

УДК: 519.63

## Маршевый алгоритм решения задачи переноса излучения методом коротких характеристик

Ю. И. Скалько<sup>1,a</sup>, Р. Н. Карасев<sup>1,2</sup>, А. В. Акопян<sup>1,2</sup>, И. В. Цыбулин<sup>1</sup>,  
М. А. Мендель<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Россия, 141700, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

<sup>2</sup>Институт проблем передачи информации РАН,  
Россия, 127994, г. Москва, Большой каретный пер., д. 19

E-mail: <sup>a</sup> skalko@mail.mipt.ru

Получено 12 февраля 2014 г.,  
после доработки 28 марта 2014 г.

В работе изложена процедура построения численных решений для задачи переноса излучения. В этом подходе численное решение строится последовательно от границы области вдоль направления распространения излучения. Проведено тестирование алгоритма на задаче распространения излучения нагретого шара.

Ключевые слова: перенос излучения, маршевый алгоритм, метод коротких характеристик

## Space-marching algorithm for solving radiative transfer problem based on short-characteristics method

Y. I. Skalko<sup>1</sup>, R. N. Karasev<sup>1,2</sup>, A. V. Akopyan<sup>1,2</sup>, I. V. Tsybulin<sup>1</sup>, M. A. Mendel<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow Region, 141700, Russia

<sup>2</sup>Institute for Information Transmission Problems RAS, 19 Bolshoy Karetny per., Moscow, 127994, Russia

**Abstract.** — A procedure of approximate solving of the radiation transfer problem is presented. The approximated solution is being built successively from the domain border along the direction of radiation propagation. The algorithm was tested for model problem of hot ball radiation.

Keywords: radiative transfer problem, space-marching algorithm, short-characteristics method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 2, pp. 203–215 (Russian).

Работа выполнена при поддержке гранта президента РФ МК-3138.2014.1

## Введение

В данной работе мы рассмотрим методику построения численных решений задачи переноса излучения. Интерес к таким задачам обусловлен тем, что предметом внимания исследователей становятся процессы, в которых излучение значимо влияет на всю картину явления [Четверушкин, 1985; Tajima, Fukue, 1998; Ohsuga, 2007; Галанин, Лукин, Чететкин, 1999; Галанин, Лукин, Чететкин, 2009]. Существенная часть вычислительных ресурсов тратится на численное решение задач переноса излучения в силу их большой размерности. Необходимы качественные алгоритмы, допускающие эффективное распараллеливание на современных вычислительных архитектурах, в том числе и на гибридных системах с графическими ускорителями (GPU).

## Постановка задачи

Рассматривается краевая задача для стационарного уравнения переноса излучения. Задача решается в выпуклой области  $G \subset \mathbb{R}^3$ , которая ограничена кусочно-гладкой границей  $\partial G$  из класса  $C^1$ . Интенсивность равновесного излучения при заданной температуре среды обозначим  $I_e(x)$ . Полагаем, что на границе области задана интенсивность излучения  $I_{\partial G}(\mathbf{\Omega}, x)$ , направленного внутрь области. Здесь  $\mathbf{\Omega}$  — единичный вектор, указывающий направление излучения. Тогда для интенсивности излучения  $I(\mathbf{\Omega}, x)$  в направлении  $\mathbf{\Omega}$  можем сформулировать краевую задачу [Четверушкин, 1985; Владимиров, 1961]:

$$\begin{cases} (\mathbf{\Omega}\nabla)I(\mathbf{\Omega}, x) + \kappa(x)I(\mathbf{\Omega}, x) = I_e(x), \\ I(\mathbf{\Omega}, x) = I_{\partial G}(\mathbf{\Omega}, x), \quad x \in \partial G, (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}) < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе области  $\partial G$ , а  $\kappa(x)$  — коэффициент поглощения излучения в точке  $x$ .

Алгоритмы численного решения задач распространения излучения условно можно разделить на две группы: итерационные алгоритмы и маршевые [Басс, Быков, Дергачев и др., 2006; Zhao, Liu, 2007; Галанин, Лукин, 2007; Галанин, Лукин, Чететкин, 2010; Nikolaeva, Bass, Germogenova et al., 2007; Владимиров, 1961; Basko, Maruhn, Tauschwitz, 2009]. В алгоритмах первой группы после дискретизации исходная задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений СЛАУ, после чего эта СЛАУ решается тем или иным, как правило, итерационным способом. В маршевых алгоритмах строится процедура последовательного вычисления решения, избегая необходимости решать СЛАУ.

Ниже предложен маршевый алгоритм на коротких характеристиках и проведено его тестирование на задаче распространения излучения нагретого шара.

## Предварительные сведения и утверждения

Прежде чем формулировать алгоритм численного решения задачи (1), сформулируем и докажем несколько утверждений, на которые будет опираться алгоритм. Прежде всего, обсудим свойство триангуляции Делоне, известное как «ацикличность». Приводимые ниже результаты известны из работы [Edelsbrunner, 1990], однако для удобства читателя мы приведем их более короткие и понятные доказательства.

Рассмотрим конечное множество  $X \subset \mathbb{R}^n$ , находящееся в общем положении в следующем смысле: никакие  $n+1$  точек из  $X$  не лежат в одной гиперплоскости, и никакие  $n+2$  точки не лежат на одной сфере. Ясно, что небольшими возмущениями всякое множество приводится в общее положение, что достаточно для практических применений.

**Теорема 1.** Пусть в выпуклой оболочке конечного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  в общем положении построена триангуляция Делоне  $\{T_1, \dots, T_m\}$  с вершинами в данном множестве  $X$ . Тогда для всякого направления  $\Omega$  можно упорядочить симплексы триангуляции  $T_i$  таким образом, что любая направленная прямая с направляющим вектором  $\Omega$  будет пересекать внутренности симплексов в соответствии с их порядком. Более того, такой порядок симплексов достигается упорядочиванием проекций центров их описанных сфер на направление  $\Omega$ .

Напомним, что триангуляция Делоне характеризуется таким свойством: внутри описанной сферы  $S_i$  симплекса  $T_i$  не содержится точек исходного множества вершин  $X$ . Хорошо известно, что триангуляция Делоне выпуклой оболочки  $X$  существует для любого конечного множества в  $\mathbb{R}^n$  и является единственной, если это множество находится в общем положении. Для размерностей  $n = 2, 3$  известны достаточно эффективные алгоритмы построения триангуляций Делоне, в настоящее время реализованные в стандартных программных библиотеках. Более детальное рассмотрение триангуляции Делоне можно найти в книге [Edelsbrunner, 2006].

*Доказательство.* Пусть нумерация  $\{T_1, \dots, T_m\}$  согласована с проекциями центров описанных сфер  $\{S_1, \dots, S_m\}$  на направление  $\Omega$ . Если какая-то направленная прямая  $\ell$ , параллельная  $\Omega$ , пересекает внутренности симплексов в неправильном порядке, то она пересечет какие-то два примыкающих друг к другу симплекса в неправильном порядке. Пусть сначала  $\ell$  пересекает  $T_i$ , а потом  $T_j$ , но проекция центра  $S_j$  на  $\Omega$  идет раньше, чем проекция центра  $S_i$ .

Симплексы  $T_i$  и  $T_j$  примыкают друг к другу по гиперграни  $F$ . Обозначим соответствующие открытые полупространства, ограниченные гиперплоскостью, порожденной  $F$ , как  $H_i$  и  $H_j$ . Наша прямая  $\ell$  тогда идет сначала в  $H_i$ , а потом в  $H_j$ . Пусть вершина  $T_i$ , дополнительная к  $F$ , обозначена как  $v_i$ , а вершина  $T_j$ , дополнительная к  $F$ , обозначена как  $v_j$ . Очевидно  $v_i \in H_i$  и  $v_j \in H_j$ . Заметим, что точка  $v_i$  лежит на сфере  $S_i$  и за пределами сферы  $S_j$ , а точка  $v_j$  лежит на сфере  $S_j$  за пределами сферы  $S_i$  по свойству Делоне. Если обозначить центры сфер за  $o_i$  и  $o_j$ , то это означает неравенства (строгие из-за общего положения):

$$|o_i v_i| < |o_i v_j|, \quad |o_j v_j| < |o_j v_i|. \quad (2)$$

Так как множество центров сфер, проходящих через  $n$  вершин грани  $F$ , является прямой, перпендикулярной  $F$ , то вектор  $\overrightarrow{o_i o_j}$  направлен перпендикулярно  $F$ . Рассмотрим также открытые полупространства  $H'_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_i x| < |v_j x|\}$  и  $H'_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |v_j x| < |v_i x|\}$ . Их общая граница совпадает со средним перпендикуляром (гиперплоскостью) к отрезку  $v_i v_j$ . Неравенства (2) тогда означают, что  $o_i \in H'_i$  и  $o_j \in H'_j$ . Следовательно, угол между векторами  $\overrightarrow{v_i v_j}$  и  $\overrightarrow{o_i o_j}$  острый, так как проекция  $\overrightarrow{o_i o_j}$  на направление  $\overrightarrow{v_i v_j}$  оказалась направленной вдоль  $\overrightarrow{v_i v_j}$ .

Вектор  $\overrightarrow{o_i o_j}$  нормален к  $F$  и доказанное неравенство  $(\overrightarrow{v_i v_j}, \overrightarrow{o_i o_j}) > 0$  означает, что вектор  $\overrightarrow{o_i o_j}$  идет от  $H_i$  к  $H_j$  по нормали к их общей границе. Так как прямая  $\ell$  идет вдоль направления  $\Omega$  из  $H_i$  в  $H_j$ , то получается, что  $(\overrightarrow{o_i o_j}, \Omega) > 0$ . А это значит, что

$$(\Omega, \overrightarrow{o_i}) < (\Omega, \overrightarrow{o_j})$$

и симплекс  $T_i$  должен был идти раньше  $T_j$  в рассматриваемом порядке, а не так, как мы предположили вначале.

Условие общего положения в доказательстве важно. В противном случае некоторые центры  $o_i$  могут совпасть, и тогда невозможно будет решить, в каком порядке ставить соответствующие симплексы. Конечно, этот вопрос решается небольшим возмущением множества  $X$ . ■

## Численный алгоритм

Выполним триангуляцию области  $G$ . Будем считать, что это триангуляция Делоне. Если мы имеем заданную исходно триангуляцию, то выпуклую оболочку множества вершин триангулируем триангуляцией Делоне, что можно сделать практически всегда.

В каждом тетраэдре будем называть грани «входящими», если внешняя нормаль к этой грани  $n$  направлена против направления излучения  $\Omega$ , то есть  $(\Omega n) < 0$ . Грани тетраэдра, внешняя нормаль к которым находится в направлении излучения, то есть  $(\Omega n) \geq 0$ , будем называть «выходящими». Также далее будем называть характеристикой направленную прямую, параллельную вектору  $\Omega$ .

Формулировку алгоритма предварим следующими Леммой.

**Лемма 1.** *Рассмотрим произвольный тетраэдр триангуляции. Пусть известно значение интенсивности излучения в направлении  $\Omega$  на всех его входящих гранях. Тогда значение интенсивности излучения в произвольной точке этого тетраэдра, в том числе и на любой его выходящей грани, определяется решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \frac{dI(\Omega, x_0 + \Omega s)}{ds} + \kappa(x_0 + \Omega s)I(\Omega, x_0 + \Omega s) = \kappa(x_0 + \Omega s)I_e(x_0 + \Omega s), \\ I(\Omega, x_0) = I^*, \end{cases} \quad (3)$$

где  $I^*$  — значение интенсивности излучения в точке  $x_0$  пересечения характеристики с плоскостью входящей грани,  $s$  — координата вдоль характеристики. В случае если интенсивность равновесного излучения  $I_e$  и коэффициент поглощения  $\kappa$  постоянны внутри тетраэдра,

$$I(\Omega, x_0 + \Omega s) = I_e + (I^* - I_e)e^{-s\kappa}. \quad (4)$$

*Доказательство.* Характеристиками дифференциального уравнения (1) являются прямые  $x - x_0 = \Omega s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . На этих прямых уравнения в частных производных (1) превращаются в обыкновенные дифференциальные уравнения (3).

Задача (3) интегрируется аналитически:

$$I(\Omega, x_0 + \Omega s) = I^* e^{-\int_0^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi} + \int_0^s \kappa(x_0 + \Omega \zeta) I_e(x_0 + \Omega \zeta) e^{-\int_\zeta^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi} d\zeta. \quad (5)$$

Полагая  $I_e = \text{const}$  и замечая, что под знаком второго интеграла стоит полная производная, получаем

$$\begin{aligned} I(\Omega, x_0 + \Omega s) &= I^* e^{-\int_0^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi} + I_e \int_0^s \frac{d}{d\zeta} e^{-\int_\zeta^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi} d\zeta = \\ &= I^* e^{-\int_0^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi} + I_e \left( 1 - e^{-\int_0^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi} \right) = I_e + (I^* - I_e) \exp \left( - \int_0^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Полагая  $\kappa = \text{const}$ , получаем (4). Отметим, что величина  $I$  всегда находится в пределах от  $I^*$  до  $I_e$ , какова бы ни была оптическая толщина тетраэдра  $\int_0^s \kappa(x_0 + \Omega \xi) d\xi$ . ■

Отталкиваясь от доказанных леммы 1 и теоремы 1, сформулируем процедуру численного решения задачи (1). Эту процедуру будем называть «движение освещенной границы».

Как следует из леммы 1, чтобы построить численное решение задачи (1), достаточно построить его на каждой грани каждого тетраэдра. В каждом тетраэдре, на каждой грани решение будем приближать полиномами  $H(x_1, x_2, x_3)$  степени  $N$ . Задать такие полиномы удобно следующим способом. Пусть мы рассматриваем грань  $F$ . Наряду с координатным пространством  $(x_1, x_2, x_3)$  рассмотрим координатное пространство  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ . В этом пространстве определим стандартный тетраэдр с вершинами  $V_1 = (0, 0, 0)$ ,  $V_2 = (1, 0, 0)$ ,  $V_3 = (0, 1, 0)$ ,  $V_4 = (0, 0, 1)$ . Зададим невырожденное линейное отображение пространства  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  в пространство  $(x_1, x_2, x_3)$  так, чтобы грань стандартного тетраэдра  $\tilde{F}$ , задаваемая вершинами  $V_1, V_2, V_3$ , при этом отображалась в грань  $F$ . Задавая на грани  $\tilde{F}$  полином  $\tilde{H}(\eta_1, \eta_2)$  степени  $N$ , от переменных  $\eta_1, \eta_2$ , мы тем самым определим на грани  $F$  полином  $H(x_1, x_2, x_3) = \tilde{H}(\eta_1(x_1, x_2, x_3), \eta_2(x_1, x_2, x_3))$  степени  $N$ , от переменных  $x_1, x_2, x_3$ . Зададим на грани  $\tilde{F}$  систему линейно независимых полиномов  $\tilde{H}_m(\eta_1, \eta_2)$ ;  $m = 1, \dots, M$ ;  $M = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$ . Полиномы  $H_m(x_1, x_2, x_3) = \tilde{H}_m(\eta_1(x_1, x_2, x_3), \eta_2(x_1, x_2, x_3))$  также линейно независимы и образуют базис. Значение интенсивности излучения в направлении  $\Omega$  на грани можем приблизить в виде

$$I(\Omega, x_1, x_2, x_3) = \sum_{m=1}^M H_m(x_1, x_2, x_3) I^m(\Omega). \quad (7)$$

Аппроксимирующие свойства системы полиномов  $H_m(x_1, x_2, x_3)$  эквивалентны аппроксимирующим свойствам полиномов  $\tilde{H}_m(\eta_1, \eta_2)$ . Систему линейно независимых полиномов  $H_m(x_1, x_2, x_3)$  (или, что тоже самое, полиномов  $\tilde{H}_m(\eta_1, \eta_2)$ ) можно определить разными способами. Некоторые из них мы рассмотрим ниже.

### Вариант 1

Определим на грани  $\tilde{F}$  стандартного тетраэдра  $M$  различных точек, узлов интерполяции  $(\eta_1^m, \eta_2^m)$ . Тем самым мы определим  $M$  узлов интерполяции  $(x_1^m, x_2^m, x_3^m) = (x_1(\eta_1^m, \eta_2^m), x_2(\eta_1^m, \eta_2^m), x_3(\eta_1^m, \eta_2^m))$  на грани  $F$ . С каждым узлом интерполяции  $(\eta_1^m, \eta_2^m)$  свяжем базисный интерполяционный полином  $\tilde{H}_m(\eta_1, \eta_2)$ , то есть полином степени  $N$ , который принимает значение 1 в этой точке и равен 0 во всех остальных узлах интерполяции. Тогда соотношение  $H_m(x_1, x_2, x_3) = \tilde{H}_m(\eta_1(x_1, x_2, x_3), \eta_2(x_1, x_2, x_3))$  определит систему базисных интерполяционных полиномов по узлам интерполяции  $(x_1^m, x_2^m, x_3^m)$ .

Таким образом, чтобы построить численное решение задачи (1) по формуле (5), достаточно знать значение интенсивности излучения  $I^m(\Omega)$  в каждом узле интерполяции  $(x_1^m, x_2^m, x_3^m)$  на каждой грани каждого тетраэдра.

Для этого реализуем следующую процедуру. Упорядочим все тетраэдры по проекции их центров описанных сфер на направление  $\Omega$ . По указанному порядку определим интенсивность излучения в узлах интерполяции на всех гранях каждого тетраэдра. Рассмотрим очередной тетраэдр  $T$ . Значения интенсивности излучения в узлах интерполяции на его входящих гранях или определяются из граничных условий, если эта грань является граничной, или равны значениям в этих же точках на выходящей грани тетраэдра, примыкающего по этой грани. Но значения в узлах интерполяции на всех гранях этого тетраэдра уже определены на предыдущих шагах, так как этот тетраэдр в соответствии с теоремой 1 предшествует в построенном упорядочивании. Для того чтобы определить значения в узлах интерполяции на выходящих гранях тетраэдра  $T$ , через каждый узел проведем характеристику и определим точку  $x^*$  ее пересечения с входящей гранью этого тетраэдра. Значение интенсивности излучения в узлах интерполяции на этой входящей грани уже известны. Тогда значение интенсивности излучения  $I^*$  в точке  $x^*$  на входящей

границ можно вычислить по формуле (7). Далее используя (5) или (6), если  $I_e = \text{const}$  внутри тетраэдра, вычисляем значение интенсивности излучения в указанном узле выходящей грани тетраэдра  $T$ . В итоге мы определим значение интенсивности излучения в каждом узле интерполяции на каждой грани каждого тетраэдра, что, как указано выше, достаточно для построения решения в области, равной объединению всех тетраэдров.

Точность построенного решения определяется степенью интерполяционных полиномов (или, что то же самое, количеством узлов интерполяции на каждой грани). Алгоритм позволяет единообразно строить численные решения задачи (1) произвольного порядка точности.

При реализации алгоритма существенным является объем необходимой памяти. Для определения решения описанным выше способом необходимо задать на каждой грани каждого тетраэдра триангуляции  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$  значений интенсивности излучения в узлах интерполяции. Если обозначить через  $K$  — количество тетраэдров в триангуляции, и учесть, что почти каждая грань одновременно принадлежит двум тетраэдрам, то количество значений, которые необходимо хранить, можно оценить как

$$C_1 \approx K(N+1)(N+2).$$

## Вариант 2

Этот вариант отличается от варианта 1 только тем, что узлы интерполяции на гранях тетраэдров триангуляции мы выбираем не произвольно, а располагаем их на ребрах тетраэдров. Это особенно легко сделать, если степень полиномов  $N$  не кратна 3. Тогда на каждой грани 3 узла интерполяции мы помещаем в вершины треугольника и  $\frac{1}{3} \left( \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 3 \right)$  точек на каждом ребре треугольника. Легко видеть, что если  $N$  не кратно 3, то  $\frac{1}{3} \left( \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 3 \right)$  — натуральное число. В остальном алгоритм полностью повторяет вариант 1.

Для определения решения описанным выше способом необходимо задать на каждой грани каждого тетраэдра  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$  значений интенсивности излучения в узлах интерполяции. Если предположить, что к каждому ребру примыкает в среднем 5 тетраэдров триангуляции и к каждой вершине примыкает в среднем 22 тетраэдра, что характерно для случая достаточно качественной триангуляции, то количество значений, которые необходимо хранить, можно оценить как

$$C_2 \approx \frac{2K}{11} + \frac{4K}{5} \left( \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 3 \right).$$

## Дополнительные замечания

Прежде, чем переходить к тестовым примерам, сделаем несколько дополнительных замечаний.

Очевидно, что ключевым фактором, обеспечивающим корректность алгоритма, является возможность в случае триангуляции Делоне так упорядочить тетраэдры, что любая направленная прямая с направляющим вектором  $\Omega$  будет пересекать внутренности тетраэдров в соответствии с их порядком. Естественно задаться вопросом, какие еще разбиения исходной области позволяют построить такое упорядочивание?

Приведенная выше теорема 1 может быть обобщена с помощью менее наглядного рассуждения.

**Теорема 2.** Пусть выпуклая оболочка конечного множества  $X \subset \mathbb{R}^n$  триангулирована обобщенной триангуляцией Делоне  $\{T_1, \dots, T_m\}$  с вершинами в данном множестве  $X$  и весами  $\{w(x)\}_{x \in X}$ . Тогда для всякого направления  $\Omega$  можно упорядочить симплексы триангуляции так, что любая направленная прямая с направляющим вектором  $\Omega$  будет пересекать внутренности симплексов только в соответствии с их порядком. В данной теореме требуется общее положение в том смысле, что среди точек  $(x, |x|^2 - w(x)^2) \in \mathbb{R}^{n+1}$  никакие  $n + 2$  не лежат в одной гиперплоскости.

*Доказательство.* Обобщенная триангуляция Делоне по определению является проекцией «нижней» части выпуклой оболочки множества

$$\tilde{X} = \{(x, |x|^2 - w(x)^2) : x \in X\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

на координатное пространство  $\mathbb{R}^n$ . Иначе говоря, в терминах [Karasev, Hubard, Aronov, 2013], мы можем найти линейные на  $\mathbb{R}^n$  функции  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  так, что

$$T_i = \{x \in \text{conv}X : \forall j \neq i \quad \lambda_i(x) \geq \lambda_j(x)\}.$$

Тогда легко заметить, функция

$$f(x) = \sup_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(x)$$

выпукла на  $X$  и симплексы  $T_i$  — это области, на которых она линейна. Тогда упорядочим симплексы  $T_i$  по возрастанию соответствующих им производных по направлению  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \Omega}$ . Ясно, что вдоль всякой прямой  $\ell$ , направленной вдоль  $\Omega$ , функция  $f(x)$  является выпуклой и ее производная  $\frac{\partial f}{\partial \Omega}$  при движении по  $\ell$  возрастает. Но производная  $\frac{\partial f}{\partial \Omega}$  внутри  $T_i$  равна  $\frac{\partial \lambda_i}{\partial \Omega}$ , поэтому получается, что прямая  $\ell \parallel \Omega$  проходит все симплексы  $T_i$  в правильном порядке.

Заметим, что если обобщенная триангуляция Делоне задана, то функции  $\lambda_i$  просто находятся линейной интерполяцией функции  $|x|^2 - w(x)^2$  с вершин симплекса. Таким образом, при наличии обобщенной триангуляции Делоне упорядочивание эффективно вычисляется. ■

Аналогично доказывается и следующая:

**Теорема 3.** Если  $\mathbb{R}^n$  разбито на части  $V_1, \dots, V_N$  обобщенным разбиением Вороного, то для всякого направления  $\Omega$  можно упорядочить части так, что любая направленная прямая с направляющим вектором  $\Omega$  будет пересекать внутренности частей только в соответствии с их порядком.

*Доказательство.* Следуя [Karasev, Hubard, Aronov, 2013], опишем части обобщенного разбиения Вороного с помощью набора линейных функций  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$  как

$$V_i = \{x \in \text{conv}X : \forall j \neq i \quad \lambda_i(x) \geq \lambda_j(x)\}. \tag{8}$$

Действительно, классическое определение обобщенного разбиения Вороного использует такую же формулу, но с квадратичными функциями  $\kappa_i(x) = w(x_i)^2 - |x - x_i|^2$ . Однако все эти квадратичные функции  $\kappa_i$  содержат одну и ту же однородную квадратичную часть  $-|x|^2$ , которую можно вычесть из них и получить линейные функции

$$\lambda_i(x) = w(x_i)^2 - |x_i|^2 + 2(x, x_i).$$

Далее доказательство аналогично доказательству теоремы 2. ■

Теоремы 2 и 3 также по сути известны из работы [Edelsbrunner, 1990], но приведенные здесь доказательства короче и, на наш взгляд, понятней.

Какие разбиения пространства  $\mathbb{R}^n$  или выпуклого тела  $K \subset \mathbb{R}^n$  обладают свойством упорядоченности вдоль любого направления? На плоскости ( $n = 2$ ) любые выпуклые разбиения обладают этим свойством, этот факт часто передоказывался разными авторами. В размерностях начиная с  $n = 3$  не всякое выпуклое разбиение упорядочено, это тоже известный факт (см., например, [Edelsbrunner, 1990]), про который трудно сказать, когда он был обнаружен впервые.

На самом деле, свойство ацикличности можно распространить и далее — на всякое «индуктивное» разбиение  $\mathbb{R}^n$ . Разбиение  $\mathbb{R}^n = V_1 \cup \dots \cup V_N$  на выпуклые множества называется *индуктивным*, если для любого  $V_i$  существует индуктивное же разбиение на выпуклые множества  $W_1, \dots, W_{i-1}, W_{i+1}, \dots, W_N$ , для которого  $V_j \in W_j$  при всяком  $j \neq i$ . Это понятие введено в [Акопян, Карасев, 2012], там же отмечено, что выражение (8), очевидно, влечет индуктивность обобщенного разбиения Вороного.

**Теорема 4.** *Если  $\mathbb{R}^n$  разбито на части  $V_1, \dots, V_N$  индуктивным разбиением, то для всякого направления  $\Omega$  можно упорядочить части так, что любая направленная прямая с направляющим вектором  $\Omega$  будет пересекать внутренности частей только в соответствии с их порядком.*

*Доказательство.* Доказываем по индукции. Рассмотрев начало ориентированной прямой  $\ell$  в заданном направлении, мы найдем множество нашего разбиения, которое содержит ее начальный бесконечный сегмент. Если такое множество не одно, то прямую можно подвинуть и сделать его единственным. Такое множество пересекает всякую прямую в направлении  $\Omega$  по бесконечному начальному лучу и значит должно быть первым в данном порядке. Далее, применим определение индуктивности разбиения, удалим это множество и упорядочим остальное по предположению индукции. Добавим удаленное множество обратно первым в порядок. Очевидно, что получится правильный порядок. ■

## Тестовый пример

В качестве тестового примера для исследования предложенного алгоритма рассмотрим задачу об излучающем шаре: в области с коэффициентом поглощения  $\kappa_{out} = 1$  и интенсивностью равновесного излучения равной 0 находится излучающий шар. Радиус шара  $R = 0.3$ , коэффициент поглощения внутри шара  $\kappa_{in} = 10$ , интенсивность равновесного излучения внутри шара  $I_e = 10$ . Необходимо найти плотность энергии в любой точке, лежащей вне или внутри шара. Задача сферически симметричная, и для нее можно выписать аналитическое решение [Скалько, Мендель, 2013].

$$U(r) = I_e \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 - e^{-\kappa_{in} \left( 2\sqrt{R^2 - r^2(1-\mu^2)} \right)} \right) e^{-\kappa_{out} \left( r\mu - \sqrt{R^2 - r^2(1-\mu^2)} \right)} d\mu, & r \geq R, \\ \int_0^1 \left( 1 - \operatorname{ch}(\kappa_{in} r\mu) e^{-\kappa_{in} \sqrt{R^2 - r^2(1-\mu^2)}} \right) d\mu, & r < R, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\mu$  — косинус угла между радиус-вектором из центра шара и направлением излучения  $\Omega$ , а  $U(r)$  — плотность энергии излучения, задаваемая формулой

$$U(x) = \frac{1}{4\pi} \int I(\Omega, x) d\Omega.$$

В численном методе для вычисления  $U(r)$  будем использовать квадратурные формулы, построенные в [Лебедев, Лайков, 1998]. Для этого независимо вычислим интенсивности излучения для различных направлений лучей и просуммируем с соответствующими весами квадратурной формулы.

Для построения решения использовались линейные полиномы. Алгоритм был реализован в однопроцессорном варианте.

Исследуем метод на сеточную сходимость. В таблице 1 представлена зависимость абсолютной погрешности численного метода  $\varepsilon$ , которая вычислялась как средняя по всем узлам сетки абсолютная величина разности между численным решением и точным, от количества узлов  $N$  сетки триангуляции.

Таблица 1. Сходимость по пространственной сетке

$N$	2319	10706	17394	76691
$\varepsilon$	0.1177	0.0422	0.0314	0.0185

На рисунке 1 по данным таблицы 1 изображен график погрешности в логарифмическом масштабе.

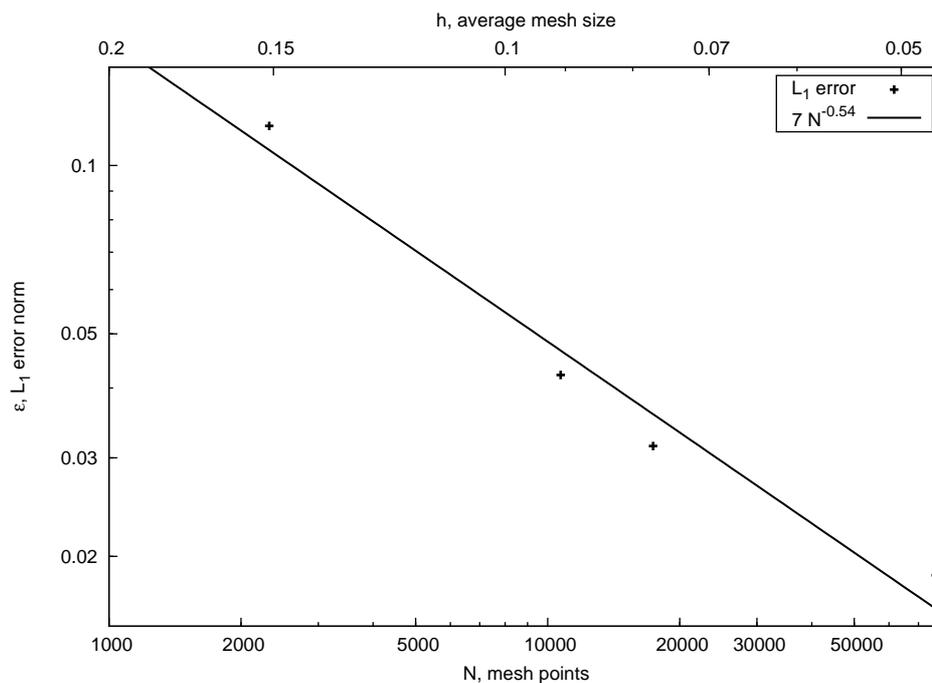


Рис. 1. График погрешности в зависимости от размера пространственной сетки

Коэффициент наклона линии тренда равен 0.54, исходя из этого, можно сделать вывод, что на данной задаче метод сходится с порядком 1.62, то есть  $\varepsilon \sim N^{-0.54} \sim h^{1.62}$ .

Оценим качество численного решения в сравнении с точным решением, на прямой, проходящей через центр излучающего шара, параллельно оси  $Ox$  при различной сетке. На рисунке 2 точное решение изображено непрерывной линией, а численное — пунктирной линией. Расчет проведен соответственно на сетке из 2319, 10706, 17394, 76691 вершин тетраэдров.

На рисунке 2 видно, что численное решение хорошо соответствует точному решению даже на грубой сетке. Кроме того, качество решения сохраняется и в области скачка коэффициента

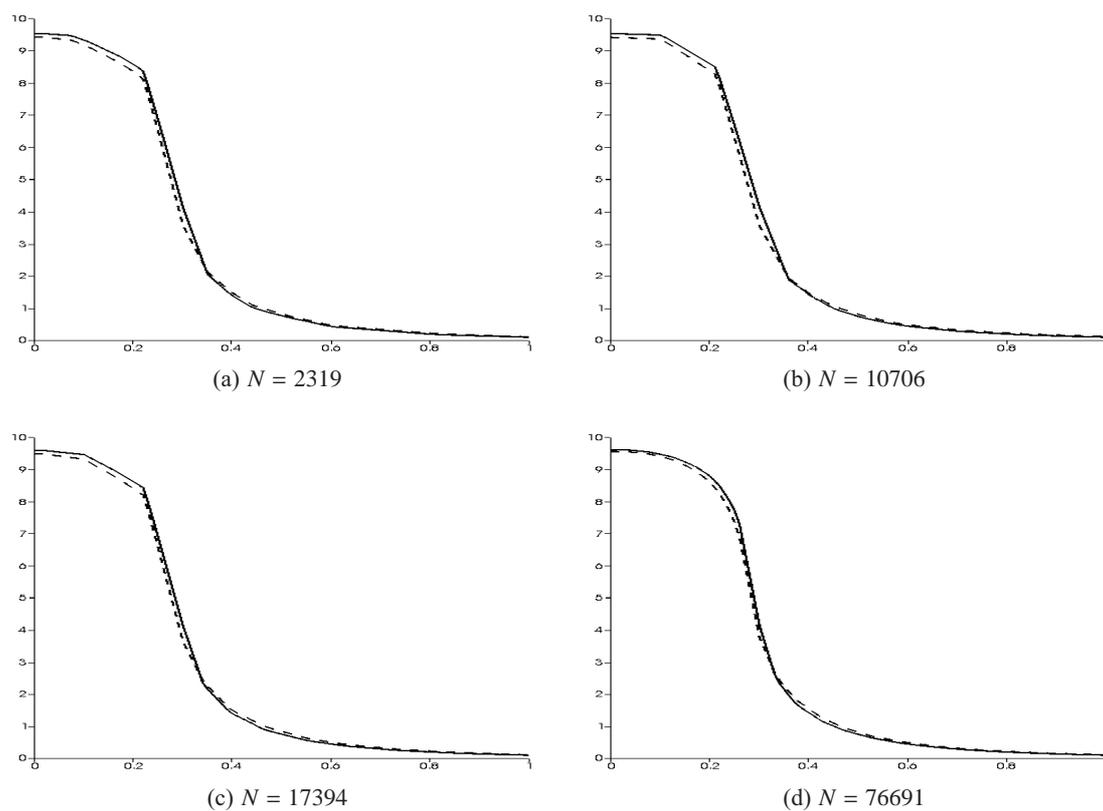


Рис. 2. Графики одномерного сечения решений на различных сетках

рассеяния, а следовательно, большого градиента интенсивности (область рядом с координатой  $R = 0.3$  на оси абсцисс).

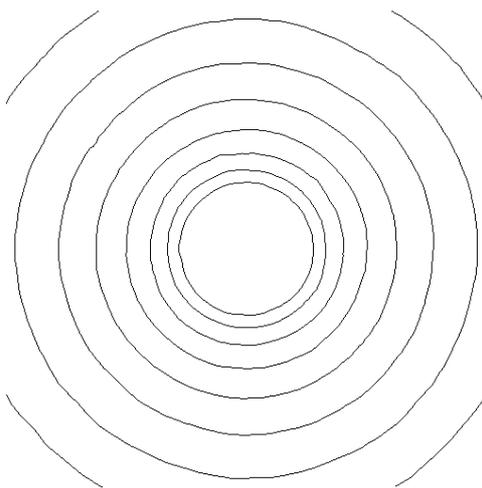


Рис. 3. Изолинии плотности энергии излучения в центральном сечении

На рисунке 3 показаны изолинии решения в плоскости, перпендикулярной оси  $Ox$  и проходящей через центр шара. Видно, что изолинии с хорошей точностью являются концентрическими окружностями, что соответствует физике процесса.

Перейдем к исследованию сходимости алгоритма по угловым функциям. Будем проводить расчет на сетке из 17394 узлов, изменяя количество направлений излучения.

Таблица 2. Сходимость по угловой сетке

$N_{\Omega}$	6	14	26	50	110	194
$\varepsilon$	0.1378	0.0858	0.049	0.0335	0.0314	0.0314

В таблице 2 указана величина абсолютной погрешности  $\varepsilon$  в зависимости от числа угловых направлений  $N_{\Omega}$ .

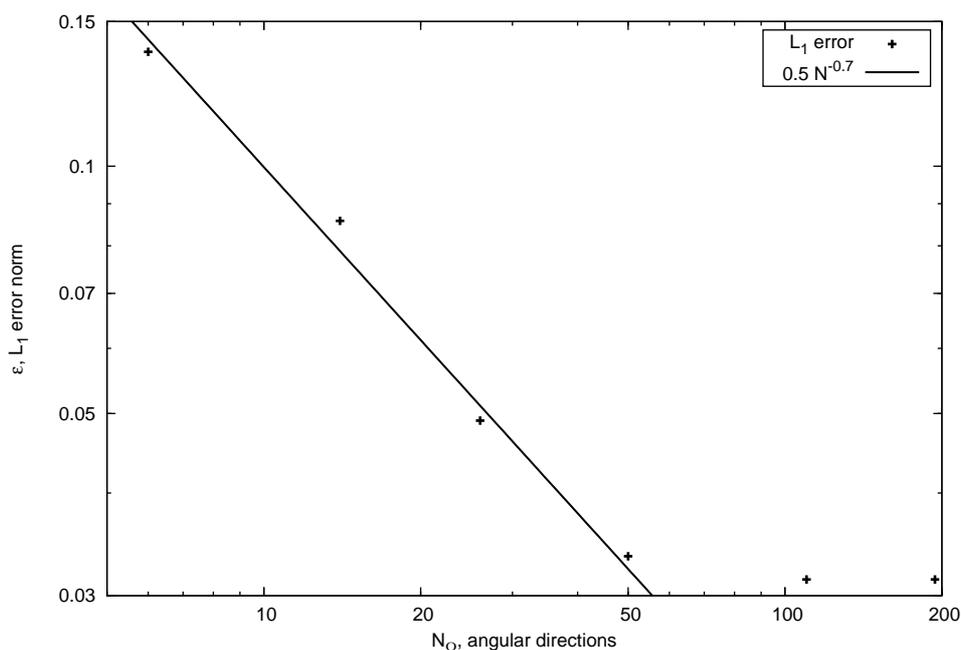


Рис. 4. График погрешности в зависимости от количества угловых направлений

На рисунке 4 изображен график погрешности в логарифмическом масштабе. Видно, что при числе угловых направлений больше либо равном 50 наступает насыщение, и погрешность практически не уменьшается. Точку насыщения можно отдалить измельчением сетки. По наклону линии тренда можно определить, что порядок сходимости метода по угловым направлениям равен 0.7, то есть  $\varepsilon \sim N_{\Omega}^{-0.7}$ .

На рисунке 5 изображена плотность энергии излучения вдоль оси  $Ox$ . Непрерывной линией изображено точное решение, ромбами, квадратами и кругами показано численное решение соответственно для 6, 14 и 26 направлений. Решения при 14 и 26 направлений практически совпадают, за исключением области большого градиента.

## Заключение

Согласно проведенному исследованию, можно сделать следующие выводы. Предложенный алгоритм является маршевым, то есть в определенной последовательности вычисляются все необходимые значения. Это является безусловным преимуществом перед другими алгоритмами, в которых построение численного решения сводится к решению СЛАУ.

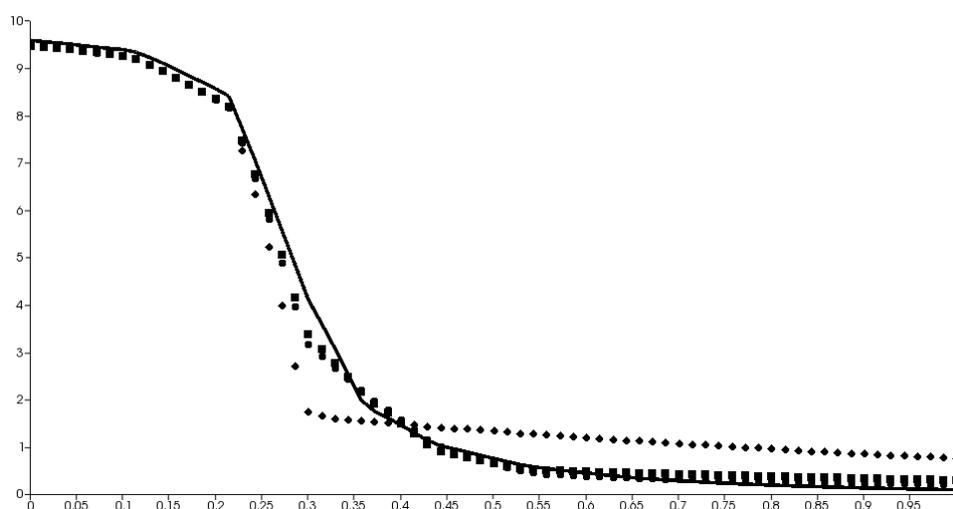


Рис. 5. Сравнение решений при разном количестве угловых направлений

Предложенный алгоритм теоретически позволяет строить численные решения произвольно высокого порядка аппроксимации по пространственным переменным. При этом возможно такое построение алгоритма, при котором увеличение порядка аппроксимации не влечет увеличения необходимой памяти. В этом случае количество значений, которые должны быть вычислены и сохранены при реализации алгоритма, равно количеству узлов сетки триангуляции, что в  $\sim 5.5$  раз меньше количества тетраэдров. Это выгодно отличает алгоритм от других, например от *discontinuous* алгоритмов. В *discontinuous* алгоритмах решение аппроксимируется полиномами в каждом тетраэдре. Поэтому количество значений, которые должны быть вычислены и сохранены, пропорционально количеству тетраэдров и растет как куб от степени полиномов.

Проведенные тесты показали, что численный алгоритм, построенный на линейных полиномах, сходится как по пространственным, так и по угловым переменным и позволяет достигнуть хорошего приближения к точному решению, в том числе и в областях большого градиента искомой функции.

Следует отметить, что поскольку расчет ведется по каждому угловому направлению независимо, то приведенный алгоритм допускает распараллеливание по направлениям распространения излучения.

## Список литературы

- Басс Л. П., Быков А. В., Дергачев А. А. и др. Моделирование распространения оптического излучения в фантоме биологической ткани на супер ЭВМ МВС 1000 // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18, № 1. — С. 29–42.
- Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИАН СССР. — 1961. — С. 3–158.
- Галанин М. П., Лукин В. В. Разностная схема для решения двумерных задач идеальной МГД на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. — 2007. — № 50. — 29 с.
- Галанин М. П., Лукин В. В., Четкин В. М. Радиационное ускорение порций вещества в аккреционных воронках около астрофизических объектов // Астрономический журнал. — 1999. — Т. 76, № 2. — С. 143–160.

- Галанин М. П., Лукин В. В., Чечеткин В. М. Математическое моделирование струйных выбросов в окрестности компактных объектов // *Астрономический журнал*. — 2009. — Т. 86, № 4. — С. 331–344.
- Галанин М. П., Лукин В. В., Чечеткин В. М. Методы решения уравнения переноса излучения для астрофизических моделей // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН*. — 2010. — № 59. — 30 с.
- Лебедев В. И., Лайков Д. Н. Квадратурная формула для сферы 131-го алгебраического порядка точности // *Доклады академии наук*. — 1999. — Т. 366, № 6. — С. 741–745.
- Скалько Ю. И., Мендель М. А. Применение аппарата обобщенных функций для построения приближенных решений задачи переноса излучения // *Труды МФТИ*. — 2013. — Т. 5, № 4. — с. 133–144.
- Четверушкин Б. Н. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. — М.: Наука, 1985. — 304 с.
- Akopyan A. V., Karasev R. N. Kadets type theorems for partitions of a convex body // *Discrete and Computational Geometry*. — 2012. — V. 48, No. 3 — P. 766–776.
- Basko M. M., Maruhn J., Tauschwitz A. RALEF-2D: A 2D hydrodynamic code with heat conduction and radiation transport. II. Solution of the radiation transfer equation. — 2009. — GSI, Darmstad.
- Edelsbrunner H. An acyclicity theorem for cell complexes in d dimensions // *Combinatorica* — 1990. — V. 10. — P. 251–260.
- Edelsbrunner H. *Geometry and Topology for Mesh Generation*. — Cambridge University Press, 2006. — 190 p.
- Karasev R. N., Hubard A., Aronov B. Convex equipartitions: the spicy chicken theorem // *Geometriae Dedicata*. — 2013. — DOI:10.1007/s10711-013-9879-5, arXiv:1306.2741.
- Nikolaeva O. V., Bass L. P., Germogenova T. A. et al. Radiative transfer in horizontally and vertically inhomogeneous turbid media // *Light Scattering Reviews 2*. — Berlin Heidelberg: Springer — 2007. — P. 295–347.
- Ohsuga K. Two-dimensional Radiation-hydrodynamic Model for Supercritical Disk Accretion Flows onto Neutron Stars // *Publ. Astron. Soc. Japan*. — 2007. — V. 59, No. 5. — P. 1033–1042.
- Tajima Y., Fukue J. Radiative Disk Winds under Radiation Drag II // *Publ. Astron. Soc. Japan*. — 1998. — V. 50. — P. 483–493.
- Zhao J. M., Liu L. H. Discontinuous spectral element method for solving radiative heat transfer in multidimensional semitransparent media // *Journal of Quantitative Spectroscopy*. — 2007. — V. 107. — P. 1–16.