 88, № 3/4. — P. 927–944.
- Kupershtokh A. L. A lattice Boltzmann equation method for real fluids with the equation of state known in tabular form only in regions of liquid and vapor phases // Computers and Mathematics with Applications. — 2011. — V. 61. — P. 3537–3548.
- Le Coupanec E., Verschaeve J. C. G. A mass conserving boundary condition for the lattice Boltzmann method for tangentially moving walls // Mathematics and Computers in Simulation. — 2011. — V. 81, № 12. — P. 2632–2645.

- Nourgaliev R. R., Dinh T. N., Theofanous T. G., Joseph D.* The lattice Boltzmann equation method: theoretical interpretation, numerics and implications // *International Journal of Multiphase Flow*. — 2003. — V. 29. — P. 117–169.
- Ohwada T., Asinari P.* Artificial compressibility method revisited: asymptotic numerical method for the incompressible Navier–Stokes equations // *Journal of Computational Physics*. — 2010. — V. 229. — P. 1698–1723.
- Pan C., Luo L. S., Miller C. T.* An evaluation of lattice Boltzmann schemes for porous medium flow simulation // *Computers and Fluids*. — 2006. — V. 35. — P. 898–909.
- Shu C., Niu X. D., Chew Y. T., Cai Q. D.* A fractional step lattice Boltzmann method for simulating high Reynolds number flows // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2006. — V. 72. — P. 201–205.
- Smith B., Boyle J., Dongarra J., Garbow B., Ikebe Y., Klema V., Moler C.* Matrix eigensystem routines. EISPACK Guide. Lecture Notes in Computer Science. Volume 6. — Berlin: Springer-Verlag, 1976. — 560 p.
- Velivelli A. C., Bryden K. M.* Parallel performance and accuracy of lattice Boltzmann and traditional finite difference methods for solving the unsteady two-dimensional Burger's equation // *Physica A*. — 2006. — V. 362. — P. 139–145.
- Wolf-Gladrow D. A.* A lattice Boltzmann equation for diffusion // *Journal of Statistical Physics*. — 1995. — V. 79, № 5-6. — P. 1023–1032.
- Wolf-Gladrow D. A.* Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models — an introduction. — Berlin: Springer-Verlag, 2005. — 311 p.
- Worthing R. A., Mozer J., Seeley J.* Stability of lattice Boltzmann methods in hydrodynamic regimes // *Physical Review E*. — 1997. — V. 56, № 2. — P. 2243–2253.
- Xiong Q. G., Li B., Xu J., Fang X. J., Wang X. W., Wang L. M., He X. F., Ge W.* Efficient parallel implementation of the lattice Boltzmann method on large clusters of graphic processing units // *Computer Science and Technology*. — 2012. — V. 57, № 7. — P. 707–715.
- Zhao Z., Huang P., Li Y., Li J.* A lattice Boltzmann method for viscous free surface waves in two dimensions // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. — 2013. — V. 71. — P. 223–248.