**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 3 С. 347−356**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 519.2

Корректные условия на границе, разделяющей подобласти

Ю. И. Скалько

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: skalko@mail.mipt.ru

Получено 31 марта 2014 г.

В работе изложена постановка и решение задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, для гиперболических систем линейных уравнений. Алгоритм решения продемонстрирован на примере системы уравнений упругой динамики для двух пространственных переменных. Приведенный подход легко распространяется на системы линейных гиперболических уравнений первого порядка с произвольным числом пространственных переменных.

Ключевые слова: уравнения упругой динамики, задача Римана, характеристики, инварианты Римана, плоские волны

Correct conditions on the boundary separating subdomains

Y. I. Skalko

Moscow Instutute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

This paper presents definition and solution problem of correct conditions on the boundary, separating subdomains for hyperbolic linear equation systems. The solution algorithm is demonstrated by means of an example system of elastodynamic equations for two spatial variables. Stated approach can be easily expanded on systems of first-order linear hyperbolic equations with random number of spatial variables.

Keywords: elastodynamic equations, Riemann problem, characteristics, Riemann invariants, plane waves

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 347–356 (Russian).

Введение

Построение алгоритмов численного решения краевых задач для гиперболических систем, в которых решение приближается разрывными функциями, практически всегда требует решения задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, которая формулируется таким образом. Область, в которой ищем решение краевой задачи для гиперболической системы линейных уравнений, разбита на две подобласти. Для идентификации подобластей будем использовать индекс $s = 1,2$. Пусть L — граница, разделяющая эти две подобласти. В произвольный момент времени t^* заданы значения переменных по обе стороны границы раздела областей. На границе также заданы условия, связывающие значения переменных по обе стороны границы. Нужно определить, являются ли эти условия корректными, то есть позволяют ли они однозначно определить значения всех переменных системы по обе стороны границы L в последующие моменты времени $t = t^* + \Delta t,$ и найти эти значения. Точнее, нас будут интересовать значения всех переменных системы в момент времени $t^* + 0$.

Чаще всего при построении численных алгоритмов в качестве решения задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, берется точное или приближенное решение задачи Римана о распаде разрыва [Куликовский и др., 2001; LeVeque, 2002; Martin Kaser, Michael Dumbser, 2006]. Однако такой подход не всегда является обоснованным. Постановка задачи Римана отличается от постановки задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти. В задаче Римана в начальный момент времени заданы значения переменных по обе стороны границы. Они могут быть разрывными. Этот разрыв распадается на несколько движущихся разрывов. Необходимо вычислить значения всех переменных системы по обе стороны границы L в последующие моменты времени. В задаче Римана не подразумевается никаких дополнительных условий на границе раздела областей и, следовательно, решение задачи Римана не удовлетворяет этим условиям. При рассмотрении двух ситуаций, в которых эти условия на границе раздела областей разные, значения переменных на границе, получаемые из решения задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, будут различными. Решение же задачи Римана в обоих случаях будут совпадать.

Ниже на примере системы уравнений упругой динамики мы построим решение задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, в случае двух пространственных переменных. Предложенный подход легко распространяется и на случай произвольного количества пространственных переменных.

Система уравнений упругой динамики

Систему уравнений, описывающих распространение упругих волн в изотропной среде, в случае двух пространственных переменных, следуя [LeVeque, 2002], можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma^{1,1}}{\partial t} - (2\mu + \lambda)\frac{\partial v^1}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial v^2}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial \sigma^{2,2}}{\partial t} - \lambda \frac{\partial v^1}{\partial x_1} - (2\mu + \lambda)\frac{\partial v^2}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial \sigma^{1,2}}{\partial t} - \mu \frac{\partial v^1}{\partial x_2} - \mu \frac{\partial v^2}{\partial x_1} = 0,\\
&\frac{\partial v^1}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^{1,1}}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^{1,2}}{\partial x_2} = 0,\\
&\frac{\partial v^2}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^{2,1}}{\partial x_1} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma^{2,2}}{\partial x_2} = 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ — коэффициенты Ламе, $\rho(\mathbf{x})$ — плотность среды, $\sigma^{i,j}(t,\mathbf{x})$ — компоненты тензора напряжений, $v^i(t,\mathbf{x})$ — компоненты вектора скорости смещений. Как следует из написанного, мы предполагаем, что $\sigma^{i,j}(t,\mathbf{x})$ и $v^i(t,\mathbf{x})$ — функции от времени и точки пространства, $t \in R^1$ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in R^2$. Чтобы описать неоднородность материала, предполагаем, что физические свойства среды $\lambda(\mathbf{x})$, $\mu(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ зависят от пространственных переменных, но постоянны во времени.

В качестве условий на границе раздела областей мы будем обсуждать следующие.

– Условия полного слипания. На границе непрерывна скорость смещений и непрерывен поток импульса или сила, действующая с двух сторон границы

$$
\begin{gathered}
v^i_{s=1} = v^i_{s=2}, \\
\sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=1} n_j = \sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=2} n_j ,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

n_j — единичная нормаль к границе раздела областей.

– Условия проскальзывания. В этом случае непрерывна нормальная к границе, составляющая скорости смещения и нормальная к границе, компонента действующей силы. Тангенциальная к границе компонента силы равна 0 с обеих сторон границы

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{2} v^i_{s=1} n_i = \sum_{i=1}^{2} v^i_{s=2} n_i, \\
\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=1} n_i n_j = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=2} n_i n_j , \\
\sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=1} n_j - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=1} n_i n_j = 0, \\
\sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=2} n_j - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma^{i,j}_{s=2} n_i n_j = 0.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Введем вектор переменных $\mathbf{u} = u^n = \left(\sigma^{1,1}, \sigma^{2,2}, \sigma^{1,2}, v^1, v^2\right)^T$. Тогда систему уравнений (1) можно переписать как

$$
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} = 0,
\tag{4}
$$

где

$$
\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\lambda+2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda+2\mu) \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\tag{5}
$$

Дополнительные сведения и факты

Рассмотрим гиперболическую систему линейных уравнений в частных производных с одной пространственной переменной для неизвестного вектора $\mathbf{v}$, зависящего от независимых переменных x и t

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}(t,x) = [v_1,...,v_M]^T$, $\mathbf{f}(t,x) = [f_1,...,f_M]^T$, $\mathbf{A}$ — постоянная матрица коэффициентов $M \times M$.

Условие гиперболичности подразумевает, что все собственные числа $\lambda_1,...,\lambda_M$ матрицы $\mathbf{A}$ действительны, левые собственные вектора $\{\mathbf{l}_1,...,\mathbf{l}_M\}$ образуют базис в пространстве искомых функций, правые собственные вектора $\{\mathbf{r}^1,...,\mathbf{r}^M\}$ также образуют базис в пространстве искомых функций [Куликовский и др., 2001; LeVeque, 2002].

Обратим внимание, что если $\lambda_p \neq \lambda_q$, то собственные векторы $\mathbf{l}_p$ и $\mathbf{r}^q$ взаимно ортогональны, $(\mathbf{l}_p \cdot \mathbf{r}^q) = 0$.

Пусть известно $\ddot{\mathbf{v}}(x)$, значение $\mathbf{v}(t^*,x)$ в момент времени t^*. В каждой точке x мы можем представить $\ddot{\mathbf{v}}(x)$ в виде

$$\ddot{\mathbf{v}}(x) = \sum_{m=1}^{m=M} w_m(x)\mathbf{r}^m,$$

разложив по правым собственным векторам матрицы $\mathbf{A}$. Тогда решение (1) имеет вид

$$\mathbf{v}(t,x) = \sum_{m=1}^{m=M} w_m\left(x - \lambda_m\left(t - t^*\right)\right)\mathbf{r}^m. \qquad (2)$$

То есть из каждой точки (t^*,x^*) выходит M прямых (характеристик) $x = x^* + \lambda_m(t - t^*)$, и каждая компонента, пропорциональная собственному вектору $\mathbf{r}^m$, переносится вдоль своей характеристики, соответствующей собственному числу λ_m.

Если в момент времени t^* в точке x^* имеет место разрыв $\left[\ddot{\mathbf{v}}(x^*)\right] = \ddot{\mathbf{v}}(x^*+0) - \ddot{\mathbf{v}}(x^*-0)$, тогда точно также этот разрыв можно разложить по правым собственным векторам

$$\left[\ddot{\mathbf{v}}(x^*)\right] = \sum_{m=1}^{m=M}\left[w_m(x^*)\right]\mathbf{r}^m.$$

Каждая компонента этого скачка, пропорциональная собственному вектору $\mathbf{r}^m$, переносится вдоль своей характеристики, соответствующей собственному числу λ_m.

Умножим скалярно слева уравнение (1) на левый собственный вектор $\mathbf{l}_p$. Тогда систему уравнений (1) можем записать в инвариантах Римана $R^p(t,x) = (\mathbf{l}_p \cdot \mathbf{v}(t,x))$.

$$\frac{\partial R^p}{\partial t} + \lambda_p \frac{\partial R^p}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

То есть, инвариант Римана $R^p(t,x)$ переносится вдоль характеристики $\frac{dx}{dt} = \lambda_p$, задаваемой собственным числом λ_p.

Может ли инвариант Римана $R^p(t,x)$ терпеть разрывы вдоль характеристики, задаваемой собственным числом λ_p? Поскольку разрывы распространяются вдоль характеристик, то такой разрыв может возникнуть, если характеристика, вдоль которой распространяется инвариант $R^p(t,x)$, пересекается с другой характеристикой, задаваемой собственным числом λ_q, вдоль которой распространяется разрыв. Очевидно, если характеристики пересекаются, то $\lambda_p \neq \lambda_q$. Пусть указанные характеристики пересекаются в точке (t,x). Тогда, в соответствии со (2), скачок $\left[\mathbf{v}(t,x)\right]$ можем представить как

$$\left[\mathbf{v}(t,x)\right] = \left[w_q(t,x)\right]\mathbf{r}^q + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq q}}^{m=M}\left[w_m(t,x)\right]\mathbf{r}^m. \tag{4}$$

Умножим (4) слева скалярно на левый собственный вектор $\mathbf{l}_p$. Учитывая, что при переходе через характеристику, задаваемую λ_q, только скачок $\left[w_q(t,x)\right] \neq 0$, остальные компоненты непрерывны, $\left[w_m(t,x)\right] = 0$, $m \neq q$, и учитывая, что $\left(\mathbf{l}_p \cdot \mathbf{r}^q\right) = 0$, так как $\lambda_p \neq \lambda_q$, получим

$$\left[R^p(t,x)\right] = \mathbf{l}_p \cdot \left[\mathbf{v}(t,x)\right] = 0. \tag{5}$$

То есть инвариант Римана $R^p(t,x)$ непрерывен вдоль характеристики, задаваемой собственным числом λ_p. Тогда, в соответствии с уравнением (3), для любого $t \geq t^*$

$$R^p(t,x) = R^p\left(t^*, x - \lambda_m\left(t - t^*\right)\right). \tag{6}$$

В том числе и при наличии разрывов $\mathbf{v}\left(t^*, x\right)$ в начальных данных.

Обратимся теперь к системе уравнений (4), описывающих распространение волн в упругой среде. Рассмотрим произвольную плоскую волну, распространяющуюся вдоль прямой, задаваемой единичным вектором $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ Уравнение для этой волны имеет вид системы с одной пространственной переменной:

$$\frac{\partial \mathbf{v}(t,y)}{\partial t} + \left(\mathbf{A}_1 n_1 + \mathbf{A}_2 n_2\right)\frac{\partial \mathbf{v}(t,y)}{\partial y} = 0,$$

$$y = \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}.$$

Введем обозначения: $p = \sqrt{\dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, $r = \sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$. Тогда левые собственные вектора матрицы $\mathbf{A}_1 n_1 + \mathbf{A}_2 n_2$, выписанные построчно

$$\mathbf{l}^k(n_1,n_2) = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_2^2 & 2n_1n_2 & \rho p n_1 & \rho p n_2 \\ -n_1n_2 & n_1n_2 & n_1^2 - n_2^2 & -\rho r n_2 & \rho r n_1 \\ -\left(p^2 - 2r^2\right)n_1^2 - p^2 n_2^2 & -p^2 n_1^2 - \left(p^2 - 2r^2\right)n_2^2 & 4\left(p^2 - r^2\right)n_1n_2 & 0 & 0 \\ n_1n_2 & -n_1n_2 & -n_1^2 + n_2^2 & -\rho r n_2 & \rho r n_1 \\ -n_1^2 & -n_2^2 & -2n_1n_2 & \rho p n_1 & \rho p n_2 \end{pmatrix},$$

и собственные значения $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^k = \left(-p, -r, 0, r, p\right)^T$. Соответственно, инварианты Римана $\mathbf{r} = r^k = \mathbf{l}^k(n_1,n_2)\cdot\mathbf{v}(t,y)$.

Задача о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти

Итак, пусть P точка на линии раздела областей, в которой мы ищем решение задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти. Будем считать, что мы ведем рассмотрение в левой ортонормированной системе координат с центром в точке P, первый орт которой направлен по нормали к линии раздела областей из области 1 в область 2. В этой системе координат условия полного слипания (2) в переменных $\mathbf{u}_s = u_s^n = \left(\sigma_s^{1,1}, \sigma_s^{2,2}, \sigma_s^{1,2}, v_s^1, v_s^2\right)^T$ принимают вид

$$\mathbf{Bu}_1(t,P) - \mathbf{Bu}_2(t,P) = 0;$$
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

и условия проскальзывания (3) соответственно:

$$\mathbf{Cu}_1(t,P) - \mathbf{Du}_2(t,P) = 0;$$
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Построим квадрат со сторонами длиной $L = 2h,$ параллельными осям координат и с центром в точке $P(0,0)$. В этом квадрате построим прямоугольную, равномерную по обеим координатам сетку с $2N$ узлами:

$$\mathbf{x}^{m_1,m_2} = \left(x_1^{m_1}, x_2^{m_2}\right);\ x_1^{m_1} = \frac{h}{N} m_1, m_1 = -N : N-1,\ x_2^{m_2} = \frac{h}{N} m_2, m_2 = -N : N-1.$$

Построим базисные симметричные тригонометрические полиномы

$$H_{l_1}(x_1) = \sum_{k_1=0}^{N} a_{l_1}^{k_1} \cos\frac{\pi k_1 x_1}{h},\ l_1 = 0 : N \tag{3}$$

интерполяции по узлам x_1^m из условия $H_{l_1}\left(x_1^m\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } m = \pm l_1 \\ 0, \text{ если } m \neq \pm l_1 \end{cases}.$

Построим также базисные тригонометрические полиномы

$$H_{l_2}(x_2) = \sum_{k_2=0}^{N} a_{l_2}^{k_2} \cos\frac{\pi k_2 x_2}{h} + \sum_{k_2=1}^{N-1} b_{l_2}^{k_2} \sin\frac{\pi k_2 x_2}{h},\ l_2 = -N : N-1 \tag{4}$$

интерполяции по узлам x_2^m из условия $H_{l_2}\left(x_2^m\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } m = l_2 \\ 0, \text{ если } m \neq l_2 \end{cases}.$

Переменные задачи в момент времени t^* в указанном квадрате по обе стороны от границы можно приблизить тригонометрическими интерполяционными полиномами

$$\mathbf{u}_s\left(t^*, \mathbf{x}\right) = \sum_{l_1=0}^{N} \sum_{l_2=0}^{N} H_{l_1}(x_1) H_{l_2}(x_2) \mathbf{u}_s\left(t^*, \mathbf{x}^{l_1,l_2}\right).$$

Поскольку $H_{l_1 \neq 0}(0) = 0$ и $H_{l_2 \neq 0}(0) = 0$, то в непосредственной окрестности точки $P(0,0)$ переменные в момент времени t^* представимы в виде

$$\mathbf{u}_s\left(t^*, \mathbf{x}\right) = H_0(x_1) H_0(x_2) \mathbf{u}_s\left(t^*, P\right) = \sum_{k_1=0}^{N} a^{k_1} \cos\frac{\pi k_1 x_1}{h} \sum_{k_2=0}^{N} a^{k_2} \cos\frac{\pi k_2 x_2}{h} \mathbf{u}_s\left(t^*, P\right), \tag{5}$$

где, следуя [Рябенький, 2000],

$$a^{k_1}=a_0^{k_1};\ a^0=\frac{1}{2N},\ a^{k_1=1:(N-1)}=\frac{1}{N},\ a^N=\frac{1}{2N},\ a^{k_2}=a_0^{k_2};\ a^0=\frac{1}{2N},\ a^{k_2=1:(N-1)}=\frac{1}{N},\ a^N=\frac{1}{2N}.$$

Тогда

$$\mathbf{u}_s\left(t^*,\mathbf{x}\right)=\frac{\mathbf{u}_s\left(t^*,P\right)}{2}\sum_{k_1=0}^{N}\sum_{k_2=0}^{N}\left(\cos\frac{\pi}{h}\left(k_1x_1+k_2x_2\right)+\cos\frac{\pi}{h}\left(k_1x_1-k_2x_2\right)\right)a^{k_1}a^{k_2}.$$

Если определить $a^{-k_2}=a^{k_2}$, $k_2=1\ :\ N$, то можно представить

$$\mathbf{u}_s\left(t^*,\mathbf{x}\right)=\left(\sum_{k_2=0}^{N}\frac{a^{k_2}}{N}\cos\frac{\pi k_2x_2}{h}+\sum_{k_1=1}^{N}\frac{a^{k_1}}{N}\cos\frac{\pi k_1x_1}{h}+\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{\substack{k_2=-N\\k_2\neq 0}}^{N}a^{k_1}a^{k_2}\cos\frac{\pi\left(k_1x_1+k_2x_2\right)}{h}\right)\frac{\mathbf{u}_s\left(t^*,P\right)}{2}.$$

Решение задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, в окрестности точки P будем искать в виде суммы $2N^2+2$ плоских волн

$$\mathbf{w}_s\left(t,\mathbf{x}\right)=\mathbf{w}_s^{0,1}\left(t,x_2\right)+\mathbf{w}_s^{1,0}\left(t,x_1\right)+\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{\substack{k_2=-N\\k_2\neq 0}}^{N}\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t,k_1x_1+k_2x_2\right),\tag{6}$$

распространяющихся вдоль прямых, параллельных соответственно векторам $(0,1)$; $(1,0)$; (k_1,k_2). При этом должно выполняться

$$\mathbf{w}_s^{0,1}\left(t^*,x_2\right)=\frac{\mathbf{u}_s\left(t^*,P\right)}{2N}\sum_{k_2=0}^{N}a^{k_2}\cos\frac{\pi k_2x_2}{h};$$

$$\mathbf{w}_s^{1,0}\left(t^*,x_1\right)=\frac{\mathbf{u}_s\left(t^*,P\right)}{2N}\sum_{k_1=1}^{N}a^{k_1}\cos\frac{\pi k_1x_1}{h};$$

$$\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t^*,k_1x_1+k_2x_2\right)=\frac{\mathbf{u}_s\left(t^*,P\right)}{2}a^{k_1}a^{k_2}\cos\frac{\pi}{h}\left(k_1x_1+k_2x_2\right),\ k_1=1:N,\ k_2=-N:-1,1:N.$$

Будем обозначать $\mathbf{l}_s^k\left(n_1,n_2\right)$ левые собственные вектора и λ_s^k собственные значения матрицы $\mathbf{A}_1n_1+\mathbf{A}_2n_2$, соответственно, со стороны $s=1,2$ от границы.

Рассмотрим плоскую волну $\mathbf{w}_1^{0,1}$ из (6), распространяющуюся вдоль границы в полупространстве $s=1$. В точку $\left(t,P\right)$ с такой волной «приходят» пять характеристик (соответствующих собственным значениям λ_1^k, $k=1:5$), «приносящих» в эту точку пять инвариантов Римана $\mathbf{l}_1^k\left(0,1\right)\cdot\mathbf{w}_1^{0,1}$, $k=1:5$. Тогда, в соответствии с (6),

$$\mathbf{l}_1^k\left(0,1\right)\cdot\mathbf{w}_1^{0,1}\left(t,P\right)=\frac{\mathbf{l}_1^k\left(0,1\right)\cdot\mathbf{u}_1\left(t^*,P\right)}{2N}\sum_{k_2=0}^{N}a^{k_2}\cos\frac{\pi k_2\lambda_1^k\left(t^*-t\right)}{h};\ k=1:5\tag{7}$$

В силу линейной независимости собственных векторов $\mathbf{l}_1^k\left(0,1\right)$, СЛАУ (7) однозначно разрешима. Переходя к пределу $t\to t^*+0$, получим

$$\mathbf{w}_1^{0,1}\left(t^*+0,P\right)=\frac{\mathbf{u}_1\left(t^*,P\right)}{2N}.$$

Совершенно аналогично с другой стороны границы $s=2$ имеем СЛАУ

$$\mathbf{l}_2^k\left(0,1\right)\cdot\mathbf{w}_2^{0,1}\left(t,P\right)=\frac{\mathbf{l}_2^k\left(0,1\right)\cdot\mathbf{u}_2\left(t^*,P\right)}{2N}\sum_{k_2=0}^{N}a^{k_2}\cos\frac{\pi k_2\lambda_2^k\left(t^*-t\right)}{h};\ k=1:5,\tag{8}$$

которая также однозначно разрешима, в силу линейной независимости собственных векторов $\mathbf{l}_2^k(0,1)$. И в пределе $t \to t^* + 0$

$$\mathbf{w}_2^{0,1}\left(t^* + 0, P\right) = \frac{\mathbf{u}_2\left(t^*, P\right)}{2N}.$$

Рассмотрим плоскую волну $\mathbf{w}_s^{1,0}$ из (6), распространяющуюся вдоль нормали к границе раздела полупространств в точке P. В точку (t, P) из полупространства $s = 1$ с такой волной «приходят» три характеристики (соответствующих собственным значениям λ_1^k, $k = 3,4,5$), «приносящих» в эту точку три инварианта Римана $\mathbf{l}_1^k(1,0) \cdot \mathbf{w}_1^{1,0}$, $k = 3,4,5$. Тогда

$$\mathbf{l}_1^k(1,0) \cdot \mathbf{w}_1^{1,0}(t, P) = \frac{\mathbf{l}_1^k(1,0) \cdot \mathbf{u}_1\left(t^*, P\right)}{2N} \sum_{k_2=0}^{N} a^{k_2} \cos \frac{\pi k_2 \lambda_1^k\left(t^* - t\right)}{h}; k = 3,4,5. \tag{9}$$

Из полупространства $s = 2$ с этой волной в точку (t, P) «приходит» три характеристики (соответствующих собственным значениям λ_2^k, $k = 1,2,3$), «приносящих» в каждую точку три инварианта Римана $\mathbf{l}_2^k(1,0) \cdot \mathbf{w}_2^{1,0}$, $k = 1,2,3$. Тогда, аналогично (9)

$$\mathbf{l}_2^k(1,0) \cdot \mathbf{w}_2^{1,0}(t, P) = \frac{\mathbf{l}_2^k(1,0) \cdot \mathbf{u}_2\left(t^*, P\right)}{2N} \sum_{k_2=0}^{N} a^{k_2} \cos \frac{\pi k_2 \lambda_1^k\left(t^* - t\right)}{h}; k = 1,2,3. \tag{10}$$

Если на границе поставлены условия полного слипания, то добавляем к уравнениям (9) и (10) уравнения

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{w}_1^{1,0}(t,P) + \mathbf{w}_1^{0,1}(t,P)\right) - \mathbf{B}\left(\mathbf{w}_2^{1,0}(t,P) + \mathbf{w}_2^{0,1}(t,P)\right) = 0. \tag{11}$$

Если же на границе поставлены условия проскальзывания, то к уравнениям (9) и (10) добавляем уравнения

$$\mathbf{C}\left(\mathbf{w}_1^{1,0}(t,P) + \mathbf{w}_1^{0,1}(t,P)\right) - \mathbf{D}\left(\mathbf{w}_2^{1,0}(t,P) + \mathbf{w}_2^{0,1}(t,P)\right) = 0. \tag{12}$$

В итоге получаем СЛАУ из 10 уравнений для 10 неизвестных $\mathbf{w}_s^{1,0}(t, P)$. Условия на границе подобластей (11) или (12) корректны, если получаемая СЛАУ однозначно разрешима. Переходя к пределу $t \to t^* + 0$, получим СЛАУ, в которой уравнения (9) и (10) следует заменить соответственно на уравнения

$$\mathbf{l}_1^k(1,0) \cdot \mathbf{w}_1^{1,0}\left(t^* + 0, P\right) = \frac{2N-1}{4N^2} \mathbf{l}_1^k(1,0) \cdot \mathbf{u}_1\left(t^*, P\right); k = 3,4,5, \tag{13}$$

$$\mathbf{l}_2^k(1,0) \cdot \mathbf{w}_2^{1,0}\left(t^* + 0, P\right) = \frac{2N-1}{4N^2} \mathbf{l}_2^k(1,0) \cdot \mathbf{u}_2\left(t^*, P\right); k = 1,2,3. \tag{14}$$

Решая эту СЛАУ, получаем соотношения, выражающие $\mathbf{w}_s^{1,0}\left(t^* + 0, P\right)$ через значения $\mathbf{u}_s\left(t^*, P\right)$.

Обратим внимание, что $\mathbf{w}_s^{0,1}\left(t^* + 0, P\right) \underset{N \to \infty}{\to} 0$ и $\mathbf{w}_s^{1,0}\left(t^* + 0, P\right) \underset{N \to \infty}{\to} 0$.

Рассмотрим теперь плоские волны $\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t, k_1 x_1 + k_2 x_2\right)$, $k_1 = 1:N, k_2 = -N:-1,1:N$ из (6). Такие волны распространяются вдоль прямых, параллельных единичным векторам $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = \dfrac{(k_1, k_2)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$. В точку (t, P) из полупространства $s = 1$ с каждой такой волной «приходят» три характеристики (соответствующих собственным значениям λ_1^k, $k=3,4,5$), «приносящих» в эту точку три инварианта Римана $\mathbf{l}_1^k\left(n_1,n_2\right)\cdot\mathbf{w}_1^{k_1,k_2}$, $k=3,4,5$. Тогда аналогично (9) получаем соотношения

$$\mathbf{l}_1^k\cdot\mathbf{w}_1^{k_1,k_2}\left(t,P\right)=\mathbf{l}_1^k\cdot\mathbf{u}_1\left(t^*,P\right)\frac{a^{k_1}a^{k_2}}{2}\cos\frac{\pi\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,\lambda_1^k\left(t^*-t\right)}{h};\quad k=3,4,5. \tag{15}$$

Из полупространства $s=2$ с этой волной в точку $\left(t,P\right)$ «приходят» три характеристики (соответствующих собственным значениям $\lambda_2^k\left(n_1,n_2\right)$, $k=1,2,3$), «приносящих» в каждую точку три инварианта Римана $\mathbf{l}_2^k\left(n_1,n_2\right)\cdot\mathbf{w}_2^{k_1,k_2}$, $k=1,2,3$. Тогда аналогично (10)

$$\mathbf{l}_2^k\cdot\mathbf{w}_2^{k_1,k_2}\left(t,P\right)=\mathbf{l}_2^k\cdot\mathbf{u}_2\left(t^*,P\right)\frac{a^{k_1}a^{k_2}}{2}\cos\frac{\pi\sqrt{k_1^2+k_2^2}\,\lambda_2^k\left(t^*-t\right)}{h};\quad k=1,2,3. \tag{16}$$

Если на границе поставлены условия полного слипания, добавляем к уравнениям (15) и (16) уравнение

$$\mathbf{Bw}_1^{k_1,k_2}\left(t,P\right)-\mathbf{Bw}_2^{k_1,k_2}\left(t,P\right)=0. \tag{17}$$

Если же на границе поставлены условия проскальзывания, то добавляем к уравнениям (15) и (16) уравнение

$$\mathbf{Cw}_1^{k_1,k_2}\left(t,P\right)-\mathbf{Dw}_2^{k_1,k_2}\left(t,P\right)=0. \tag{18}$$

В итоге опять получаем СЛАУ из 10 уравнений для 10 неизвестных $\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t,P\right)$. Для корректности условий на границе областей (17) или (18) необходимо и достаточно, чтобы эта СЛАУ имела единственное решение.

Переходя к пределу $t\to t^*+0$, получим СЛАУ, в которой уравнения (15) и (16) следует заменить соответственно на уравнения

$$\mathbf{l}_1^k\cdot\mathbf{w}_1^{k_1,k_2}\left(t^*+0,P\right)=\frac{a^{k_1}a^{k_2}}{2}\mathbf{l}_1^k\cdot\mathbf{u}_1\left(t^*,P\right);\quad k=3,4,5, \tag{19}$$

$$\mathbf{l}_2^k\cdot\mathbf{w}_2^{k_1,k_2}\left(t^*+0,P\right)=\frac{a^{k_1}a^{k_2}}{2}\mathbf{l}_2^k\cdot\mathbf{u}_2\left(t^*,P\right);\quad k=1,2,3. \tag{20}$$

Решая эту СЛАУ для каждого $k_1=1\ :\ N$, $k_2=-N\ :-1,1\ :\ N$, получаем соотношения, выражающие $\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t^*+0,P\right)$ через значения $\mathbf{u}_s\left(t^*,P\right)$. Эти соотношения можно представить как

$$\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t^*+0,P\right)=a^{k_1}a^{k_2}\sum_{s'=1}^{2}\mathbf{R}_s^{s'}\left(\frac{k_1}{N},\frac{k_2}{N}\right)\mathbf{u}_{s'}\left(t^*,P\right).$$

Здесь $\mathbf{R}_s^{s'}\left(\frac{k_1}{N},\frac{k_2}{N}\right)$ — двумерный массив, элементами которого являются квадратные матрицы. Элементы этих матриц являются функциями $\left(\frac{k_1}{N},\frac{k_2}{N}\right)$.

Просуммируем эти соотношения по всем $k_1=1\ :\ N$, $k_2=-N\ :-1,1\ :\ N$

$$\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{\substack{k_2=-N\\k_2\neq 0}}^{N}\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t^*+0,P\right)=\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{\substack{k_2=-N\\k_2\neq 0}}^{N}a^{k_1}a^{k_2}\sum_{s'=1}^{2}\mathbf{R}_s^{s'}\left(\frac{k_1}{N},\frac{k_2}{N}\right)\mathbf{u}_{s'}\left(t^*,P\right).$$

Учитывая, что $a^{k_1=1:N-1}=\dfrac{1}{N}$, $a^{k_1=N}=\dfrac{1}{2N}$ и $a^{k_2=1:N-1}=\dfrac{1}{N}$, $a^{k_2=N}=\dfrac{1}{2N}$, введя обозначение $x=\dfrac{k_1}{N}, y=\dfrac{k_2}{N}$ и переходя к пределу $N\to\infty$, получим

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{k_1=1}^{N}\sum_{\substack{k_2=-N\\k_2\neq 0}}^{N}\mathbf{w}_s^{k_1,k_2}\left(t^*+0,P\right)=\sum_{s'=1}^{2}\left(\int_0^1\int_{-1}^1\mathbf{R}_s^{s'}\left(x,y\right)dxdy\right)\mathbf{u}_{s'}\left(t^*,P\right).$$

Если учесть, что $\mathbf{w}_s^{0,1}\left(t^*+0,P\right)\underset{N\to\infty}{\to}0$ и $\mathbf{w}_s^{1,0}\left(t^*+0,P\right)\underset{N\to\infty}{\to}0$, решение задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, (6) можно представить в виде

$$\mathbf{w}_s\left(t^*+0,P\right)=\sum_{s'=1}^{2}\mathbf{D}_s^{s'}\mathbf{u}_{s'}\left(t^*,P\right);\quad \mathbf{D}_s^{s'}=\int_0^1\int_{-1}^1\mathbf{R}_s^{s'}\left(x,y\right)dxdy.$$

Перейдем к полярным координатам $x=r\cos\phi$, $y=r\sin\phi$. Легко видеть, что элементы массивов $\mathbf{R}_s^{s'}$ зависят только от угла ϕ, то есть $\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)$. Тогда

$$\mathbf{D}_s^{s'}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\phi}}\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)rdrd\phi+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\sin\phi}}\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)rdrd\phi+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\cos\phi}}\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)rdrd\phi.$$

Выполнив интегрирование по переменной r, получим

$$\mathbf{D}_s^{s'}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)+\mathbf{R}_s^{s'}\left(-\phi\right)\right)}{2\cos^2\phi}d\phi+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\left(\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)+\mathbf{R}_s^{s'}\left(-\phi\right)\right)}{2\sin^2\phi}d\phi.$$

Окончательно, решение задачи о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти, имеет вид

$$\mathbf{w}_s\left(t^*+0,P\right)=\sum_{s'=1}^{2}\mathbf{D}_s^{s'}\mathbf{u}_{s'}\left(t^*,P\right);\quad \mathbf{D}_s^{s'}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)+\mathbf{R}_s^{s'}\left(-\phi\right)\right)}{2\cos^2\phi}d\phi+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\frac{\left(\mathbf{R}_s^{s'}\left(\phi\right)+\mathbf{R}_s^{s'}\left(-\phi\right)\right)}{2\sin^2\phi}d\phi.$$

Заключение

В работе сформулирована и решена задача о корректных условиях на границе, разделяющей подобласти. Обращается внимание, что именно решение этой задачи следует применять при построении discontinious-алгоритмов (алгоритмов, в которых решение приближается разрывными функциями) численного решения краевых задач для гиперболических систем. Алгоритм решения задачи продемонстрирован на примере уравнений упругой динамики для двух пространственных переменных. Однако приведенный алгоритм очевидным образом обобщается и на случай произвольного числа пространственных переменных. Решение представлено в конечном конструктивном виде и может быть использовано при построении указанных discontinious-алгоритмов, а также для других целей при исследовании гиперболических систем.

Список литературы

Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — Москва: Физматлит, 2001.

Рябенький В. С. Введение в вычислительную математику. — Москва: Физматлит, 2000.

LeVeque R. L. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

Kaser M., Dumbser M. An Arbitrary High Order Discontinuous Galerkin Method for Elastic Waves on Unstructured Meshes. — I. The Two-Dimensional Isotropic Case with External Source Terms. Geophys. J. Int., 166, 855–877 // Geophys. J. Int. — 2006. — T. 166. — P. 855–877.