

УДК: 519.63

## К вопросу о решении сопряженной задачи газовой динамики, воспламенения и горения порохов в условиях артиллерийского выстрела

И. Г. Русяк, М. А. Ермолаев

Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова,  
факультет «Математика и естественные науки»,  
Россия, 426069, г. Ижевск, ул. Студенческая, д. 7

E-mail: primat@istu.ru, michael6@yandex.ru

Получено 9 сентября 2013 г.

Рассмотрен численный алгоритм решения задачи воспламенения и нестационарного горения порохов на равномерной расчетной сетке, а также на сетке со сгущением вблизи поверхности горения при постоянной и подстраивающейся под глубину прогретого слоя области расчета. Приведен анализ эффективности рассмотренных расчетных сеток.

Ключевые слова: воспламенение, нестационарность, горение, адаптивная разностная сетка, численные методы

### On the solution of the adjoint problem of gas dynamics, ignition and combustion of gunpowder in terms of artillery shot

I. G. Rusyak, M. A. Ermolaev

*Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,  
7 Studencheskaya st., Izhevsk, 426069, Russia*

**Abstract.** — This article is dedicated to numerical algorithms for solving problems of ignition and unsteady combustion of gunpowder on a uniform computational grid, and a grid with concentration near the surface of the combustion at a constant and adapts the depth under the heated layer of computational domain. The analysis of efficiency of a numerical grid.

Keywords: ignition, unsteadiness, combustion, adaptive difference grid, numerical methods

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 99–106 (Russian).

## Введение

В работах [Липанов, 1986; Русяк, 2011; Русяк, 2012] показано, что после воспламенения последующий процесс горения пороха в орудии имеет резко нестационарный характер. Максимально этот эффект проявляется на начальной стадии процесса выстрела, которая оказывает существенное влияние на его динамику. При этом можно выделить две задачи: задачу газовой динамики (макрозадачу) и задачу нестационарного и эрозионного горения пороха (микрозадачу). Задача горения решается в тонком поверхностном слое пороха, и ее пространственные и временные масштабы существенно отличаются от соответствующих масштабов задачи баллистики, что ведет к необходимости увязки временных шагов рассматриваемых взаимосвязанных задач.

Задачу воспламенения и горения пороха будем рассматривать в рамках твердофазной локальной модели нестационарного горения, предложенной в [Липанов, Русяк, 1986], в рамках которой процесс воспламенения и последующего горения определяется значением глубины выгорания пороха на его поверхности. Данная модель справедлива в системе координат, связанной с подвижным пороховым элементом. Учитывая, что временные масштабы задачи горения существенно меньше временных масштабов задачи баллистики, задача горения многократно решается в пределах одного временного слоя макрозадачи вдоль каждой из  $K$  траекторий (рис. 1).

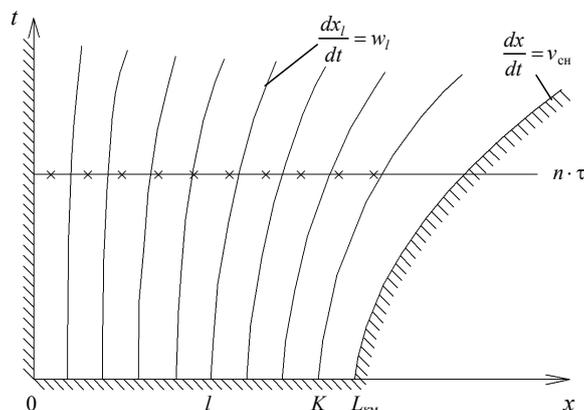


Рис. 1. Семейство траекторий движения  $l = \overline{1, K}$  пороховых элементов в процессе выстрела:  $t$  — временная координата,  $x$  — пространственная координата,  $\tau$  — шаг по времени,  $w_l$  — скорость движения порохового элемента по  $l$ -ой траектории,  $v_{сн}$  — скорость движения снаряда,  $L_{км}$  — длина камеры артиллерийской установки

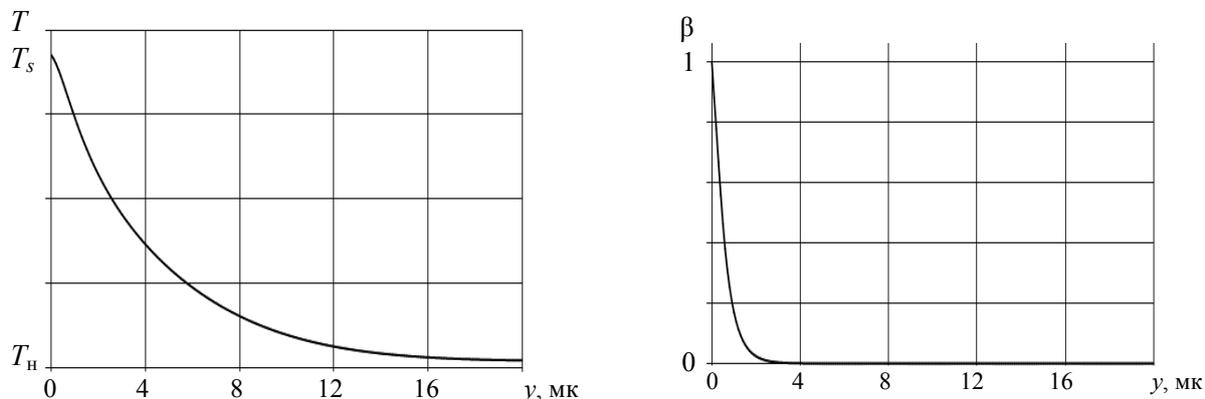


Рис. 2. Характер распределения температуры и глубины выгорания:  $T$  — температура поверхности пороха,  $y$  — пространственная координата, направленная в глубину пороха;  $\beta$  — глубина выгорания,  $T_s$  — температура поверхности пороха в момент воспламенения,  $T_n$  — начальная температура пороха

В процессе воспламенения и горения пороха вблизи поверхности имеют место высокие значения градиентов температуры и глубины выгорания (см. рис. 2), что вынуждает вводить расчетную сетку с большим числом разбиений для обеспечения требуемой точности расчета. Кроме того, глубина прогреваемого слоя в процессе выстрела с ростом давления изменяется (уменьшается) на порядки, что также влияет на точность. В этой связи предлагается ввести неравномерную расчетную сетку, адаптированную к переменной глубине расчетной области.

## Преобразование системы координат

Как показывают расчеты, зависимости  $T(y, t)$  и  $\beta(y, t)$  имеют экспоненциальный по координате характер, поэтому осуществим преобразование физической плоскости  $(y, t)$  в расчетную  $(\eta, t)$  по формуле

$$y = A(e^\eta - 1). \quad (1.1)$$

Исходя из формулы преобразования пространственной переменной, имеем

$$dy = Ae^\eta d\eta,$$

откуда

$$\Delta y_0 = Ah, \Delta y_m = Ae^{\eta_m} h.$$

Обозначим отношение наибольшего шага интегрирования к наименьшему в физической плоскости  $\frac{\Delta y_m}{\Delta y_0} = e^{\eta_m} = M$ ,  $A = \frac{y_m}{M-1}$ , выбирая в плоскости  $(\eta, t)$  равномерный шаг  $h = \ln M/N$ , где  $N$  — число разбиений сетки, получаем сгущение узлов сетки вблизи поверхности горения.

Глубину расчетной области предлагается адаптировать к глубине прогреваемого слоя. Расширение области расчета производится в момент, когда температура пороха в предпоследней ячейке превышает  $\Delta T = \varepsilon T_n$ , где  $\varepsilon = 0,0001$ . Сужение области происходит аналогично. При изменении размеров области расчета новые сеточные функции определяются интерполированием с использованием кубических сплайнов.

## Математическая модель воспламенения и нестационарного горения

Математическая модель нестационарного горения с учетом допущений о квазистационарности процессов в химическом пограничном слое и значении глубины выгорания  $\beta$  на поверхности горения, равно единице ( $\beta_s = \beta_* = 1$ ) в системе координат  $(\eta, t)$  имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{A^2 e^{2\eta}} \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \left( \frac{u}{Ae^\eta} - \frac{\kappa}{A^2 e^{2\eta}} \right) \frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{Q}{c} \Phi(T), \quad (1.2)$$

$$u = A \int_0^\infty e^\eta K_0 \exp\left(-\frac{E}{R_0 T}\right) d\eta.$$

В довоспламенительный период для  $\beta$  решается уравнение

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \Phi(T). \quad (1.3)$$

Критерием воспламенения является

$$\beta_s = \beta_* = 1. \quad (1.4)$$

Начальные и граничные условия имеют вид

при  $t = 0, \eta \geq 0$ :  $T = T_n, \beta = 0$ ; при  $\eta = 0, t \geq 0$ :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} = A \begin{cases} \alpha_T (T_n - T_s), & \text{если } \beta_s < \beta_*, \\ q_s - (c_p - c) m T_s - pm \left( \alpha - \frac{1}{\delta} \right), & \text{если } \beta_s = \beta_*; \end{cases} \quad (1.5)$$

при  $\eta = \infty, t \geq 0$ :  $T = T_n \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} = 0 \right), \beta = 0 \left( \frac{\partial \beta}{\partial \eta} = 0 \right)$ .

Уравнение теплопроводности аппроксимировалось по схеме Кранка–Никольсона и решалось методом прогонки [Самарский, Гулин, 1989]. Интегральное уравнение системы (1.2) решалось методом Симпсона [Самарский, Гулин, 1989].

## Порядок исследования

Исследование разбивалось на три этапа:

1. Моделирование процесса прогрева пороха без учета тепловыделения от химических реакций.

Проверялась точность расчетной модели для различных типов расчетных сеток путем сравнения с аналитическим решением уравнения теплопроводности [Лыков, 1967]:

$$T_3 = T_n + (T_c - T_n) \left( 1 - \exp \left( - \frac{\kappa \alpha^2}{\lambda^2} t_3 \right) \Phi^* \left( \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\kappa t_3} \right) \right). \quad (1.5)$$

На основании полученных результатов выбирались тип и характеристики расчетной сетки, результаты расчета на которой принимались в качестве «эталонных» в дальнейших исследованиях.

2. Моделирование процесса прогрева пороха с учетом тепловыделения от химических реакций.

В качестве контрольного параметра выступала температура поверхности пороха в момент воспламенения.

3. Моделирование процесса воспламенения и нестационарного эрозийного горения пороха.

В качестве контрольных параметров выступали линейная скорость горения пороха после выхода процесса горения на стационарный режим ( $u^0$ ) и отклонение текущих значений скорости горения от «эталонных» значений с момента воспламенения до момента выхода процесса горения на стационарный режим.

## Результаты численных расчетов

Численное моделирование процесса прогрева и горения проводилось для пироксилинового пороха при температуре обдувающего потока  $T_n = 2500$  К и коэффициенте теплообмена  $\alpha = 5000$  Дж/(м с К).

Сравнивались результаты расчетов, проводимых на четырех типах сеток:

- 1) равномерной;
- 2) равномерной с адаптацией расчетной области под глубину прогретого слоя;
- 3) неравномерной;
- 4) неравномерной с адаптацией расчетной области под глубину прогретого слоя.

Результаты численного моделирования первого этапа представлены в таблице 1. Установлено, что имеет место сходимость расчетных данных к аналитическому решению (1.5) (см. рис. 3). Лучшие показатели точности имеет неравномерная адаптивная сетка.

Таблица 1. Результаты моделирования процесса прогрева пороха

N	Параметр	Тип сетки			
		равномерная	равномерная адаптивная	неравномерная	неравномерная адаптивная
10	$\varepsilon, \%$	0.63	0.36	0.19	0.03
	$T_s, K$	814.9	812.73	811.33	810.04
20	$\varepsilon, \%$	0.22	0.06	0.05	0.02
	$T_s, K$	811.53	810.23	810.20	809.96
50	$\varepsilon, \%$	0.02	0.01	0.007	0.003
	$T_s, K$	809.96	809.88	809.86	809.83
100	$\varepsilon, \%$	0.004	0.002	0.002	0.001
	$T_s, K$	809.83	809.82	809.82	809.81

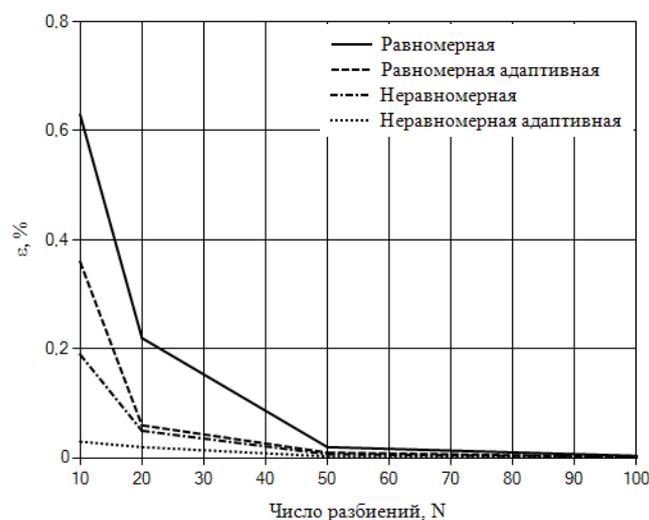


Рис. 3. Зависимость погрешности расчета от числа разбиений

На втором этапе, ввиду отсутствия аналитического решения, за «эталонные» значения принимались результаты, полученные на адаптивной сетке со сгущением вблизи поверхности горения с числом разбиений  $N = 100$ . Как видно из таблицы 2, расчетные сетки со сгущением обеспечивает хорошую точность и при учете тепловыделения от химических реакций.

Таблица 2. Результаты моделирования процесса прогрева пороха с учетом тепловыделения от химических реакций

N	Параметр	Тип сетки			
		равномерная	равномерная адаптивная	неравномерная	неравномерная адаптивная
10	$\varepsilon, \%$	32.87	18.86	0.33	0.08
	$T_s, K$	1257.95	1125.31	949.87	947.50
20	$\varepsilon, \%$	23.66	6.89	0.07	0.02
	$T_s, K$	1170.75	1012.00	947.41	946.94
50	$\varepsilon, \%$	14.17	1.72	0.02	0.004
	$T_s, K$	1080.90	963.02	946.94	946.79
100	$\varepsilon, \%$	3.47	0.23	0.002	0.0
	$T_s, K$	979.60	948.93	946.77	946.75

Характер изменения погрешности для различных типов расчетных сеток представлен на рисунке 4.

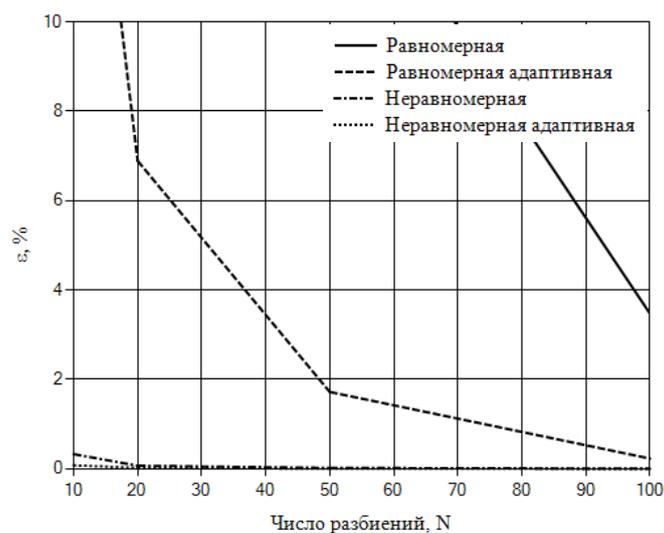


Рис. 4. Зависимость погрешности расчета от числа разбиений

На третьем этапе моделировался процесс нестационарного эрозионного горения пороха. Результаты моделирования представлены в таблице 3.

Таблица 3. Результаты моделирования процесса горения пороха

$N$	Параметр	Тип сетки			
		равномерная	равномерная адаптивная	неравномерная	неравномерная адаптивная
10	$\varepsilon, \%$	58.4	22.7	2.1	0.8
	$u^0, \text{мм/с}$	5.61	10.41	13.18	13.36
20	$\varepsilon, \%$	48.8	12.85	1.8	0.5
	$u^0, \text{мм/с}$	6.89	11.73	13.22	13.40
50	$\varepsilon, \%$	24.7	4.77	1.2	0.2
	$u^0, \text{мм/с}$	10.14	12.82	13.31	13.44
100	$\varepsilon, \%$	16.3	1.43	0.7	0.1
	$u^0, \text{мм/с}$	11.27	13.27	13.37	13.45

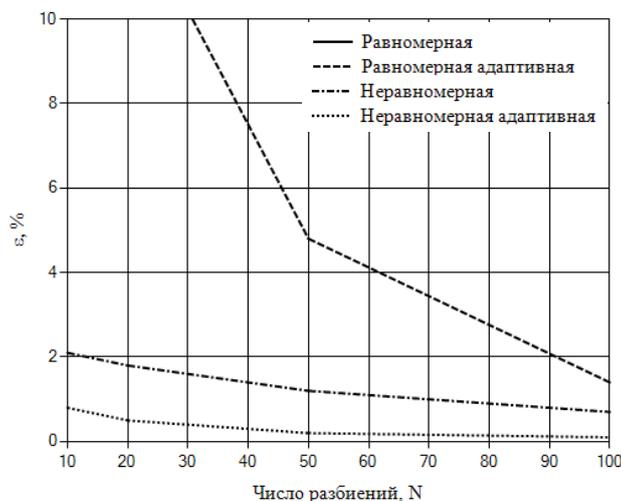


Рис. 5. Зависимость погрешности расчета от числа разбиений

На основании полученных результатов можно сделать вывод о том, что равномерная сетка не обеспечивает приемлемой точности расчета скорости горения. Равномерная адаптивная сетка обеспечивает точность  $\varepsilon < 1.43\%$  начиная с числа разбиений  $N = 100$ , в то время как неравномерная адаптивная сетка при  $N = 10$  обеспечивает более высокую точность  $\varepsilon = 0.8\%$ .

В заключение оценивалось среднее квадратичное отклонение скорости горения от «эталонных» значений с момента воспламенения до выхода процесса горения на стационарный режим:

$$\varepsilon = \frac{1}{u^0} \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=0}^T (u_i^{\text{эТ}} - u_i)^2} \cdot 100\%.$$

На основании представленных в таблице 4 результатов можно сделать вывод о том, что показатели точности  $\varepsilon < 1\%$  при небольшом числе разбиений обеспечивает лишь неравномерная адаптивная сетка.

Таблица 4. Среднее квадратичное отклонение скорости горения в зависимости от числа разбиений

N	Параметр	Тип сетки			
		равномерная	равномерная адаптивная	неравномерная	неравномерная адаптивная
10	$\varepsilon, \%$	79.6	28.8	4.9	1.3
20	$\varepsilon, \%$	63.2	16.5	3.1	0.9
50	$\varepsilon, \%$	31.7	5.8	1.6	0.4
100	$\varepsilon, \%$	19.1	2.03	1.1	0.15

Характер изменения среднего квадратичного отклонения для различных типов расчетных сеток представлен на рисунке 6.

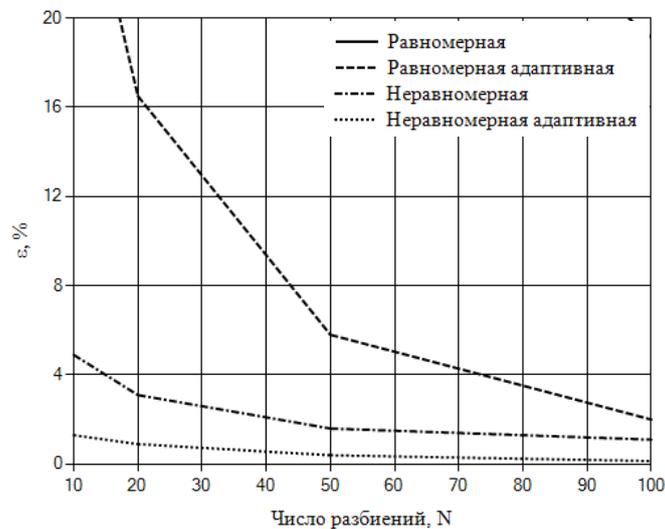


Рис. 6. Зависимость среднего квадратичного отклонения скорости горения от числа разбиений

При расчетах на всех типах сеток, обеспечивающих близкие результаты с погрешностью  $\varepsilon = 0.1\%$  замечались затраты процессорного времени. Результаты представлены в таблице 5.

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что применение неравномерной адаптивной сетки приводит к снижению затрат процессорного времени по сравнению с равномерной в 2.3 раза, равномерной адаптивной — 1.7 раза, неравномерной — 1.4 раза.

Таблица 5. Сравнение затрат процессорного времени

Параметр	Тип сетки			
	равномерная	равномерная адаптивная	неравномерная	неравномерная адаптивная
$N$	2400	1400	300	100
$t, c$	48.794	35.893	28.607	20.567

## Выводы

Проведенные численные исследования показали, что наилучшие результаты показывает неравномерная сетка, адаптированная к переменной глубине расчетной области, в частности:

- 1) при моделировании процесса прогрева пороха без учета тепловыделения от химических реакций точность вычисления температуры поверхности в момент воспламенения  $\varepsilon = 0.03\%$  обеспечивается при числе разбиений  $N = 10$ ;
- 2) при моделировании процесса прогрева пороха с учетом тепловыделения от химических реакций точность вычисления температуры поверхности в момент воспламенения  $\varepsilon = 0.1\%$  обеспечивается при числе разбиений  $N = 10$ ;
- 3) при моделировании процесса горения пороха точность вычисления скорости горения после выхода на стационарный режим  $\varepsilon = 0.8\%$  обеспечивается при числе разбиений  $N = 10$ ;
- 4) при моделировании процесса горения пороха среднее квадратическое отклонение скорости горения не превышает  $\varepsilon = 0.9\%$  начиная с числа разбиений  $N = 20$ ;
- 5) применение неравномерной адаптивной сетки позволяет существенно снизить затраты ресурсов ЭВМ как по объему памяти, так и времени счета.

## Список литературы

- Липанов А. М., Русяк И. Г. Некоторые особенности воспламенения и последующего нестационарного горения конденсированных систем при обдуве // В кн. «Материалы VIII Всес. симп. по горению и взрыву». М.: Наука, 1986. — С. 52–55.
- Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.
- Русяк И. Г. К вопросу о постановке сопряженных задач газовой динамики и горения артиллерийских порохов // Сб. материалов конференции «Фунд. и прикл. проблемы современной механики». Томск: НИТГУ, 2011. — С. 181–183.
- Русяк И. Г., Суфиянов В. Г., Ермолаев М. А. Постановка сопряженных задач газовой динамики, воспламенения и горения порохов в артиллерийских системах // Сб. «Фунд. и прикл. проблемы науки». — М.: РАН, 2012. — С. 265–276.
- Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.