

УДК: 519.6

## Обзор методов обработки магнитно-резонансных изображений и развитие нового двухпараметрического метода моментов

Т. В. Яковлева

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына Российской академии наук,  
Россия, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, д. 40

E-mail: tan-ya@bk.ru

Получено 2 марта 2014 г.,  
после доработки 17 апреля 2014 г.

В работе дается обзор существующих методов обработки сигналов в условиях применения статистической модели Райса. Рассмотрены основные направления развития, существующие ограничения и возможности совершенствования методов решения задачи шумоподавления и фильтрации анализируемых сигналов на примере магнитно-резонансной визуализации. Развита концепция нового подхода к решению задачи одновременного определения основных статистических параметров райсовского случайного сигнала на основе метода моментов в двух вариантах его осуществления. Проведено компьютерное моделирование и проведен сравнительный анализ полученных численных результатов.

Ключевые слова: распределение Райса, магнитно-резонансная визуализация, выборки измерений, математическое ожидание, дисперсия шума

### Review of MRI processing techniques and elaboration of a new two-parametric method of moments

T. V. Yakovleva

*Institution of Russian Academy of Sciences Dorodnicyn Computing Centre of RAS,  
40 Vavilov st., 119333, Moscow, Russia*

**Abstract.** — The paper provides a review of the existing methods of signals' processing within the conditions of the Rice statistical model applicability. There are considered the principle development directions, the existing limitations and the improvement possibilities concerning the methods of solving the tasks of noise suppression and analyzed signals' filtration by the example of magnetic-resonance visualization. A conception of a new approach to joint calculation of Rician signal's both parameters has been developed based on the method of moments in two variants of its implementation. The computer simulation and the comparative analysis of the obtained numerical results have been conducted.

Keywords: Rice distribution, magnetic-resonance visualization, samples of measurements, mean value, noise dispersion

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 231–244 (Russian).

## 1. Обзор существующих подходов к решению задач обработки изображений в условиях распределения Райса

Как известно, статистическая модель Райса [Rice, 1945] адекватно описывает широкий круг научных и технических задач, и этим объясняется все возрастающий интерес к методам решения задач анализа и обработки случайных сигналов в условиях райсовского распределения. Наиболее известный пример реализации условий применимости статистической модели Райса представляют собой системы магнитно-резонансной визуализации. Поэтому предметом представленного ниже обзора стали, главным образом, методы анализа и обработки магнитно-резонансных изображений.

Известно, что в системах магнитно-резонансной визуализации, используемых, в частности, в медицине, немаловажным фактором является скорость получения и обработки изображений. Это обстоятельство накладывает некоторые априорные ограничения на приемлемые методы обработки таких изображений. С точки зрения такого критерия приемлемости естественный метод обработки изображений с целью шумоподавления, заключающийся в получении множества изображений и их усреднении, является хотя и эффективным, но не актуальным, так как связан со значительными затратами времени и поэтому неприменим для большей части клинических исследований. Особенности требований, налагаемых на системы магнитно-резонансной визуализации, применяемые в медицине, изложены, в частности, в работе [Manjon, 2008]. Принимая во внимание эти требования, можно сделать вывод о необходимости разработки эффективных методов шумоподавления, основанных не на усреднении последовательно полученных изображений, а на получении изображения, не требующем больших временных затрат, и его последующей обработке.

В настоящее время разработаны различные методы обработки магнитно-резонансного изображения, которые различаются в силу использования различных математических моделей и различных аналитических подходов к решению задачи получения и последующей обработки изображения. Существующие методы можно классифицировать, объединив их в группы, отличающиеся основополагающим подходом к решению задачи. Рассмотрим последовательно эти методы, чтобы проанализировать и сопоставить их эффективность и предпочтительность применения того или иного метода в различных задачах.

### *1.1. Методы, основанные на решении уравнений в частных производных*

В работе [Perona, Malik, 1990] разработаны алгоритмы фильтрации магнитно-резонансных изображений, основанные на процессе диффузии. Коэффициент диффузии выбирается варьируемым по пространственным координатам таким образом, чтобы усилить процесс сглаживания изображения внутри конкретной рассматриваемой области и подавить этот процесс в местах локализации границ между областями. Такой подход к фильтрации позволяет сохранить резкость границ, создавая тем самым высококачественный «детектор границ». Этот метод фильтрации обладает рядом преимуществ, одно из которых состоит в возможности параллельной обработки различных участков изображения в силу локального применения алгоритма к различным участкам, что особенно важно в задачах медицинской визуализации.

Метод фильтрации магнитно-резонансного изображения, основанный на решении уравнения в частных производных, впервые был детально рассмотрен в работе [Gerig, Kubler, Kikinis, Jolesz, 1992] (в англоязычной литературе методы, основанные на решении уравнений в частных производных, называются PDEs — от Partial Differential Equation — уравнение в частных производных). В работе [Gerig, Kubler, Kikinis, Jolesz, 1992] авторы показали, что анизотропная диффузия может быть эффективным инструментом улучшения качества магнитно-резонансного изображения, так как позволяет существенно понизить уровень шума с одновременным сохранением мелких деталей изображения. Однако, метод фильтрации, предложенный в [Gerig, Kubler, Kikinis, Jolesz, 1992], основан на изначально неправильном предположении

относительно статистической модели шума, а именно: в данной работе предполагается, что шум имеет гауссовское распределение, вместо распределения Райса, которое переходит в гауссовское только при очень больших отношениях сигнала к шуму.

Следует отметить, что широко распространенное гауссовское распределение используется для описания магнитно-резонансной визуализации и в ряде других работ (см., напр., [Garnier, Vilbro, 1995]), Однако, при не очень больших значениях отношения сигнала к шуму распределение Райса, адекватно описывающее процесс магнитно-резонансной визуализации, существенно отличается от гауссовского, а при отношении сигнала к шуму, близком к нулю, распределение Райса переходит в распределение Рэлея. В таких ситуациях применение некорректной в данном случае гауссовской статистической модели приводит к тому, что в изображении, полученном в результате такой фильтрации, появляется заметное смещение (в англоязычной литературе — *bias*) полученных в результате такого расчета данных по сравнению с реальными, которое особенно заметно при низком отношении сигнал-шум, когда неприменимость Гауссовской статистики к решению задачи шумоподавления в магнитно-резонансном изображении проявляется в существенно большей степени, чем при высоком отношении сигнала к шуму. Чтобы избежать появления такого смещения при произвольной величине отношения сигнала к шуму в работах последних лет все чаще используется именно распределение Райса для фильтрации изображений, полученных в системах магнитно-резонансной визуализации, [McGibney, Smith, 1993; Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Rajan, Jeurissen, Verhoye, Audekerke, Sijbers, 2011; Sijbers, den Dekker, 2004; He, Greenshields, 2009].

Как правило, методы, основанные на решении уравнения в частных производных (PDEs), используют анизотропную диффузию второго порядка (см. основополагающую работу [Perona, Malik, 1990]), которую после выхода в свет упомянутой работы стали называть классической анизотропной диффузией Perona–Malik. Основанные на такой диффузии фильтры позволяют достаточно хорошо сохранять границы между элементами изображения посредством анизотропного усреднения при обработке изображения, а именно, усреднения в направлении, ортогональном локальному градиенту структуры изображения.

Эти методы оказались достаточно эффективными в шумоподавлении, хотя им присущ некоторый недостаток, заключающийся в том, что в обработанном изображении проявляется эффект ступеньки, [You, Kaveh, 2000]. Этот эффект обусловлен возможным «стиранием» мелких деталей изображения, что приводит к изменению статистических свойств изображения. Чтобы снизить влияние этого негативного эффекта, в работе [Lysaker, 2003] был предложен алгоритм шумоподавления в магнитно-резонансных изображениях путем решения уравнений в частных производных 4-го порядка. Одно из принципиальных достоинств данного метода состоит в возможности обработки изображений с плавным изменением интенсивности сигнала.

В ряде последующих работ методы использования анизотропной диффузии стали сочетаться со статистическим подходом к решению задачи шумоподавления. Так, в работе [Basu, 2006] авторы используют методы теории вероятности в сочетании с методом анизотропной диффузии Perona–Malik для эффективного шумоподавления при решении задач магнитно-резонансной визуализации.

В одной из недавних работ [Krissian, Aja-Fernandez, 2009] предложен анизотропный диффузионный фильтр, в котором локальные статистические свойства изображения определяются путем линейной оценки минимальной среднеквадратичной ошибки в рамках райсовской модели (так называемый подход LMMSE).

В ряду работ по диффузионной фильтрации изображений следует отметить работу [Saha, Udupa, 2001], в которой рассматривается диффузионная фильтрация изображений с учетом размера локальной структуры объекта. Другими словами, предлагаемая в [Saha, Udupa, 2001] фильтрация конкретного фрагмента изображения определяется масштабом структуры изображения. При этом результаты такой фильтрации, определяющие локальную информацию об объекте исследования, оказываются не хуже результатов упомянутого метода Перона и Малика [Perona, Malik, 1990].

### **1.2. Методы, основанные на вейвлет-преобразованиях**

Вторая значимая группа методов фильтрации шума в магнитно-резонансных изображениях представляет собой ряд методов, основанных на вейвлет-преобразованиях. Этот класс фильтров рассматривается, в частности, в работах [Nowak, 1999; Wood, Johnson, 1999; Pizurica et al., 2003; Delakis et al., 2007]. В развитых в этих работах алгоритмах шумоподавления используются декорреляционные свойства вейвлет-разложений функции с целью подавления коэффициентов шумовых составляющих в рамках предполагаемой статистической модели. Следует отметить, что в работе [Nowak, 1999] был предложен оригинальный способ устранения «смещения» (the bias) сигнала изображения на основе использования того факта, что квадрат случайной величины, подчиняющейся распределению Райса, описывается статистической моделью хи-квадрат ( $\chi^2$ -квадрат) с двумя степенями свободы. В этой работе разработана новая процедура подавления шума, основанная на вейвлет-преобразовании, причем, как утверждает автор, в данной работе впервые при разработке нового вейвлет-фильтра принимается во внимание райсовский характер шумов, одной из особенностей которого является образование шумового фона, присущего магнитно-резонансным изображениям. Все расчеты, касающиеся разработки нового метода фильтрации изображения в данной работе, основаны на исходном с нашей точки зрения некорректном предположении об аддитивности шумовой составляющей. Это предположение противоречит исходной концепции райсовского шума: автор при описании особенностей райсовского шума справедливо указывает на его отличие от аддитивного гауссова шума, состоящее как раз в отсутствии аддитивности, в зависимости величины шума от величины сигнала, в наличии шумового фона и т. п. Таким образом, с одной стороны, в упомянутой работе дается реалистичное описание искажений изображения, вызванных райсовскими шумами, характерными для магнитно-резонансной визуализации. С другой стороны, при математической разработке адекватного метода фильтрации шумами автор представляет эти шумы как аддитивную составляющую полученного изображения, т. е. тем самым остается в рамках линейного приближения, что однозначно не соответствует действительности, особенно учитывая райсовский характер статистической модели шума в системах магнитно-резонансной визуализации. Кроме того, применение линейного преобразования, каковым является вейвлет-преобразование, для решения нелинейной задачи подавления райсовского шума является некорректным.

Как показали результаты ряда исследований, в частности см. работу [Manjon et al., 2008], всем вейвлет-фильтрам присущи характерные для них недостатки, связанные с побочными эффектами.

Недостатком фильтров, основанных на вейвлет-преобразованиях, являются привносимые ими характерные артефакты, которые негативно сказываются на возможностях клинических приложений магнитно-резонансной визуализации, [Buades, Coll, Morel, 2005].

В работе [Starck, Candès, Donoho, 2002] разработан метод, являющийся альтернативой традиционному вейвлет-преобразованию данных изображения. Этот метод основан на новом семействе преобразований — так называемых преобразованиях ridgelet и curvelet. Эти преобразования получили достаточно широкое развитие и стали весьма популярным методом фильтрации данных изображения [Gang, Lei, Xuequan, 2005; Jianwei, Plonka, 2010], в определенных аспектах превосходя вейвлет-преобразования при решении определенных задач. Но по своей сущности данные методы сходны с вейвлет-преобразованиями и используют разложение функций по определенным базисным функциям. Наряду с вейвлет-преобразованиями эти преобразования стали эффективным средством в решении задач цифровой обработки изображений с целью шумоподавления. Однако, как было отмечено выше, данные методы, являясь линейными преобразованиями, непригодны для эффективного решения нелинейных задач, к которым относится и задача подавления райсовского шума.

### **1.3. Нелокальные методы фильтрации**

Третья группа методов фильтрации изображений — это так называемые нелокальные методы фильтрации (в англоязычной литературе: NLM — Non Local Means).

Фильтрация изображений методом усреднения может привести к деструктивным изменениям изображения. В связи с этим были разработаны алгоритмы, которые включают в себя предварительное тестирование подобности усредняемых данных. Такое тестирование может осуществляться либо по каким-либо признакам, либо в пределах какого-либо участка изображения. Первый вариант такого тестирования используется, в частности, в так называемом алгоритме среднего сдвига (в англоязычной литературе: the mean shift algorithm) [Comaniciu, Meer, 2002]. Примером второго варианта фильтрации с тестированием может служить так называемая двухсторонняя фильтрация (bilateral filtering) [Tomasi, Manduchi, 1998], в которой процесс усреднения включает в себя «взвешивание» с использованием как пространственного расстояния между пикселями, так и различия в величине интенсивности пикселей. Упомянутые выше алгоритмы фильтрации — фильтрация среднего сдвига, фильтрация на основе анизотропной диффузии и двухсторонняя фильтрация — достаточно тесно взаимосвязаны. Этот вывод сделан в работе [Barash, 2002].

В последнее время нелокальные методы фильтрации (NLM) для обработки изображений приобретают все большую популярность. В работе [Manjon et al., 2008] впервые предпринята попытка разработать нелокальный метод фильтрации с целью шумоподавления в магнитно-резонансной визуализации. Дальнейшее развитие этот метод получил в ряде других работ (см., например, [Nowak, 1999]). В рамках алгоритма, основанного на нелокальных методах фильтрации, развито понятие подобия на основе локального контекста, а именно — сопоставляются величины интенсивностей в участках, окружающих каждый пиксел, а не только величины интенсивности самих обрабатываемых пикселей [Comaniciu, Meer, 2002].

Важно отметить, что в методах фильтрации, основанных на нелокальном подходе (NLM) избыточность пикселей не связана с понятием локальности, т. е. пиксели оцениваются независимо от геометрического расстояния между ними, как это происходит, например, в двухстороннем фильтре.

В работе [Wiest-Daessle et al., 2008] разработан адаптивный фильтр, основанный на нелокальных методах фильтрации, который проявляет свои свойства наиболее эффективно именно в задаче подавления райсовских шумов в магнитно-резонансной визуализации.

В работе [Manjon et al., 2010] предложен адаптивный нелокальный метод фильтрации для решения задач шумоподавления в магнитно-резонансных изображениях с пространственно-переменным уровнем шума как гауссовского, так и райсовского. В этом методе фильтрация применяется с учетом локального уровня шума в изображении. При этом информация о локальном уровне шума получается на основе анализа изображений посредством использования разработанного авторами нового локального метода оценки шума. Адаптивный нелокальный метод, предложенный в данной работе, имеет ряд преимуществ по сравнению со стандартным нелокальным методом в тех случаях, когда изображение характеризуется пространственно-варьируемым уровнем шума.

#### ***1.4. Фильтрация шума на основе методов математической статистики***

Особое место среди работ по развитию методов шумоподавления занимают работы, в которых используется подход, основанный на методах математической статистики [Thacker, Manjon, Bromiley, 2010], в частности — метод наименьших квадратов [Aja-Fernandez, Alberola-Lopez, Westin, 2008], метод моментов [Talukdar, Lawing, 1991; Abdi et al, 2001; Park, Jr., 1961; Benedict, Soong, 1967]. Тем не менее большая часть работ, использующих методы математической статистики, основаны на методе максимального правдоподобия [Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Rajan, Jeurissen, Verhoye, Audekerke, Sijbers, 2011; Sijbers, den Dekker, 2004; He, Greenshields, 2009; Benedict, Soong, 1967; Carobbi, Cati, 2008; Yakovleva, Kulberg, 2013]. Работы, основанные на применении метода максимального правдоподобия, отличаются по используемому в них основополагающему подходу от других работ, в частности, от группы работ по фильтрации, основанной на сглаживающих сплайнах (smoothing splines) (см., например, [Koay et al., 2009]). В работах [Sijbers, den Dekker, Scheunders, Dyck, 1998; Rajan, Jeurissen,

Verhoye, Audekerke, Sijbers, 2011; Sijbers, den Dekker, 2004; He, Greenshields, 2009] метод максимального правдоподобия используется для расчета только одного статистического параметра сигнала (чаще всего — математического ожидания), формирующего анализируемое изображение с целью его последующего восстановления.

В контексте актуальности совместного определения обоих статистических параметров задачи именно в условиях распределения Райса заслуживает особого внимания работа [Sijbers, den Dekker, 2004], так как в ней проводится сравнительный анализ использования метода максимума правдоподобия для оценки реальной и мнимой компонент комплексного сигнала и для оценки величины магнитуды (амплитуды) сигнала в системах магнитно-резонансной визуализации. Этот анализ осуществляется методами среднего квадратичного отклонения на основе нижних границ оценки по принципу Крамера–Рао. В работе [Sijbers, den Dekker, 2004] получен важный вывод о том, что на практике, когда значения фазы сигнала варьируются в пределах набора данных, на основе которого оценивается амплитуда сигнала, оценка, производимая путем анализа величины амплитуды (или огибающей) сигнала, является предпочтительной, так как дает меньшую среднеквадратичную погрешность. Этот вывод является еще одним подтверждением актуальности изучения и решения задачи анализа и обработки данных в условиях распределения Райса как адекватно описывающего амплитуду сигнала при магнитно-резонансной визуализации.

Метод шумоподавления при обработке магнитно-резонансных изображений, основанный на принципе максимума правдоподобия, может применяться локально (в англоязычной литературе такие методы обозначаются как LML от Local Maximum Likelihood) или нелокально (NL ML — Non Local Maximum Likelihood). Примером применения нелокального метода максимума правдоподобия может служить работа [He, Greenshields, 2009]. В данной работе метод максимума правдоподобия применяется на множестве пикселей изображения, отобранных на основе подобия пикселям из ближайшего окружения. Один из недостатков нелокального метода максимума правдоподобия состоит в использовании фиксированного размера участка (выборки) для проведения оценки по методу максимума правдоподобия. Такой подход может стать причиной чрезмерного или недостаточного сглаживания. Недостатком же локального применения метода максимума правдоподобия является размытие границ и искажение тонкой структуры изображения вследствие того, что исходное предположение о локальном постоянстве сигнала в пределах выбранного окружения пикселей является, вообще говоря, не соответствующим действительности и на практике, как правило, не выполняется.

Вышеприведенный детальный обзор методов шумоподавления позволяет определить место развитого в настоящей работе метода восстановления исходного изображения как одного из группы методов, основанных на статистическом анализе данных. Предлагаемый подход к решению задачи обработки магнитно-резонансного изображения с целью шумоподавления состоит в математическом расчете статистических параметров восстанавливаемого изображения на основе метода моментов, т. е. на основе измерения и анализа выборочных значений моментов изучаемой случайной величины. При этом рассматриваются и сопоставляются два варианта осуществления двухпараметрического метода моментов: метод моментов, основанный на измерении 2-го и 4-го моментов анализируемого сигнала, и метод моментов, основанный на измерении 1-го и 2-го моментов.

Развитый подход к решению задачи шумоподавления и фильтрации изображения позволяет преодолеть вышеупомянутые недостатки как методов фильтрации, основанных на анизотропной диффузии, так и алгоритмов, использующих вейвлет-преобразования, поскольку задача восстановления исходного изображения в предлагаемом методе решается посредством математического расчета параметров искомого изображения исключительно на основе реально измеренных выборочных данных в каждой точке изображения, без использования каких-либо априорных предположений. Важное преимущество предлагаемого подхода состоит в возможности расчета не одного, а обоих *a priori* неизвестных статистических параметров задачи, а именно — параметра математического ожидания (т. е. средней величины полезного сигнала) и параметра дисперсии шума (или стандартного отклонения). Эти два определяемых статистических параметра случайного райсовского сигнала позволяют полностью определить функцию,

описывающую восстанавливаемое изображение. Таким образом, разработанные методы решения задачи обработки изображения свободны от ограничения, налагаемого предположением об априорной известности дисперсии шума (см., например, [Talukdar, Lawing, 1991]), которое на практике, как правило, не выполняется. Преодоление данного ограничения открывает новые возможности в решении задач шумоподавления и восстановления изображения не только в системах магнитно-резонансной визуализации, но и при анализе и обработке данных любой другой физической природы, когда измеряемой и анализируемой величиной является огибающая, или амплитуда сигнала, т. е. в условиях применимости статистической модели Райса.

## 2. Постановка задачи, основные обозначения

В задаче анализа райсовского сигнала измеряемой величиной является модуль комплексной величины,  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$ , действительная  $x_{\text{Re}}$  и мнимая  $x_{\text{Im}}$  и мнимая части которого являются независимыми случайными величинами с одинаковыми, вообще говоря, ненулевыми математическими ожиданиями  $\nu$ , и искажаются гауссовским шумом, имеющим нормальное распределение с некоторой неизвестной величиной дисперсии  $\sigma^2$ . При этом шумовые составляющие, искажающие действительную  $x_{\text{Re}}$  и мнимую  $x_{\text{Im}}$  компоненты измеряемого сигнала, имеют нулевые средние значения и, тем самым, не изменяют среднюю величину  $\nu$  действительной и мнимой компонент исходного сигнала. Величина  $\nu/\sigma$  характеризует отношение сигнала к шуму.

Амплитуда сигнала  $x = \sqrt{x_{\text{Re}}^2 + x_{\text{Im}}^2}$  подчиняется распределению Райса со следующей функцией плотности вероятности:

$$P(x|\nu, \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + \nu^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{x\nu}{\sigma^2}\right). \quad (1)$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения:  $I_\delta(z)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода (или функция Инфельда) порядка  $\delta$ ;  $x_i$  — величина сигнал, полученная как результат  $i$ -го измерения в выборке;  $n$  — количество элементов в выборке, называемое также длиной выборки. Для обозначения усреднений по выборке будем использовать угловые скобки:  $\langle x^\kappa \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\kappa$ . Средние величины при бесконечно большой длине выборки будем обозначать чертой сверху:  $\overline{x^\kappa} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\kappa$ . Величина  $\overline{x^\kappa}$  представляет собой  $\kappa$ -й момент случайной величины  $x$ . Измеренное на основе выборочных измерений  $x_i (i=1, \dots, n)$  значение  $\langle x^\kappa \rangle$  стремится к значению соответствующего  $\kappa$ -го момента случайного сигнала, формирующего изображение, при бесконечно большой длине  $n$  выборки измерений.

Математическая задача, которая решается в настоящей работе, состоит в том, чтобы, используя известный из математической статистики метод моментов, определить два упомянутых искомого параметра  $\nu$  и  $\sigma^2$  на основе данных выборок измерений и тем самым восстановить с помощью этих параметров исходный, не искаженный шумом сигнал, в частности, в случае магнитно-резонансной визуализации — незашумленное изображение. Как указывалась выше, метод моментов развит в двух вариантах его осуществления: метод, основанный на измерении 2-го и 4-го моментов анализируемой величины, который ниже для краткости будем называть ММ24, и метод, основанный на измерении 1-го и 2-го моментов, который будем называть ММ12.

### 3. Метод ММ24

Из математической статистики известны формулы для 2-го и 4-го начальных моментов случайной величины  $x$ , подчиняющейся распределению Райса [Park, Jr., 1961]:

$$\begin{aligned}\overline{x^2} &= 2 \cdot \sigma^2 + \nu^2, \\ \overline{x^4} &= 8 \cdot \sigma^4 + 8 \cdot \sigma^2 \cdot \nu^2 + \nu^4.\end{aligned}\quad (2)$$

Фактически формулы (2) представляют собой простую систему двух уравнений для двух неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$ . В решении данной системы и состоит первый вариант двухпараметрического метода моментов, основанный на измерении 2-го и 4-го моментов анализируемой величины. Ниже для краткости будем называть этот метод ММ24.

Из формул (2) для определения параметра  $\nu$  и  $\sigma^2$  нетрудно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}\nu &= \sqrt[4]{2 \cdot (\overline{x^2})^2 - \overline{x^4}}, \\ \sigma^2 &= \frac{1}{2} \left[ \overline{x^2} - \sqrt{2 \cdot (\overline{x^2})^2 - \overline{x^4}} \right].\end{aligned}\quad (3)$$

Важно отметить, что формулы (3) содержат величины моментов измеряемого сигнала изображения, которые определяются в выборках измерений тем точнее, чем больше длина выборки. При этом, с помощью несложных математических выкладок (см. также [Yakovleva, Kulberg, 2013]), можно сделать вывод о неотрицательности подкоренных выражений в (3) при достаточно большой длине выборки измерений анализируемого сигнала. Таким образом, решение системы уравнений (2) метода моментов ММ24 для параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$  существует. Единственность данного решения следует из того, что физически значимые значения искомых параметров являются неотрицательными, поэтому в решениях (3) остается лишь один из двух возможных знаков перед корнем. Таким образом, решение системы уравнений (2) рассматриваемого варианта метода моментов ММ24 существует и является единственным.

Производя несложные преобразования формул (3) и вводя обозначение

$$t = \frac{\overline{x^4}}{(\overline{x^2})^2} - 1,$$

выражения для квадратов искомых параметров  $\nu^2$  и  $\sigma^2$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}\nu^2 &= \overline{x^2} \sqrt{1-t}, \\ \sigma^2 &= \frac{\overline{x^2}}{2} (1 - \sqrt{1-t}).\end{aligned}\quad (4)$$

Как нетрудно видеть, введенный параметр  $t$  удовлетворяет соотношению:  $0 < t \leq 1$ . В частном случае распределения Рэлея, когда полезный сигнал отсутствует ( $\nu = 0$ ), имеем  $t = 1$ .

Таким образом, вариант метода моментов ММ24 позволяет с помощью формул (3), (4) рассчитать величины искомых статистических параметров математического ожидания  $\nu$  и дисперсии  $\sigma^2$  сигнала, формирующего изображение, только на основе выборочных измерений, без затрат времени на численное решение задачи. Такой метод является весьма оригинальным и при этом очень простым в практической реализации и позволяет существенно ускорить процесс обработки анализируемого сигнала, в частности — магнитно-резонансного изображения, например, с целью шумоподавления.

Из (4) легко получаются значения искоемых параметров в предельных случаях очень малого ( $t \rightarrow 1$ ) и очень большого ( $t \rightarrow 0$ ) отношения сигнала к шуму. В частности, в предельном случае  $\nu / \sigma \ll 1$  получаем из (4) известное для распределения Рэлея (при  $\nu = 0$ ) соотношение  $\sigma^2 = \frac{\bar{x}^2}{2}$ . В асимптотическом пределе очень большой величины отношения сигнала к шуму, т. е. в случае почти детерминированного сигнала из (4) получаем для параметра  $\nu$  формулу  $\nu = \sqrt{x^2}$ .

#### 4. Метод ММ12

В данном разделе искомые статистические параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$ , характеризующие среднее значение сигнала и дисперсию шума, определяются на основе использования измеренных данных для 1-го и 2-го моментов случайной райсовской величины.

Аналитическая формула для 2-го момента приведена выше (выражения (2)). Формула для 1-го момента  $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  райсовской величины  $x$  имеет вид [Park, Jr., 1961]

$$\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\pi / 2} \cdot L_{1/2}(-\nu^2 / 2\sigma^2). \tag{5}$$

В (5) функция  $L_{1/2}$  представляет собой полином Лагерра (Laguerre). Используя известную формулу для полинома Лагерра, выражающую  $L_{1/2}$  через модифицированные функции Бесселя  $I_0(z)$  и  $I_1(z)$  [Абрамовиц, Стиган, 1979]:

$$L_{1/2}(z) = e^{z/2} \left[ (1-z)I_0\left(\frac{-z}{2}\right) - zI_1\left(\frac{-z}{2}\right) \right],$$

выражение (5) для первого момента  $\bar{x}$  райсовской величины можно представить в виде

$$\bar{x} = \sigma \cdot \sqrt{\pi / 2} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{4\sigma^2}} \left[ \left( 1 + \frac{\nu^2}{2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\nu^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) \right]. \tag{6}$$

Формула (6) определяет аналитическую зависимость первого момента случайной величины  $x$  от искоемых параметров задачи  $\nu$  и  $\sigma^2$ , т. е. фактически может использоваться в качестве одного из исходных уравнений для определения неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$ . В качестве второго уравнения в данном варианте метода моментов используется выражение для второго момента (первая из формул (2)). Таким образом, получаем следующую систему двух уравнений для двух неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$ :

$$\begin{cases} \sigma \cdot \sqrt{\pi / 2} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{4\sigma^2}} \left[ \left( 1 + \frac{\nu^2}{2\sigma^2} \right) I_0\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) + \frac{\nu^2}{2\sigma^2} I_1\left(\frac{\nu^2}{4\sigma^2}\right) \right] = \bar{x}, \\ 2\sigma^2 + \nu^2 = \bar{x}^2. \end{cases} \tag{7}$$

В результате проведенного математического исследования системы уравнений (7) было доказано существование решения данной системы, которое в данном случае не столь очевидно, как в случае системы уравнений (2) для рассмотренного выше метода ММ24. В силу большого объема математических выкладок это доказательство не приводится в данной статье, однако ниже оно иллюстрируется посредством компьютерного моделирования задачи. Важно отметить, что решение двух уравнений (7) для двух неизвестных  $\nu$  и  $\sigma^2$  может быть сведено к ре-

шению одного уравнения для одной неизвестной величины  $r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}$ , на основе решения которого определяются искомые параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$ . Возможность преобразования системы уравнений к одному уравнению для одной переменной означает существенное сокращение необходимых для решения задачи вычислительных ресурсов.

Опуская промежуточные выкладки, приведем полученное уравнение для переменной  $r$ :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} \cdot \langle x^2 \rangle} \cdot \sqrt{1+r} \cdot e^{-\frac{r}{2}} \cdot I_0\left(\frac{r}{2}\right) \left[ 1 + \frac{r}{(1+r)} \cdot \tilde{I}\left(\frac{r}{2}\right) \right] = \langle x \rangle. \quad (8)$$

где обозначение  $\tilde{I}$  используется для функции  $\tilde{I}(z) = \frac{I_1(z)}{I_0(z)}$ , равной отношению модифицированных функций Бесселя первого и нулевого порядков. Свойства функции  $\tilde{I}$  подробно исследовались в [Yakovleva, Kulberg, 2013].

Решая уравнение (8) для параметра  $r = \frac{\nu^2}{2\sigma^2}$  и учитывая второе уравнение системы (7), трудно определить искомые параметры  $\nu$  и  $\sigma^2$  сигнала, формирующего изображение:

$$\begin{aligned} \nu &= \sqrt{\frac{r}{1+r}} \sqrt{\langle x^2 \rangle}, \\ \sigma^2 &= \frac{\langle x^2 \rangle}{2(1+r)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, развитый метод ММ12 позволяет на основе определенной в результате решения уравнения (8) величины  $r$  вычислить искомые параметры сигнала и шума  $\nu$  и  $\sigma^2$ , используя формулы (9).

## 5. Результаты численного моделирования методов ММ24 и ММ12

Разработанные и обоснованные выше способы расчета статистических параметров райсовского сигнала на основе метода моментов в двух рассмотренных вариантах его осуществления ММ24 и ММ12 были численно промоделированы на компьютере. В данном разделе приведены результаты такого моделирования. Представленные графические данные позволяют проиллюстрировать возможность и точность расчета статистических параметров задачи путем использования развитых вариантов двухпараметрического метода моментов: ММ24 и ММ12.

Численный эксперимент проводился следующим образом. Генерировались данные, подчиняющиеся распределению Райса, на двумерной сетке, узлы которой соответствуют различным исходно заданным значениям параметров сигнала, формирующего изображение: средней величины  $\nu$  и стандартного отклонения  $\sigma$ . С учетом выборки значений сигнала в каждой точке сетки вычислялись расчетные значения вышеуказанных статистических параметров на основе разработанных алгоритмов, т. е. путем решения уравнений, соответствующих моделируемому варианту метода моментов. Результаты численного моделирования решения двухпараметрической задачи обоими вариантами метода моментов представлены на рисунках 1 и 2. Представленные графики соответствуют результатам численного решения задачи расчета параметра математического ожидания  $\nu$  (рис. 1) и параметра стандартного отклонения  $\sigma$  (рис. 2) при следующих условиях: исходные значения величин обоих параметров  $\nu$  и  $\sigma$  изменялись в диапазоне от 0.1 до 2.0 шагом 0.1 (по оси абсцисс отмечены точки отсчета). Длина выборки  $n$  измерений случайного сигнала составляла 64. Графики соответствуют данным, усредненным

по 10 выборкам (в реальных системах визуализации число усредняемых выборок составляет, как правило,  $10^3 \sim 10^4$ ).

На рисунке 1 показаны зависимости отклонений значений параметра  $\nu$ , рассчитанных методами ММ24 (пунктирная линия) и ММ12 (сплошная ломаная линия) от реальной, исходно заданной величины этого параметра (прямая линия) при различных исходных значениях параметра дисперсии  $\sigma$ . Значения по оси абсцисс на обоих графиках соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра  $\nu$ , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра. Отклонения ломаных пунктирной и сплошной линий от прямой характеризуют точность расчетов методами ММ24 и ММ12 соответственно. Графики, представленные на рисунке 1, демонстрируют повышение точности расчетов по обоим методам ММ24 и ММ12 при увеличении отношения сигнала к шуму (при переходе последовательно от рисунка 1а к рисунку 1с и при перемещении слева направо вдоль расчетных кривых).

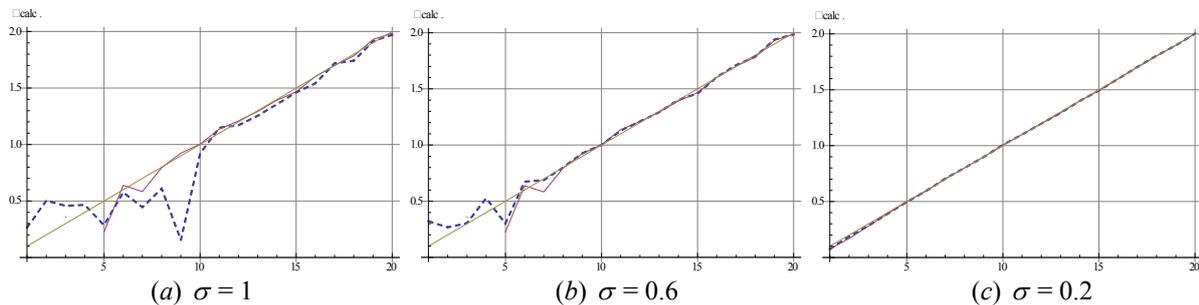


Рис. 1. Результаты численного расчета параметра математического ожидания  $\nu$  посредством вариантов двухпараметрического метода моментов ММ24 (пунктирная линия) и ММ12 (сплошная линия)

На рисунке 2а–с показаны зависимости отклонений значений параметра стандартного отклонения  $\sigma$ , рассчитанных методами ММ24 (пунктирная линия) и ММ12 (сплошная ломаная линия), от реальных, исходно заданных значений этого параметра (прямая линия), при различных исходных значениях параметра математического ожидания  $\nu$ . Значения по оси абсцисс на обоих графиках соответствуют точкам отсчета исходно заданных значений параметра  $\sigma$ , а по оси ординат — расчетным значениям данного параметра. Отклонения пунктирной и сплошной линий от прямой характеризуют точность расчетов для методов ММ24 и ММ12 соответственно.

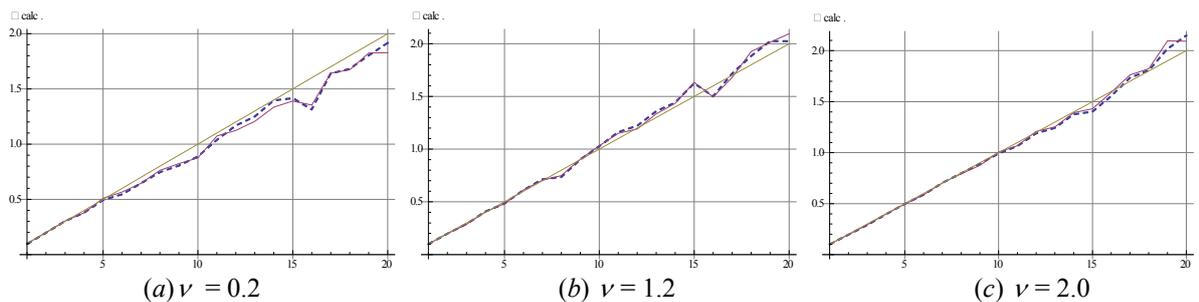


Рис. 2. Результаты численного расчета параметра стандартного отклонения  $\sigma$  посредством вариантов двухпараметрического метода моментов ММ24 (пунктирная линия) и ММ12 (сплошная линия)

Как и в случае зависимостей, представленных на рисунке 1, графики на рисунке 2а–с иллюстрируют зависимость точности расчетов по обоим методам ММ24 и ММ12 от величины отношения сигнала к шуму: с ростом параметра  $\sigma$  (при перемещении слева направо вдоль расчетных кривых) происходит снижение отношения сигнала к шуму и точность расчетов заметно падает. Напротив, с ростом значения параметра  $\nu$  (при переходе от рис. 2а к рис. 2с) отношение сигнала к шуму растет и, соответственно, повышается точность вычислений.

Таким образом, из представленных результатов численных экспериментов по вычислению неизвестных параметров с использованием обоих вариантов метода моментов ММ24 и ММ12

(рис. 1, 2) следует ожидаемый вывод: чем больше отношение сигнала к шуму, тем выше точность расчета параметров задачи  $\nu$  и  $\sigma^2$ . Как следует из представленных данных, оба сопоставляемых метода ММ24 и ММ12 характеризуются примерно одинаковой точностью вычислений искомых параметров, при этом диапазон относительно высокой точности вычислений, обеспечиваемой обоими методами, определяется условием  $\frac{\nu}{\sigma} \geq 1.5 \div 2$ .

#### 4. Заключение

Представленный в работе обзор существующих методов обработки сигналов в условиях распределения Райса выявляет основные направления развития, существующие ограничения и возможности совершенствования методов, применяемых для анализа райсовских сигналов, на примере решения задач шумоподавления и восстановления магнитно-резонансных изображений.

Развита концепция нового подхода к решению задачи одновременного определения основных статистических параметров райсовского случайного сигнала методом моментов в двух вариантах его осуществления: на основе измерений 2-го и 4-го моментов анализируемого сигнала, на основе измерений 1-го и 2-го моментов. Представлены теоретические основы и проведено компьютерное моделирование обоих вариантов метода. На основе анализа и сопоставления численных результатов получены выводы о том, что оба рассматриваемых варианта метода моментов характеризуются примерно одинаковой точностью вычислений искомых статистических параметров  $\nu$  и  $\sigma^2$ , причем эта точность заметно повышается с ростом величины отношения сигнала к шуму.

#### Список литературы

- Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям // Москва, Изд. «Наука», 1979.
- Abdi A. et al.* On the estimation of the K parameter for the Rice fading distribution // IEEE Commun. Lett. — 2001. — Vol. 5, No. 3. — P. 92–94.
- Aja-Fernandez S., Alberola-Lopez C., Westin C.-F.* Noise and Signal Estimation in Magnitude MRI and Rician Distributed Images: A LMMSE Approach // IEEE Transactions on Image Processing. — 2008. — Vol. 17, Issue 8. — P. 1383–1398.
- Barash D.* A fundamental relationship between bilateral filtering, adaptive smoothing and the nonlinear diffusion equation // IEEE Trans. PAMI, 24(6): 844–847, 2002.
- Basu S. et al.* Rician noise removal in diffusion tensor MRI // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention — MICCAI*, 2006. — P.117–125, Berlin. Springer-Verlag.
- Benedict T. R., Soong T. T.* The joint estimation of signal and noise from the sum envelope // IEEE Trans. Inf. Theory. — 1967. — Vol. IT-13, No. 3. — P. 447–454.
- Buades A., Coll B, Morel J. M.* A review of image denoising algorithms, with a new one // *Multiscale Model Simul.* — 2005. — 4: 490–530.
- Carobbi C. F.M., Cati M.* The absolute maximum of the likelihood function of the Rice distribution: existence and uniqueness // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. — 2008. — Vol. 57, no 4. — P. 682–689.
- Comaniciu D., Meer P.* Mean shift: A robust approach toward feature space analysis // IEEE Trans. PAMI. — 2002. — 24(5): 603–619.
- Delakis I. et al.* Wavelet based denoising algorithm for images acquired with parallel magnetic resonance imaging (MRI) // *Phys. Med. Biol.* — 2007. — 52: 3741–3751.
- Gang L.; Lei X.; Xuequan C.* Overview of the Applications of Curvelet Transform in Image Processing // Journal of Computer Research and Development. — 2005. — P. 1331–1337.

- Garnier S. J., Bilbro G. L. Magnetic resonance image restoration // *J. Math. Imag., Vision.* — 1995. — Vol. 5. — P. 7–19.
- Gerig G., Kubler O., Kikinis R., Jolesz F. A. Nonlinear anisotropic filtering of MRI data // *IEEE Trans. Med. Imag.* — 1992. — Vol. 11. — P. 221–232.
- He L., Greenshields I. R. A nonlocal maximum likelihood estimation method for Rician noise reduction in MR images // *IEEE Trans Med Imaging.* — 2009. — 28: 165–172.
- Jianwei Ma; Plonka, G. The Curvelet Transform // *Signal Processing Magazine, IEEE.* — 2010. — Vol. 27, No. 2. — P.118–133.
- Koay C. et al. A signal transformational framework for breaking the noise floor and its applications in MRI // *Journal of Magnetic Resonance.* — 2009. — 197: 108–119.
- Krissian K., Aja-Fernandez S. Noise driven anisotropic diffusion filtering of MRI // *IEEE Trans. Imag. Proc.* — 2009. — 18: 2265–2274.
- Lysaker M. et al. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time // *IEEE Trans. Imag. Proc.* — 2003. — 12(12): 1579–1590.
- Manjon J. V. et al. Adaptive non local means denoising of MR images with spatially varying noise levels // *J. Magn Reson Imaging.* — 2010. — 31: 192–203.
- Manjon J. V. et al. MRI denoising using non local means // *Medical Image Analysis.* — 2008. — 12: 514–523.
- McGibney G., Smith M. R. An unbiased signal-to-noise ratio measure for magnetic resonance images // *Med. Phys.* — 1993. — Vol. 20, No. 4. — P. 1077–1078.
- Nowak R. D. Wavelet based Rician noise removal for magnetic resonance images // *IEEE Trans. Image Processing.* — 1999. — 10(8):1408–1419.
- Park J.H., Jr. Moments of generalized Rayleigh distribution // *Q. Appl. Math.* — 1961. — Vol. 19, No. 1. — P. 45–49.
- Perona P., Malik J. Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* — 1990. — Vol. 12, No. 7. — P. 629–639.
- Pizurica A. et al. A versatile wavelet domain filtration technique for medical imaging // *IEEE Trans. Med. Imaging.* — 2003. — 22: 323–331.
- Rajan J., Jeurissen B., Verhoye M., Van Audekerke J., Sijbers J. Maximum likelihood estimation based denoising of magnetic resonance images using restricted local neighborhoods // *Physics in Medicine and Biology.* — 2011. — Vol. 56, Issue 16. — P. 5221–5234.
- Rice S. O. Mathematical Analysis of Random Noise // *Bell System Technical Journal.* — 1945. — Vol. 24. — P.46–156.
- Saha P. K., Udupa J. K. Scale-based Diffusive Image Filtering Preserving Boundary Sharpness and Fine Structures // *IEEE Trans. Med. Imaging.* — 2001. — 20(11): 1140–1155.
- Sijbers J., den Dekker A. J. Maximum Likelihood estimation of signal amplitude and noise variance from MR data // *Magn. Reson. Med* 51(3):586—594, 2004.
- Sijbers J., den Dekker A. J., Scheunders P., Dyck D. V. Maximum-Likelihood Estimation of Rician Distribution Parameters // *IEEE Transactions on Medical Imaging.* — 1998. — Vol. 17, no 3. — P. 357–361.
- Starck J.-L., Candès E. J., Donoho D. L. The curvelet transform for image denoising // *IEEE Trans. Image Process.* — 2002. — Vol. 11, No. 6. — P. 670–684.
- Talukdar K.K., Lawing W.D. Estimation of the parameters of Rice distribution // *J. Acoust. Soc. Amer.* — 1991. — Vol. 89, No. 3. — P. 1193–1197.
- Thacker N.A., Manjon J.V., Bromiley P.A. A Statistical Interpretation of Non-Local Means // *IET Computer Vision.* — 2010. — 4(3):162–172.
- Tomasi C., Manduchi R. Bilateral filtering of gray and color images // *Proceedings of the Sixth IEEE International Conference on Computer Vision.* — 1998. — P. 839–846. — Bombay, India.
- Wiest-Daessle N. et al. Rician noise removal by Non-Local Means filtering for low Signal-to-Noise ratio MRI: Applications to DT-MRI // *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention — MICCAI.* — 2008. — P. 171–179. — Berlin. Springer-Verlag.

- Wood J. C., Johnson K. M.* Wavelet Packet Denoising of Magnetic Resonance Images: Importance of Rician Noise at Low SNR // *Magn Reson Med.* — 1999. — 41(3): 631–635.
- Yakovleva T.V., Kulberg N. S.* Noise and Signal Estimation in MRI: Two-Parametric Analysis of Rice-Distributed Data by Means of the Maximum Likelihood Approach // *American Journal of Theoretical and Applied Statistics.* — 2013. — Vol. 2, No. 3. — P. 67–79. doi: 10.11648/j.ajtas.20130203.15
- You Y., Kaveh M.* Fourth order partial differential equations for noise removal // *IEEE Trans. Imag. Proc.* — 2000. — 9(10): 1723–1730.