

УДК: 519.8

Об аппроксимации прозрачных граничных условий с высоким порядком точности для волнового уравнения

И. Л. Софронов^а, Л. Е. Довгилович, Н. А. Краснов

Московский научно-исследовательский центр «Шлюмберже»,
Россия, 119285, г. Москва, ул. Пудовкина, 13
Московский физико-технический институт (ГУ),
Россия, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

E-mail: ^а isofronov@slb.com

Получено 11 ноября 2013 г.,
после доработки 27 декабря 2013 г.

В работе рассмотрена проблема повышения порядка аппроксимации прозрачных граничных условий для волнового уравнения при использовании разностных схем вплоть до шестого порядка точности по пространству. В качестве примера формулируется задача распространения волн в полубесконечном волноводе прямоугольного сечения. Предложен подход, позволивший вывести экономные и высокоточные формулы при дискретизации оператора прозрачных граничных условий. Приведены примеры численных расчетов, подтверждающие точность и устойчивость полученных разностных алгоритмов.

Ключевые слова: волновое уравнение, прозрачные граничные условия, конечно-разностные схемы, аппроксимация высокого порядка точности

On high-order approximation of transparent boundary conditions for the wave equation

I. L. Sofronov, L. E. Dovgilovich, N. A. Krasnov

*Schlumberger Moscow Research, 13 Pudovkina st., Moscow, 119285, Russia
Moscow Institute of Physics and Technology (SU),
9 Institutsky pereulok, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia*

Abstract. — The paper considers the problem of increasing the approximation order of transparent boundary conditions for the wave equation while using finite difference schemes up to the sixth order of accuracy in space. As an example, the problem of wave propagation in a semi-infinite rectangular waveguide is formulated. Computationally efficient and highly accurate formulas for discretizing operator of transparent boundary conditions are proposed. Numerical results confirm the accuracy and stability of the obtained difference algorithms.

Keywords: wave equation, transparent boundary conditions, finite-difference schemes, high-order approximation

Работа выполнена при поддержке научно-образовательной программы Шлюмберже-МФТИ и гранта № 13-01-00338 РФФИ.

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 45–56 (Russian).

Введение

Для решения волнового уравнения часто используются явные центрально-разностные схемы. В задачах в неограниченной области необходимо замыкать вычислительную область некоторой границей с условиями, имитирующими неотражение уходящих волн. Известен подход построения такого рода условий, называемых *прозрачными граничными условиями* (ПГУ), см. [Софронов, 1992; Sofronov, 1998; Hagstrom, 1999; Alpert, Greengard, Hagstrom, 1999; Софронов, 1999; Ballmann, Britten, Sofronov, 2002; Софронов, 2007]. Эти условия являются нелокальными по пространству и по времени, что делает их использование совсем непросто. Тем не менее в этих же работах рассмотрены подходы, позволяющие замыкать пошаговое интегрирование волнового уравнения внутри вычислительной области некоторой процедурой аппроксимации ПГУ на границе и получать устойчивые и экономные схемы второго порядка точности по пространству и по времени.

Применение схем *высокого порядка точности* по пространству для волнового уравнения влечет за собой необходимость соответствующего согласования точности и на границе. Мы предлагаем подход, позволяющий повышать порядок аппроксимации ПГУ. В качестве примера рассматривается задача распространения волн в полубесконечном волноводе прямоугольного сечения. Часть волновода, уходящая на бесконечность, отрезается, и на поперечном сечении мы формулируем, а затем аппроксимируем прозрачные граничные условия.

Структура работы следующая. Формулировка задачи приводится в параграфе 1. Далее, в параграфе 2 выводятся ПГУ. Дискретизация задачи разностной схемой порядка $O(\tau^2 + h^{2p})$, $p = 1, 2, 3$, рассмотрена в параграфе 3. Параграф 4 посвящен дискретизации ПГУ и оценке вычислительных затрат. В частности, показано, что по своим затратам дискретный оператор ПГУ похож на процедуру расчета волнового уравнения в некоторой дополнительной сеточной области, причем толщина этого слоя по нормали к границе фиксирована по числу точек сетки. В параграфе 5 приведены результаты расчетов для одномерных и двумерной задач, иллюстрирующие заявленную точность $O(\tau^2 + h^{2p})$ разностной схемы с ПГУ и устойчивость счета при большом времени расчета.

1. Постановка задачи

Для некоторых $Z > 0$, $X > 0$, $Y > 0$ рассмотрим в полубесконечном волноводе

$$\Omega = \{-Z \leq z < \infty, 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$$

следующую начально-краевую задачу для функции $w \equiv w(t, x, y, z)$:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) = S(t, x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0, \\ w = 0, & (x, y, z) \in \Gamma, \\ w|_{t=0} = W_0(x, y, z), \quad w_t|_{t=0} = W_1(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь Γ — граница волновода; $c(x, y, z)$ — достаточно гладкая функция скорости распространения волн, причем $c(x, y, z) = \text{const}$, $z \geq 0$; $S(t, x, y, z)$ — достаточно гладкая функция-источник; $W_0(x, y, z)$, $W_1(x, y, z)$ — достаточно гладкие начальные данные, согласованные с однородными граничными условиями Дирихле; причем $S(t, x, y, z) = 0$, $W_0(x, y, z) = 0$, $W_1(x, y, z) = 0$ при $z \geq 0$.

Отделим от торцевой части волновода, определяемой неравенством $-Z \leq z \leq 0$, его уходящую на бесконечность часть и рассмотрим ограниченную область $\Omega_1 = \Omega \cap \{z \leq 0\}$ с границей $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{z < 0\}$, а $\Gamma_2 = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, z = 0\}$ — открытая граница.

Наряду с (1.1) поставим аналогичную задачу в ограниченной области Ω_1 для $v \equiv v(t, x, y, z)$:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) = S(t, x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega_1, \quad t > 0, \\ v = 0, & (x, y, z) \in \Gamma_1, \\ \mathcal{T}v = 0, & (x, y, z) \in \Gamma_2, \\ v|_{t=0} = W_0(x, y, z), \quad v_t|_{t=0} = W_1(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega_1, \end{cases} \quad (1.2)$$

где \mathcal{T} — оператор прозрачных граничных условий (ПГУ), вид которого будет выписан ниже, см. (2.7).

2. Прозрачные граничные условия

По своему определению оператор ПГУ должен обеспечивать совпадение решений обеих задач (1.1) и (1.2) в области Ω_1 при любой правой части $S(t, x, y, z)$ и начальных условиях $W_0(x, y, z)$, $W_1(x, y, z)$. Следуя подходу [Софронов, 1992; Софронов, 1999], мы строим формулу продолжения решения $w(t, x, y, z)$ задачи (1.1) с границы $z = 0$ в область $z \geq 0$. Для этого определяем следующие формулы фурье-разложения $w(t, x, y, z)$ по гармоникам $\varphi_{\alpha, \beta}(x, y) = \sin(\pi\alpha x / X) \sin(\pi\beta y / Y)$, $\alpha, \beta = 1, \dots, \infty$:

$$w(t, x, y, z) = Q^{-1} \{w_{\alpha, \beta}\} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sum_{\beta=1}^{\infty} w_{\alpha, \beta}(t, z) \varphi_{\alpha, \beta}(x, y), \quad (2.1)$$

где

$$w_{\alpha, \beta}(t, z) = (Qw)|_{\alpha, \beta}, \quad Qw \equiv \left\{ \frac{4}{\pi^2} \int_0^Y \int_0^X w(t, x, y, z) \varphi_{\alpha, \beta}(x, y) dx dy; \quad \alpha, \beta = 1, \dots, \infty \right\}, \quad (2.2)$$

а для краткой записи прямого и обратного преобразования Фурье введены операторы Q и Q^{-1} соответственно. Также для краткости будем использовать символ « $\hat{}$ » вместо индексов « α, β », например $\hat{w} \equiv w_{\alpha, \beta}$.

После ряда выкладок получаем явную формулу продолжения для отдельного коэффициента Фурье [Софронов 1999]:

$$\hat{w}(t, z) = \hat{w}(t - z/c, 0) - \frac{z}{c} \int_0^{t-z/c} \hat{w}(t', 0) K(t - t', z) dt', \quad (2.3)$$

где

$$K(t, z) = c^2 \hat{\lambda}^2 \frac{J_1\left(c \hat{\lambda} \sqrt{t^2 - z^2/c^2}\right)}{c \hat{\lambda} \sqrt{t^2 - z^2/c^2}}, \quad (2.4)$$

$J_1(z)$ — функция Бесселя, $\hat{\lambda} = \sqrt{((\pi\alpha/X)^2 + (\pi\beta/Y)^2)}$.

Чтобы выписать оператор ПГУ \mathcal{T} , разделим (2.3) на z и возьмем предел при $z \rightarrow +0$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \hat{w}(t, z)|_{z=0} + \frac{\partial}{\partial t} \hat{w}(t, 0) + \int_0^t \hat{w}(t', 0) \hat{K}(t - t', 0) dt' = 0. \quad (2.5)$$

Обозначим

$$\hat{T}\hat{w} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \hat{w} + \frac{\partial}{\partial t} \hat{w} + \int_0^t \hat{w}(t') \hat{K}(t-t', 0) dt' \quad (2.6)$$

и определим оператор ПГУ \mathcal{T} для задачи (1.2) формулой

$$\mathcal{T} \equiv Q^{-1} \{ \hat{T} \} Q, \quad (2.7)$$

где блочно-диагональный оператор $\{ \hat{T} \} \equiv \{ \mathcal{T}_{\alpha, \beta} \}$ действуют независимо на каждый коэффициент Фурье с тем же индексом.

3. Конечно-разностная аппроксимация задачи (1.2)

Введем равномерную сетку по пространству и по времени:

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad i = 0, \dots, I, \quad h_x = X/I, \\ y_j &= jh_y, \quad j = 0, \dots, J, \quad h_y = Y/J, \\ z_k &= (k-K)h_z, \quad k = 0, \dots, K, \quad h_z = Z/K, \\ t^n &= n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

рассмотрим на ней сеточные функции $u^h(t^n, x_i, y_j, z_k)$. Определим стандартные центрально-разностные операторы порядка $O(h^{2p})$, $p = 1, 2, 3$ для второй производной по направлению x :

$$D_{xx} u^h(\cdot, x_i, \dots) = h_x^{-2} \sum_{m=0}^p a_m^{2p} \left(u^h(\cdot, x_i + mh_x, \dots) + u^h(\cdot, x_i - mh_x, \dots) \right), \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} a_0^2 &= -1, \quad a_1^2 = 1, \\ a_0^4 &= -5/4, \quad a_1^4 = 4/3, \quad a_2^4 = -1/12, \\ a_0^6 &= -49/36, \quad a_1^6 = 3/2, \quad a_2^6 = -3/20, \quad a_3^6 = 1/90. \end{aligned}$$

Аналогично определяются операторы по другим направлениям: D_{yy} , D_{zz} .

Здесь и далее индекс p в обозначениях опущен для краткости.

Введем сеточные области:

$$\Omega_1^h = \{ (x_i, y_j, z_k) : 1 \leq i \leq I-1, 1 \leq j \leq J-1, 1 \leq k \leq K \}$$

— точки сетки внутри Ω_1 , где будет рассчитываться решение;

$$\bar{\Omega}_1^h = \{ (x_i, y_j, z_k) : 1-p \leq i \leq I+p-1, 1-p \leq j \leq J+p-1, 1-p \leq k \leq K+p \}$$

— точки сетки вместе с дополнительными внешними приграничными слоями, продолжение решения в которые будет вычисляться согласно уравнению и граничным условиям. Обозначим через B оператор такого восполнения, т. е.

$$u^h|_{\bar{\Omega}_1^h} = B u^h|_{\Omega_1^h}. \quad (3.2)$$

Конкретизируем B для однородных условий Дирихле задачи (1.2). Рассмотрим, например, границу $z = -Z$. Для $p = 1$, очевидно, действие оператора B состоит в обнулении функции на границе: $u^h(t^n, x_i, y_j, z_0) = 0$. Далее, для более высоких порядков в силу симметрии оператора (3.1) относительно центральной точки шаблона достаточно сделать антисимметричное продолжение:

$$u^h(t^n, x_i, y_j, z_0) = 0, \quad u^h(t^n, x_i, y_j, z_{-k}) := -u^h(t^n, x_i, y_j, z_k), \quad k = 1, \dots, p-1$$

для $p = 2, 3$.

Аналогично оператор B определяется для других границ с однородными условиями Дирихле в задаче (1.2).

Обозначим эту часть оператора B , обрабатывающую границы с условиями Дирихле, через B^{DBC} .

Вторую часть оператора B , обрабатывающую границу $z = 0$ с ПГУ, мы обозначим через B^{TBC} , т. е.

$$B = B^{DBC} \oplus B^{TBC}. \quad (3.3)$$

Мы определим оператор B^{TBC} в параграфе 0. Собственно это и будет предлагаемый способ аппроксимации ПГУ с высоким порядком.

Выпишем теперь следующую явную конечно-разностную аппроксимацию порядка $O(\tau^2 + h^{2p})$, $p = 1, 2, 3$ задачи (1.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v^h(t^{n+1}, \mathbf{x}^h) - 2v^h(t^n, \mathbf{x}^h) + v^h(t^{n-1}, \mathbf{x}^h)}{\tau^2} - c^2(\mathbf{x}^h)(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz})v^h(t^n, \mathbf{x}^h) = S(t^n, \mathbf{x}^h), \\ \mathbf{x}^h \equiv (x_i, y_j, z_k) \in \Omega_1^h; \quad n = 1, 2, \dots, \\ v^h|_{\bar{\Omega}_1^h, t^{n+1}} := Bv^h|_{\Omega_1^h, t^{n+1}} \\ v^h|_{\bar{\Omega}_1^h, t^0} = W_0(\mathbf{x}^h), \quad v^h|_{\bar{\Omega}_1^h, t^1} = W_0(\mathbf{x}^h) + 0.5c^2(\mathbf{x}^h)\tau^2(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz})W_0(\mathbf{x}^h), \end{array} \right. \quad (3.4)$$

полагая, что оператор B применяется к искомой функции после того, как произошло ее обновление на $n+1$ -ом слое по времени согласно первому уравнению. Начальное условие при $t = t^1$ получено из ряда Тейлора для обеспечения второго порядка точности по времени.

4. Аппроксимация ПГУ

Для аппроксимации ПГУ на границе $z = 0$ мы выпишем приближенные формулы продолжения решения согласно волновому уравнению. Это будет сделано с целью получения более экономных в вычислительном отношении алгоритмов. После этого в параграфе 4.2 мы опишем процесс применения оператора B^{TBC} , что и будет являться его определением. Важным окажется то, что дискретизация интегралов свертки, входящих в определение оператора, будет проведена рекуррентными формулами. С точки зрения вычислений это означает локализацию расчетных формул по времени. Наконец, в параграфе 4.3 мы обсудим вычислительные затраты, необходимые при однократном применении оператора B^{TBC} .

4.1. Приближенная формула продолжения решения для одной Фурье гармонике за границу $z = 0$

Согласно подходу с применением разложения (2.1), проблема продолжения решения сводится к продолжению коэффициентов Фурье — функций от переменных t, z — в область

$z > 0$. Вначале представим ядро свертки из (2.3) в виде разложения по функциям, зависящим отдельно от пространственной и временной координат. Это позволит использовать универсальные ядра свертки для любых значений шага сетки h при дискретизации. Принимая во внимание то, что достаточно рассматривать точность порядка $O(h^{2p})$, $p = 1, 2, 3$, при продолжении решения на расстояние ph , приблизим ядро (2.4) рядом Тейлора. В результате несложных преобразований с привлечением известных соотношений для функций Бесселя получаем

$$K(t, z) = c^2 \hat{\lambda}^2 \frac{J_1\left(\frac{c\hat{\lambda}\sqrt{t^2 - z^2/c^2}}{c\hat{\lambda}\sqrt{t^2 - z^2/c^2}}\right)}{c\hat{\lambda}\sqrt{t^2 - z^2/c^2}} = c^2 \hat{\lambda}^2 \sum_{m=0}^p \frac{J_{m+1}(c\hat{\lambda}t)}{(c\hat{\lambda}t)^{m+1}} \frac{(\hat{\lambda}z)^{2m}}{2^m m!} + O((\hat{\lambda}z)^{2p+2}). \quad (4.1)$$

Такое приближенное представление приводит к тому, что свертка по времени в (2.3) будет вычисляться с одними и теми же ядрами вида

$$K_m(t) = \frac{J_m(t)}{t^m}, \quad m = 1, 2, \dots, p + 1. \quad (4.2)$$

Следующим шагом на пути кардинального сокращения вычислительных затрат является приближение ядер свертки суммами экспонент. Такой прием, впервые указанный для приложений к проблеме ПГУ в [Софронов, 1992], позволяет использовать рекуррентные формулы для аппроксимации интеграла свертки, что резко сокращает объем памяти и число операций (см. формулы (4.12) далее).

С помощью ряда процедур, написанных на MAPLE [MAPLE URL], мы получаем приближения

$$K_m(t) \approx \tilde{K}_m(t) = \sum_{l=1}^{L_m} a_{m,l} \exp(b_{m,l}t), \quad m = 1, 2, \dots, p + 1. \quad (4.3)$$

Пользуясь убыванием $K_m(t)$ на бесконечности, из (4.3) численно нетрудно провести оценку приближения ε_k в неравенствах

$$|K_m(t) - \tilde{K}_m(t)| \leq \varepsilon_m, \quad 0 \leq t < \infty, \quad m = 1, 2, \dots, p + 1. \quad (4.4)$$

Например, найденные нами приближения (4.3) имеют следующие параметры:

Таблица 1

	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
L	128	32	16	16
ε	5.e-7	2.e-7	6.e-8	2.e-9

Таким образом, вместо (2.3) мы используем следующую приближенную формулу:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t, z) &= \hat{u}(t - z/c, 0) - \frac{z}{c} \int_0^{t-z/c} \hat{u}(t', 0) \tilde{K}(t - t', z) dt', \\ \tilde{K}(t, z) &= c^2 \hat{\lambda}^2 \sum_{m=0}^p \tilde{K}_{m+1}(c\hat{\lambda}t) \frac{(\hat{\lambda}z)^{2m}}{2^m m!}, \\ \tilde{K}_m(t) &= \sum_{l=1}^{L_m} a_{m,l} \exp(b_{m,l}t), \quad m = 1, 2, \dots, p + 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2. Разностный оператор B^{TBC} продолжения решения за границу $z = 0$

Определим сеточные аналоги операторов преобразования Фурье (2.1), (2.2):

$$u^h(t^n, x_i, y_j, z_k) = Q_h^{-1} \{u_{\alpha\beta}^h\} \equiv \sum_{\alpha=1}^{I-1} \sum_{\beta=1}^{J-1} u_{\alpha\beta}^h(t^n, z_k) \varphi_{\alpha\beta}^h(x_i, y_j), \quad (4.6)$$

$$u_{\alpha,\beta}^h(t^n, z_k) = (Q_h u^h)|_{\alpha,\beta},$$

$$Q_h u^h \equiv \left\{ \frac{4}{IJ} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} u^h(t^n, x_i, y_j, z_k) \varphi_{\alpha,\beta}^h(x_i, y_j), \quad \alpha = 1, \dots, I-1, \beta = 1, \dots, J-1 \right\}, \quad (4.7)$$

где

$$\varphi_{\alpha,\beta}^h(x_i, y_j) = \sin(\pi\alpha x_i/X) \sin(\pi\beta y_j/Y), \quad \alpha = 1, \dots, I-1, \beta = 1, \dots, J-1. \quad (4.8)$$

Введем сеточную границу при $z = z_K = 0$, содержащую несколько слоев по времени:

$$\Gamma_{TBC}^h = \{(t^v, x_i, y_j, z_k) : k = K; v = n, n-1, \dots, n-n_p\}, \quad (4.9)$$

где $n_p \geq 1$ будет определено позднее, см. (4.11).

Чтобы построить оператор V^{TBC} для границы $z_K = 0$, мы полагаем, что решение $u^h(t^n, x_i, y_j, z_k)$ известно на сеточной границе Γ_{TBC}^h . Необходимо продолжить это решение в точки сетки с индексом $k = K+1, \dots, K+p$ на слой по времени t^{n+1} . Опишем процесс продолжения следующими последовательными шагами.

1. Сначала применяем к функции u^h на Γ_{TBC}^h оператор фурье-разложения и получаем наборы коэффициентов для каждого слоя по времени:

$$\hat{u}^h(t^v) \equiv u_{\alpha,\beta}^h(t^v, z_K) = (Q_h u^h|_{t^v, z_K})|_{\alpha,\beta}, \quad v = n, \dots, n-n_p. \quad (4.10)$$

2. Затем для нахождения каждого коэффициента $\hat{u}^h(t^{n+1}, z)$, $z = z_K + h_z, \dots, z_K + ph_z$, применяем формулы (4.5). Это делается следующим образом:

2а) вычисляем функцию $\hat{u}^h(t^{n+1} - z/c, z_K)$ с помощью интерполяции по времени сеточной функции $\{\hat{u}^h(t^v), v = n, \dots, n-n_p\}$; если шаг по времени пропорционален шагу по пространству, то точность интерполяции должна быть не хуже, чем $O(\tau^{2p})$; это требование и определяет значение параметра n_p ; например, для интерполяции Лагранжа полиномом степени $2p$ получаем, что

$$n_p = \max\left(2p, \left\lceil \frac{ph}{c\tau} \right\rceil\right); \quad (4.11)$$

2б) вычисляем интеграл свертки по рекуррентным формулам, пользуясь тем, что ядро состоит из суммы экспонент; эти формулы легко получаются из рассмотрения интеграла для одной экспоненты $\exp(bt)$:

$$\begin{aligned} I(t-z/c) &\equiv \int_0^{t-z/c} f(t') \exp(b(t-t')) dt' = \\ &= \int_0^{t-z/c-\tau} f(t') \exp(b(t-t')) dt' + \int_{t-z/c-\tau}^{t-z/c} f(t') \exp(b(t-t')) dt' = \\ &= \exp(b\tau) I(t-\tau-z/c) + \int_{t-z/c-\tau}^{t-z/c} f(t') \exp(b(t-t')) dt'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В (4.12) необходимо вычислить интеграл на отрезке $[t-z/c-\tau, t-z/c]$ для $f(t) \equiv \hat{u}^h(t, z_K)$. Его вычисление проводится по явным формулам с использованием полиноми-

ального восстановления с порядком точности $O(\tau^{2p})$ функции $\hat{u}^h(t, z_k)$ по значениям $\{\hat{u}^h(t^v), v = n, \dots, n - n_p\}$.

3. Наконец, применяем операцию суммирования (4.6) по базису Фурье с вычисленными коэффициентами $\hat{u}^h(t^{n+1}, z_k)$:

$$u^h(t^{n+1}, x_i, y_j, z_k) = Q_h^{-1} \{u_{\alpha, \beta}^h(t^{n+1}, z_k)\}, \quad k = K + 1, \dots, K + p. \quad (4.13)$$

Замечание 1. Для общности мы привели здесь алгоритм с порядком точности $O(\tau^{2p})$, хотя можно было ограничиться вторым порядком по времени в соответствии с точностью схемы (3.4).

Замечание 2. Из соображений аппроксимации очевидно, что применение сверточного интеграла в (4.5) имеет смысл только для низкочастотной составляющей пространственного спектра (4.10), т. е. при $\alpha \leq I_{TBC} < I$, $\beta \leq J_{TBC} < J$ (для оставшихся высокочастотных фурье-гармоник достаточно использовать только первое слагаемое $\hat{u}^h(t^{n+1} - z/c, z_k)$ при продолжении). Ответ на вопрос о том, какие значения I_{TBC} , J_{TBC} нужно использовать, решается экспериментальным путем на основе оценки точности решения задачи, которая определяется погрешностями аппроксимации внутри области и на границе с ПГУ.

4.3. Вычислительные затраты, необходимые для применения оператора B^{TBC}

Вначале оценим затраты, необходимые для продолжения одного коэффициента Фурье в дополнительные точки сетки z_k , $k = K + 1, \dots, K + p$. Для вычисления сверток по рекуррентным формулам требуется хранить $\sum_{m=1}^{p+1} L_m$ вспомогательных чисел — интегралов от каждой экспоненты. Соответственно, число арифметических операций, затрачиваемое в основном на интерполяцию, пп. 2а, и на явные формулы вычисления каждого интеграла из последней строки (4.12) в свертках, есть величина $O\left(p^2 + p \sum_{m=1}^{p+1} L_m\right)$.

Для оценки затрат памяти на весь оператор B^{TBC} учтем, во-первых, объем сетки границы Γ_{TBC}^h и, во-вторых, согласно замечанию 3, учтем $I_{TBC} J_{TBC}$ коэффициентов Фурье, для которых нужно хранить сверточные интегралы согласно рекуррентным формулам. Поэтому требуемая память составляет величину

$$\text{Memory}(B^{TBC}) = O\left(IJn_p + I_{TBC} J_{TBC} \sum_{m=1}^{p+1} L_m\right). \quad (4.14)$$

Что касается числа операций однократного применения оператора B^{TBC} , то оценка следующая:

$$\text{Flops}(B^{TBC}) = O\left(IJp^2 + I_{TBC} J_{TBC} p \sum_{m=1}^{p+1} L_m\right). \quad (4.15)$$

Из этих оценок можно сделать следующий вывод: оператор B^{TBC} похож по своим затратам на процедуру расчета волнового уравнения в некоторой дополнительной сеточной области размером $I \times J \times K_{TBC}$, причем толщина этого слоя по z фиксирована по числу точек сетки, а не по физической длине и оценивается как

$$K_{TBC} = O\left(n_p + \frac{I_{TBC} J_{TBC}}{I J} \sum_{m=1}^{p+1} L_m\right) \quad (4.16)$$

(можно с уверенностью утверждать, что $I_{TBC} < I/4$, $J_{TBC} < J/4$).

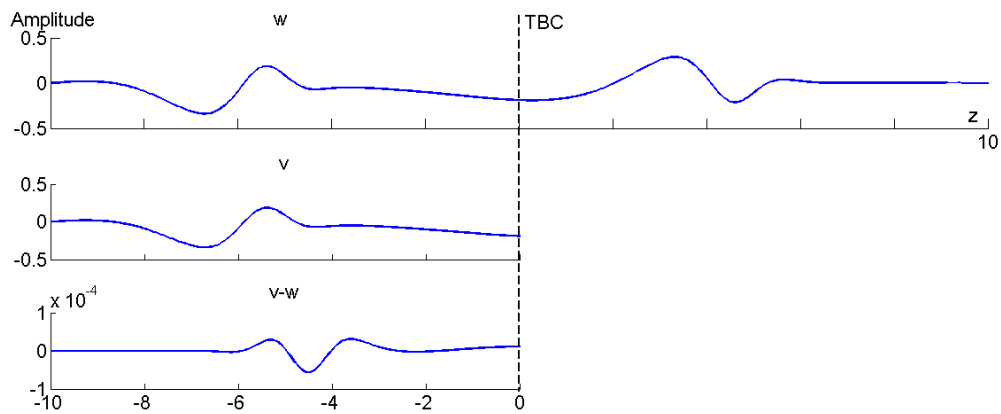


Рис. 1. Амплитуда решений и их разность при $t = 10$, $K = 256$

Для проверки точности предложенных ПГУ с порядком аппроксимации $O(h^{2p})$, $p = 1, 2, 3$, рассматривалась C -норма разности решений $v^h - w^h$ в области Ω_1^h . Обозначим через Δ_K величину этой нормы в момент времени $t = 10$ на сетке с шагом $h_z = Z/K$. Наблюдаемый порядок точности решения оценивался численно величиной $q = \log_2(\Delta_{2K}/\Delta_K)$.

В таблицах 2–4 представлены результаты численных расчетов для $p = 1, 2, 3$ при значениях $\lambda = 1, 3, 6$.

Таблица 2. Схема второго порядка точности

τ	K	Δ $\lambda = 1$	q $\lambda = 1$	Δ $\lambda = 3$	q $\lambda = 3$	Δ $\lambda = 6$	q $\lambda = 6$
1.00e-2	32	3.74e-3		5.66e-3		3.50e-3	
5.00e-3	64	9.29e-4	2.0	1.39e-3	2.0	1.81e-3	0.95
2.50e-3	128	2.34e-4	2.0	3.39e-4	2.0	9.77e-4	0.89
1.25e-3	256	5.78e-5	2.0	8.29e-5	2.0	2.96e-4	1.7
6.25e-4	512	1.44e-5	2.0	2.05e-5	2.0	7.82e-5	1.9
3.13e-4	1024	3.60e-6	2.0	5.09e-6	2.0	2.00e-5	2.0

Таблица 3. Схема четвертого порядка точности

τ	K	Δ $\lambda = 1$	q $\lambda = 1$	Δ $\lambda = 3$	q $\lambda = 3$	Δ $\lambda = 6$	q $\lambda = 6$
1.00e-2	32	5.52e-4		6.50e-4		1.91e-3	
2.50e-3	64	4.01e-5	3.8	3.60e-5	4.2	2.60e-4	2.9
6.25e-4	128	2.40e-6	4.1	2.14e-6	4.1	1.16e-5	4.5
1.56e-4	256	1.50e-7	4.0	1.32e-7	4.0	6.87e-7	4.1
3.91e-5	512	9.30e-9	4.0	8.16e-9	4.0	5.71e-8	3.6

Таблица 4. Схема шестого порядка точности

τ	K	Δ $\lambda = 1$	q $\lambda = 1$	Δ $\lambda = 3$	q $\lambda = 3$	Δ $\lambda = 6$	q $\lambda = 6$
1.00e-2	32	1.59e-4		2.02e-4		1.39e-3	
1.25e-3	64	2.81e-6	5.8	2.70e-6	6.2	2.04e-5	6.1
1.56e-4	128	4.56e-8	5.9	4.12e-8	6.0	3.66e-7	5.8
1.95e-5	256	7.1e-10	6.0	6.6e-10	6.0	3.46e-9	6.7

Из этих результатов следует, что все три разностные схемы (5.3) с ПГУ имеют ожидаемые порядки точности. Исследовалась также устойчивость этих разностных схем при большом времени расчета, вплоть до $t = 200$. Все расчеты оказались устойчивыми.

5.2. Тестовые расчеты для волновой задачи в прямоугольнике

Следующим тестом явилась двумерная задача, получаемая из (1.2) отбрасыванием зависимости по y . Кроме того, на боковых стенках $x = 0, X$ рассматривались условия периодичности (а не Дирихле). При этом $S(t, x, z) = 0$, $W_1(x, z) = 0$, $X = 10$, $Z = 10$, $c = 1$, $\sigma = 0.5$, $W_0(x, z) = \exp\left(-0.5(x - X/2)^2/\sigma^2 - 0.5(z + Z/2)^2/\sigma^2\right)$. Эталонное решение получалось из задачи в расширенной по z области $-Z \leq z \leq Z$, по аналогии с (5.1).

На рисунке 2 показано решение задачи с ПГУ на верхней границе $z = 0$ при $t = 6$, $K = 512$, $\tau = 0.01$ для $p = 1$.

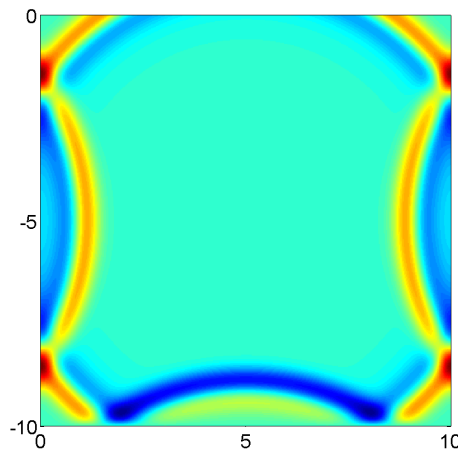


Рис. 2. Решение в момент времени $t = 6$. ПГУ на верхней границе

В таблицах 5–7 представлены значения C -нормы ошибки решения Δ_K в момент времени $t = 10$ и значения численного порядка точности решения $q = \log_2(\Delta_{2K}/\Delta_K)$ для $p = 1, 2, 3$.

Таблица 5. Схема второго порядка точности

τ	К. I	Δ	q
5.00e-3	64	7.72e-4	
2.50e-3	128	2.05e-4	1.9
1.25e-3	256	5.62e-5	1.9
6.25e-4	512	1.44e-5	2.0

Таблица 6. Схема четвертого порядка точности

τ	К. I	Δ	q
5.00e-3	64	1.41e-4	
1.25e-3	128	9.45e-6	3.9
6.25e-4	256	6.13e-7	4.0
1.56e-4	512	3.80e-8	4.0

Таблица 7. Схема шестого порядка точности

τ	К. I	Δ	q
5.00e-3	64	4.64e-5	
1.25e-3	128	9.00e-7	5.7
6.25e-4	256	1.50e-8	5.9

Как и следовало ожидать, наблюдаются второй, четвертый и шестой порядки точности разностных схем с предложенными ПГУ. Для проверки устойчивости на большие времена моделирования были проведены расчеты вплоть до $t = 200$. Все схемы оказались устойчивыми, см. рисунок 3 для $p = 3$ (решение выходит на периодический режим).

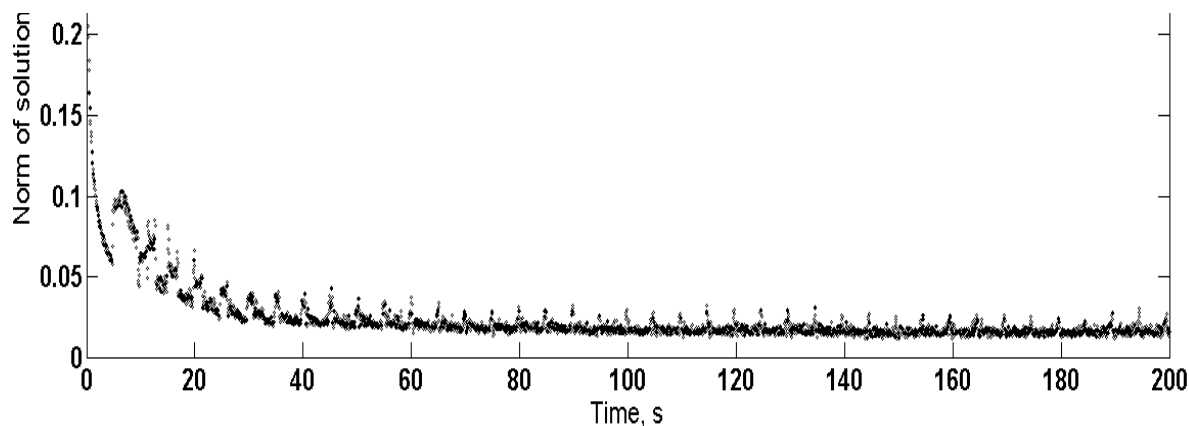


Рис 3. Норма решения в области $\{0 < x < X, -Z < z < 0\}$ для схемы шестого порядка точности с ПГУ на границе $z = 0$

Список литературы

- Софронов И. Л.* Условия полной прозрачности на сфере для трехмерного волнового уравнения // Доклады РАН. — 1992. — Т. 326, № 6. — С. 453–457.
- Софронов И. Л.* Точные искусственные граничные условия для некоторых задач аэродинамики и дифракции // Докт. дисс. — 1999. — М: ИММ РАН. С. 1–215.
- Софронов И. Л.* О применении прозрачных граничных условий в задачах аэроакустики // Матем. моделирование. — 2007. — Т. 19, № 8. — С. 105–112.
- Alpert B., Greengard L., and Hagstrom T.* Nonreflecting Boundary Conditions for the Time-Dependent Wave Equation // Journal of Computational Physics. — 2002. — Vol. 180. — P. 270–296.
- Ballmann J., Britten G., Sofronov I.* Time-accurate inlet and outlet conditions for unsteady transonic channel flow // AIAA Journal. — 2002. — Vol. 40, No. 2. — P. 1745–1754.
- Hagstrom T.* Radiation boundary conditions for the numerical simulation of waves // Acta Numer. — 1999. — Vol. 8. — P. 47–106.
- Hagstrom T.* URL: <http://faculty.smu.edu/thagstrom/pln6.txt>.
- MAPLE* URL: <http://www.maplesoft.com>.
- Sofronov I. L.* Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 221. — P. 92–115.