**КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
И МОДЕЛИРОВАНИЕ 2014 Т. 6 № 1 С. 27–43**

Ки&М

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК: 517.9

Периодическая задача для уравнения Хилла в случае параметрического резонанса

С. М. Чуйко[a], О. В. Старкова[b], П. В. Кулиш[c]

Донбасский государственный педагогический университет,
Украина, 84116, Донецкая обл., г. Славянск, ул. Г. Батюка, 19

E-mail: [a] chujko-slav@inbox.ru, [b] star-o@ukr.net, [c] PKulish@mail.ru

Получено 27 октября 2013 г.

Найдены необходимые и достаточные условия существования решений нелинейной неавтономной периодической задачи для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса. Характерной особенностью поставленной задачи является необходимость нахождения как искомого решения, так и соответствующей собственной функции, обеспечивающей разрешимость периодической задачи для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса. Для построения решений периодической задачи для уравнения типа Хилла и соответствующей собственной функции в случае параметрического резонанса предложены итерационные схемы, построенные методу простых итераций, а также с использованием техники наименьших квадратов.

Ключевые слова: нелинейная неавтономная периодическая краевая задача, уравнение типа Хилла, случай параметрического резонанса, метод простых итераций

Periodic boudary-value problem for Hill's equation in the case of parametric resonance

S. M. Chuiko, O. V. Starkova, P. V. Kulish

Donbass State Pedagogical University, 19 G. Batuka street, Donetsk region, Slavyansk, 84116, Ukraine

Abstract. — Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of nonlinear nonautonomous periodic problem for Hill's equation in the case of parametric resonance. A characteristic feature of the task is the need of finding, as desired solution, and the corresponding eigenfunction, which ensures solvability of the periodic problem for Hill's equation in the case of parametric resonance. To construct solutions of the periodic problem for Hill's equation and the corresponding eigenfunction in the case of parametric resonance proposed iterative scheme, based on the method of simple iterations with used list-square technics.

Keywords: nonlinear nonautonomous periodic boudary-value problem, Hill's equation, the case of parametric resonance, he method of simple iterations

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 27–43 (Russian).

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований. Номер государственной регистрации 0112U0000372.

Постановка задачи

Исследована задача о нахождения 2π-периодического решения [Boichuk, Samoilenko, 2004]

$$y(t,\varepsilon) : y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi], \quad y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$$

уравнения типа Хилла [Каудерер, 1961; Якубович, Старжинский, 1972, с. 315]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = f(t) + \varepsilon Y(y,\mu,t,\varepsilon). \tag{1}$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения (1) ищем в малой окрестности нетривиального периодического решения $y_0(t) \in C^2[0,2\pi]$ порождающего уравнения

$$\frac{d^2y_0}{dt^2} + y_0 = f(t). \tag{2}$$

Здесь $Y(y,\mu,t,\varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по первому и второму аргументу в малой окрестности решения порождающего решения и точки $\mu_0 := \mu(0)$, а также непрерывная по $t \in [0,2\pi]$ и по $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$. Согласно традиционной классификации периодических краевых задач, поставленная задача для уравнения (1) является критической [Boichuk, Samoilenko, 2004; Малкин, 1956; Гребеников, Рябов, 1979]. Для произвольной функции $f(t) \in C[0,2\pi]$ периодическая задача для уравнения (2) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} f(s)\,ds = 0; \tag{3}$$

в этом случае при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной общее решение 2π-периодической задачи для уравнения (2) имеет вид

$$y_0(t,c_0) = c_0 \cdot \cos t + g\Big[f(s)\Big](t), \quad c_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Здесь

$$g\Big[f(s)\Big](t) = \int_0^t \sin(t-s) f(s)\,ds$$

— оператор Грина 2π-периодической задачи для уравнения (2).

Условия существования решения

Предположим условие (3) выполненным; кроме того, предположим, что система (1) имеет T-периодическое решение

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon), \quad c_0(0) := c_0^* \in \mathbb{R}^1,$$

в малой окрестности порождающего решения $y_0(t,c_0(\varepsilon))$, при этом в достаточно малой окрестности функции $\mu_0(\varepsilon)$ существует непрерывная собственная функция

$$\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), \quad \mu_0(0) := \mu_0^*.$$

В этом случае условие разрешимости периодической задачи для уравнения (1)

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} Y(y(s,\varepsilon),\mu(\varepsilon),s,\varepsilon)\, ds = 0 \qquad (4)$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для уравнения типа Хилла

$$F(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos s \\ -\sin s \end{bmatrix} Y(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\, ds = 0. \qquad (5)$$

Предположим, что уравнение (5) имеет кратные корни; при этом строки условия (4) разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (1) линейно зависимы. Для определенности предположим, что первая строка условия (4) не нулевая. В этом случае условие (4) разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (1) приводит к уравнению для порождающих амплитуд 2π-периодической задачи для уравнения Хилла

$$F(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} Y(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\cos s\, ds = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение [Чуйко, Чуйко, Кулиш, 2013], которое является необходимым условием разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (1).

Лемма. *Если выполнено условие* (3) *и* 2π*-периодическая задача для уравнения типа Хилла* (1) *в малой окрестности порождающего решения*

$$y_0(t,c_0(\varepsilon)) = c_0(\varepsilon)\cdot\cos t + g[f(s)](t)$$

и в достаточно малой окрестности функции $\mu_0(\varepsilon)$ *имеет решение*

$$y(t,\varepsilon) : y(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi], \quad y(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0], \quad \mu(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0],$$

то вектор

$$\check{c}_0(\varepsilon) := \mathrm{col}\,(c_0(\varepsilon),\ \mu_0(\varepsilon))\in\mathbb{R}^2, \quad \check{c}_0(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0],$$

удовлетворяет уравнению для порождающих амплитуд 2π*-периодической задачи для уравнения типа Хилла* (6)*.*

Фиксируя одно из решений $\check{c}_0(\varepsilon)\in\mathbb{R}^2$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании 2π-периодического решения уравнения типа Хилла (1)

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau,c_0)$, а также собственной функции

$$\mu(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$$

в малой окрестности точки $\mu_0(\varepsilon)$. Возмущение порождающего решения

$$x(t,\varepsilon) :\ x(\cdot,\varepsilon)\in C^2[0,2\pi], \quad x(t,\cdot)\in C[0,\varepsilon_0],$$

а также функцию $\zeta(\varepsilon)\in C[0,\varepsilon_0]$ определяет 2π-периодическая задача для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon),\mu(\varepsilon),t,\varepsilon). \qquad (7)$$

В малой окрестности порождающего решения $y_0(t, c_0)$ и точки $\mu_0(\varepsilon)$ имеет место следующее разложение:

$$Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon) = Y(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon), t, \varepsilon) + \mathcal{A}_1\Big(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big)x(t, \varepsilon) +$$
$$+ \mathcal{A}_2\Big(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), t, \varepsilon),$$

где

$$\mathcal{A}_1\Big(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) = \left.\frac{\partial Y(y, \mu, t, \varepsilon)}{\partial y}\right|_{\substack{y = y_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon),}}$$

$$\mathcal{A}_2\Big(y_0(t, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) = \left.\frac{\partial Y(y, \mu, t, \varepsilon)}{\partial \mu}\right|_{\substack{y = y_0(t, c_0(\varepsilon)), \\ \mu = \mu_0(\varepsilon).}}$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения (7) при соответствующей фиксации начала отсчета независимой переменной представимо в виде

$$x(t, \varepsilon) = \nu(\varepsilon) \cdot \cos t + x^{(1)}(t, \varepsilon), \quad \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R}^1,$$

где

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot g[Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0 + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)](t).$$

Обозначим матрицу

$$D_0\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) = \int_0^{2\pi} \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big)\cos s; \mathcal{A}_2\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0\Big)\Big] \cos s \, ds.$$

Условие разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (7) при наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (6) приводит к уравнению

$$D_0\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \cdot \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -\int_0^{2\pi} \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big)x^{(1)}(s, \varepsilon) +$$
$$+ \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big] \cos s \, ds. \quad (8)$$

При условии

$$D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) \neq 0 \quad (9)$$

имеют место равенства

$$\operatorname{rank} D_0(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)) = 1, \quad \operatorname{rank} P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))} = 0,$$

следовательно,

$$P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))} = 0.$$

Здесь $P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))}$ — (1×1)-матрица-ортопроектор [Boichuk, Samoilenko, 2004]:

$$P_{D_0^*(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon))} : \ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{N}\Big[D_0\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big)\Big].$$

Таким образом, при условии (9) уравнение (8) имеет по меньшей мере одно решение

$$\begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \int\limits_0^{2\pi} \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) x^{(1)}(s, \varepsilon) + \\ + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big] \cos s \, ds.$$

Решение уравнения (8) при дополнительном условии условии

$$D_0^+\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

непрерывно. При этом периодическая задача для уравнения (1) имеет по меньшей мере одно решение, определенное операторной системой

$$\begin{gathered} x(t, \varepsilon) = \nu(\varepsilon) \cdot \cos t + x^{(1)}(t, \varepsilon), \\ x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot g\Big[Y(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big](t), \\ \begin{bmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \zeta(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \int\limits_0^{2\pi} \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) x^{(1)}(s, \varepsilon) + \\ + \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big] \cos s \, ds. \end{gathered} \tag{10}$$

Для построения решения операторной системы (10) в случае $D_0^+\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$ применим метод простых итераций [Boichuk, Samoilenko, 2004; Гребеников, Рябов, 1979]. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *В случае кратных корней уравнения для порождающих амплитуд* (5) *для любого корня* $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ *в малой окрестности порождающего решения*

$$y_0(t, c_0(\varepsilon)) = c_0(\varepsilon) \cdot \cos t + g\Big[f(s, \varepsilon)\Big](t), \quad c_0(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0],$$

и соответствующей собственной функции $\mu_0(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0]$ *при условии* (9) *и*

$$D_0^+\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

периодическая задача для уравнения (1) *имеет по меньшей мере одно решение*

$$y(t, \varepsilon) : y(\cdot, \varepsilon) \in C^2[0, 2\pi], \; y(t, \cdot) \in C[0, \varepsilon_0], \; \mu(\varepsilon) \in C[0, \varepsilon_0],$$

определенное операторной системой (10). *Для нахождения этого решения*

$$y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0(\varepsilon)) + x(t, \varepsilon),$$

а также собственной функции $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ *применима итерационная схема*

$$x_1(t,\varepsilon) = \nu_1(\varepsilon)\cdot\cos t + x_1^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_1^{(1)}(t,\varepsilon) = \varepsilon g\Big[Y(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](t),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+\,\mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\,ds;$$

$$x_2(t,\varepsilon) = \nu_2(\varepsilon)\cdot\cos t + x_2^{(1)}(t,\varepsilon), \quad x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon) + x_2^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x_2^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon g\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_1(s,\varepsilon) + \mathcal{A}_2\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_1(\varepsilon) +$$

$$+\,\mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](t),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_2^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+\,\mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_1(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\,ds;$$

$$x_{k+2}(t,\varepsilon) = \nu_{k+2}(\varepsilon)\cdot\cos t + x_{k+2}^{(1)}(t,\varepsilon), \quad \mu_{k+2}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+2}(\varepsilon), \tag{11}$$

$$x_{k+2}^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon) + x_{k+2}^{(2)}(t,\varepsilon), \quad x_{k+2}^{(1)}(t,\varepsilon) = x_1^{(1)}(t,\varepsilon) + x_{k+2}^{(2)}(t,\varepsilon),$$

$$x_{k+2}^{(2)}(t,\varepsilon) = \varepsilon g\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_{k+1}(s,\varepsilon) +$$

$$+\,\mathcal{A}_2\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_{k+1}(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_{k+1}^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big](t),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_{k+2}(\varepsilon) \\ \zeta_{k+2}(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0),\mu_0\Big)x_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon) +$$

$$+\,\mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_{k+2}^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_{k+1}(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\,ds, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon_*]$, на котором применима итерационная схема (11), может быть оценена как посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [Boichuk, Samoilenko, 2004; Гребеников, Рябов, 1979; Лика, Рябов, 1974], так и непосредственно из условия сжимаемости оператора, определяемого системой (10) аналогично [Чуйко, 2005; Chuiko, 2006]. Нахождение приближенных решений периодической задачи для уравнения (1) в критическом случае как по методу простых итераций, так и по методу малого параметра А. Пуанкаре отличают простота вычислительной схемы, показательная скорость сходимости, затухание ошибок округления и численная устойчивость [Boichuk, Samoilenko, 2004; Гребеников, Рябов, 1979; Лика, Рябов, 1974], однако построение приближенных решений с применением метода простых итераций или метода малого параметра А. Пуанкаре для краевых задач связано с быстро увеличивающейся от итерации к итерации сложностью вычислений.

Практический способ построения решения

Целью данного пункта является построение приближенных решений периодической задачи для уравнения (1) в критическом случае с использованием метода наименьших квадратов [Ахиезер, 1965; Chuiko, 2008; Чуйко, Старкова, 2012], который обеспечивает большую точность при меньшем числе итераций. Пусть

$$\varphi^{(1)}(t),\ \varphi^{(2)}(t),\ \dots\ ,\ \varphi^{(k)}(t),\ \dots$$

— система линейно независимых дважды непрерывно-дифференцируемых 2π-периодических функций. Первое приближение $x_1(t,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (7) ищем, как 2π-периодическое решение уравнения

$$x_1''(t,\varepsilon) + x_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big[Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon) + \mathcal{A}_1\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_1(t,\varepsilon)\Big]. \tag{12}$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения (12) ищем в виде

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}, \quad \gamma_1(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_1};$$

здесь

$$\varphi_1(t) = \Big[\varphi_1^{(1)}(t)\ \ \varphi_1^{(2)}(t)\ \ \dots\ \ \varphi_1^{(\mu_1)}(t)\Big]$$

— $(1\times\mu_1)$-матрица. Потребуем

$$\Theta\Big(\gamma_1(\varepsilon)\Big) = \left\|\Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big) - 1\Big]\xi_1(t,\varepsilon) + \varepsilon Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon) - \xi_1''(t,\varepsilon)\right\|^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min .$$

Обозначим $(1\times\mu_1)$-матрицу

$$\mathcal{F}_1(t,\varepsilon) = \Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big) - 1\Big]\varphi_1(t) - \varphi_1''(t).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(\gamma_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(t,\varepsilon)\cdot Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)dt,$$

однозначно разрешимому относительно вектора $\gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$ при условии невырожденности $(\mu_1\times\mu_1)$-матрицы Грама [Ахиезер, 1965]

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big) := \int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(t,\varepsilon)\mathcal{F}_1(t,\varepsilon)\,dt.$$

Таким образом, при условии $\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big] \neq 0$ находим вектор

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_1^*(t,\varepsilon)\cdot Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\,dt,$$

в случае $\gamma_1(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon^*]$, $\gamma_1(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_1}$ определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1},$$

к решению 2π-периодической задачи для уравнения (12). Второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (7) ищем как 2π-периодическое решение уравнения

$$x_2''(t,\varepsilon) + x_2(t,\varepsilon) = \varepsilon\Big[Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon) + \mathcal{A}_1\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_2(t,\varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_2\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_1(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(t,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big]. \quad (13)$$

Решение 2π-периодической задачи для уравнения (13) ищем в виде

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \nu_1(\varepsilon)\cos t + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon), \quad \mu_1(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon),$$
$$\xi_2(t,\varepsilon) = \varphi_2(t)\gamma_2(\varepsilon), \quad \gamma_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}, \quad \gamma_2(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_2};$$

здесь

$$\varphi_2(t) = \Big[\varphi_2^{(1)}(t) \ \ \varphi_2^{(2)}(t) \ \ \ldots \ \ \varphi_2^{(\mu_2)}(t)\Big]$$

— $(1\times\mu_2)$-матрица. Условие разрешимости 2π-периодической задачи для уравнения (13) приводит к уравнению

$$D_0\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\cdot\begin{bmatrix}\nu_1(\varepsilon)\\ \zeta_1(\varepsilon)\end{bmatrix} = -\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\xi_1(s,\varepsilon) + \\ + \mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\, ds. \quad (14)$$

При условиях (9) и

$$D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнение (14) имеет по меньшей мере одно непрерывное решение

$$\begin{bmatrix}\nu_1(\varepsilon)\\ \zeta_1(\varepsilon)\end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\cdot\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\xi_1(s,\varepsilon) + \\ + \mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\, ds.$$

Потребуем

$$\Theta\Big(\gamma_2(\varepsilon)\Big) = \Bigg\|\Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big) - 1\Big]x_2(t,\varepsilon) + \varepsilon\Big[Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_2\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_1(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(t,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big] - x_2''(t,\varepsilon)\Bigg\|^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Обозначим $(1\times\mu_2)$-матрицу как

$$\mathcal{F}_2(t,\varepsilon) = \Big[\varepsilon\mathcal{A}_1\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big) - 1\Big]\varphi_2(t) - \varphi_2''(t).$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(\gamma_2(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\gamma_2(\varepsilon) = -\varepsilon\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(t,\varepsilon)\cdot\Big[\mathcal{A}_2\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_1(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(t,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big],$$

однозначно разрешимому относительно вектора $\gamma_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}$ при условии невырожденности $(\mu_2 \times \mu_2)$-матрицы Грама [Ахиезер, 1965]

$$\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big) := \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t,\varepsilon)\mathcal{F}_2(t,\varepsilon)\,dt.$$

Таким образом, при условии $\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big] \neq 0$ находим вектор

$$\gamma_2(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t,\varepsilon) \cdot \Big[\mathcal{A}_2\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_1(\varepsilon) +$$
$$+ \mathcal{R}(y_0(t,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big],$$

в случае $\gamma_2(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon^*]$, $\gamma_2(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_2}$ определяющий наилучшее (в смысле наименьших квадратов) второе приближение $x_2(t,\varepsilon)$ к решению 2π-периодической задачи для уравнения (12). Продолжая рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Следствие. *В случае кратных корней уравнения для порождающих амплитуд* (5) *для любого корня* $\check{c}_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ *в малой окрестности порождающего решения*

$$y_0(t,c_0(\varepsilon)) = c_0(\varepsilon)\cdot\cos t + g[f(s,\varepsilon)](t), \quad c_0(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0],$$

и соответствующей собственной функции $\mu_0(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0]$ *при условии* (9) *и*

$$D_0\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big) \neq 0, \quad D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

$$\det\Big[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot,\varepsilon))\Big] \neq 0, \quad \gamma_k(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon^*], \quad \gamma_k(0) = 0 \in \mathbb{R}^{\mu_k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

периодическая задача для уравнения (1) *имеет по меньшей мере одно решение*

$$y(t,\varepsilon) : y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi],\ y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],\ \mu(\varepsilon) \in C[0,\varepsilon_0],$$

определенное операторной системой (10)*. Для нахождения этого решения*

$$y(t,\varepsilon) = y_0(t,c_0(\varepsilon)) + x(t,\varepsilon),$$

а также собственной функции $\mu(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta(\varepsilon)$ *применима итерационная схема*

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1},$$

$$\gamma_1(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(t,\varepsilon)\cdot Y(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\,dt,$$

$$x_2(t,\varepsilon) \approx \nu_1(\varepsilon)\cos t + \xi_1(t,\varepsilon) + \xi_2(t,\varepsilon),\ \xi_2(t,\varepsilon) = \varphi_2(t)\gamma_2(\varepsilon),\ \mu_1(\varepsilon) = \mu_0(\varepsilon) + \zeta_1(\varepsilon),$$

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\cdot \int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\xi_1(s,\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\,ds,$$

$$\gamma_2(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(t,\varepsilon)\cdot\Big[\mathcal{A}_2\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_1(\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(y_0(t,c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big],$$

$$x_{k+2}(t,\varepsilon) \approx \nu_k(\varepsilon)\cos t + \xi_1(t,\varepsilon) + \ \ldots\ + \xi_{k+2}(t,\varepsilon),$$

$$\xi_{k+2}(t,\varepsilon) = \varphi_{k+2}(t)\gamma_{k+2}(\varepsilon), \quad \mu_{k+1}(\varepsilon) := \mu_0(\varepsilon) + \zeta_{k+1}(\varepsilon), \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \nu_k(\varepsilon) \\ \zeta_k(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\cdot \int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_k(s,\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon)) + x_k(s,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\,ds,$$

$$\gamma_{k+2}(\varepsilon) = -\varepsilon\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_{k+2}(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big]^{-1} \cdot \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{k+2}^*(t,\varepsilon)\cdot\Big[\mathcal{A}_2\Big(y_0(t,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)\zeta_{k+1}(\varepsilon) +$$

$$+\mathcal{R}(y_0(t,c_0(\varepsilon)) + x_{k+1}(s,\varepsilon),\mu_k(\varepsilon),t,\varepsilon)\Big], \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Условия доказанного следствия выполняются в случае задачи о нахождении периодических решений и собственной функции уравнения Матье [Гребеников, Рябов, 1979; Чуйко, Старкова, 2012].

Пример. Условия доказанной теоремы, а также следствия выполняются в случае задачи о нахождении 2π-периодических решений

$$y(t,\varepsilon):\quad y(\cdot,\varepsilon) \in C^2[0,2\pi], \quad y(t,\cdot) \in C[0,\varepsilon_0],$$

а также собственной функции $h(\varepsilon)$ уравнения

$$y'' + \Big(h(\varepsilon) + (1+\varepsilon\sin\varepsilon)\cos 2t\ \sin\varepsilon\Big)\cdot y = \cos 5t + \varepsilon\, y^3. \tag{16}$$

Действительно, уравнение для порождающих амплитуд (6) имеет корень

$$c_0(\varepsilon) = c_0^* = -\frac{1}{24}, \quad \mu_0(\varepsilon) = \mu_0^* = 0,$$

которому соответствует ненулевая матрица

$$D_0\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)=\pi\begin{pmatrix} -\dfrac{191}{384}-\dfrac{5\,\varepsilon^2}{12}+\dfrac{13\,\varepsilon^4}{80}-\dfrac{223\,\varepsilon^6}{10080}+\dfrac{1151\,\varepsilon^8}{725\,760}-\dfrac{1877\,\varepsilon^{10}}{26611200} & 0\end{pmatrix},$$

следовательно, согласно доказанной теореме периодическая задача для уравнения (16) имеет по меньшей мере одно решение, при $\varepsilon=0$ обращающееся в порождающее

$$y_0(t,c_0)=c_0\cdot\cos t+\frac{1}{24}\Big(2\cos t-\cos 5t\Big),$$

для нахождения которого применима итерационная схема (11). Первое приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (16)

$$x_1(t,\varepsilon)=\nu_1(\varepsilon)\cdot\cos t+x_1^{(1)}(t,\varepsilon)$$

определяет функция

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)}(t,\varepsilon)&=\varepsilon g\Big[Y(y_0(s,c_0),\mu_0,s,\varepsilon)\Big](t)=\\
&=\frac{37\,603}{12\,386\,304}\,\varepsilon\,\cos t+\frac{35}{13\,824}\,\varepsilon^3\,\cos t-\frac{91}{92\,160}\,\varepsilon^5\,\cos t+\frac{223}{1\,658\,880}\,\varepsilon^7\,\cos t-\\
&-\frac{1151}{119\,439\,360}\,\varepsilon^9\,\cos t+\frac{1877}{4\,379\,443\,200}\,\varepsilon^{11}\,\cos t-\frac{1}{384}\,\varepsilon\,\cos 3t-\frac{5}{2304}\,\varepsilon^3\,\cos 3t+\\
&+\frac{13}{15\,360}\,\varepsilon^5\,\cos 3t-\frac{223}{1\,935\,360}\,\varepsilon^7\,\cos 3t+\frac{1151}{139\,345\,920}\,\varepsilon^9\,\cos 3t-\frac{1877}{5\,109\,350\,400}\,\varepsilon^{11}\,\cos 3t+\\
&+\frac{1}{442\,368}\,\varepsilon\,\cos 5t-\frac{1}{2304}\,\varepsilon\,\cos 7t-\frac{5}{13\,824}\,\varepsilon^3\,\cos 7t+\frac{13}{92\,160}\,\varepsilon^5\,\cos 7t-\\
&-\frac{223}{11\,612\,160}\,\varepsilon^7\,\cos 7t+\frac{1151}{836\,075\,520}\,\varepsilon^9\,\cos 7t-\frac{1877}{30\,656\,102\,400}\,\varepsilon^{11}\,\cos 7t+\frac{1}{12\,386\,304}\,\varepsilon\,\cos 15t.
\end{aligned}$$

Первое приближение к функции $\nu_1(\varepsilon)$ и к собственной функции $\mu_1(\varepsilon):=\mu_0+\zeta_1(\varepsilon)$ согласно итерационной схеме (11) определяет вектор

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\nu_1(\varepsilon)\\ \zeta_1(\varepsilon)\end{bmatrix}=-D_0^+\Big(c_0(\varepsilon),\mu_0(\varepsilon)\Big)\int_0^{2\pi}\Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s,c_0(\varepsilon)),\mu_0(\varepsilon)\Big)x_1^{(1)}(s,\varepsilon)+\\
+\mathcal{R}(y_0(s,c_0(\varepsilon))+x_1^{(1)}(s,\varepsilon),\mu_0(\varepsilon),s,\varepsilon)\Big]\cos s\,ds,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\nu_1(\varepsilon)=-\frac{989\,021\,\varepsilon}{2\,365\,784\,064}-\frac{182\,435\,\varepsilon^3}{504\,313\,344}+\frac{1\,982\,627\,\varepsilon^5}{14\,048\,027\,121}+\frac{625\,\varepsilon^6}{1\,520\,861\,184}-\\
-\frac{938\,797\,\varepsilon^7}{4\,310\,048\,393}-\frac{81\,044\,\varepsilon^8}{121\,908\,342\,003}+\frac{390\,280\,\varepsilon^9}{1\,603\,922\,499}+\frac{66\,643\,\varepsilon^{10}}{83\,585\,932\,263};
\end{aligned}$$

кроме того $\zeta_1(\varepsilon)=0$. Второе приближение к решению 2π-периодической задачи для уравнения (16) согласно итерационной схеме (11)

$$x_2(t,\varepsilon)=\nu_2(\varepsilon)\cdot\cos t+x_2^{(1)}(t,\varepsilon),\quad x_2^{(1)}(t,\varepsilon)=x_1^{(1)}(t,\varepsilon)+x_2^{(2)}(t,\varepsilon)$$

определяет функция

$$
\begin{aligned}
x_2^{(1)}(t,\varepsilon) = &-\frac{1\,668\,399}{16\,898\,144\,014}\,\varepsilon^2 \cos t - \frac{960\,836}{5\,898\,287\,825}\,\varepsilon^4 \cos t - \frac{164\,266}{44\,910\,912\,647}\,\varepsilon^6 \cos t - \\
&- \frac{20\,309}{780\,938\,835\,577}\,\varepsilon^7 \cos t + \frac{26\,841}{412\,970\,393\,609}\,\varepsilon^8 \cos t + \frac{12\,871}{631\,324\,165\,742}\,\varepsilon^9 \cos t - \\
&- \frac{21\,628}{297\,874\,424\,525}\,\varepsilon^{10} \cos t - \frac{5565}{803\,806\,622\,384}\,\varepsilon^{11} \cos t + \frac{148\,411}{901\,251\,072}\,\varepsilon^2 \cos 3t + \\
&+ \frac{652\,171}{2\,390\,158\,510}\,\varepsilon^4 \cos 3t + \frac{234\,038}{35\,385\,608\,493}\,\varepsilon^6 \cos 3t + \frac{3037}{4\,710\,082\,601\,614}\,\varepsilon^7 \cos 3t - \\
&- \frac{2183}{30\,788\,278\,075}\,\varepsilon^8 \cos 3t - \frac{3364}{5\,469\,961\,357\,821}\,\varepsilon^9 \cos 3t + \frac{6698}{84\,561\,647\,903}\,\varepsilon^{10} \cos 3t + \\
&+ \frac{1697}{4\,334\,306\,030\,836}\,\varepsilon^{11} \cos 3t - \frac{564\,697}{8\,921\,514\,755}\,\varepsilon^2 \cos 5t - \frac{35}{331\,776}\,\varepsilon^4 \cos 5t - \frac{7}{2\,488\,320}\,\varepsilon^6 \cos 5t + \\
&+ \frac{575}{18\,345\,885\,696}\,\varepsilon^7 \cos 5t - \frac{299}{12\,230\,590\,464}\,\varepsilon^9 \cos 5t + \frac{7066}{872\,842\,890\,349}\,\varepsilon^{11} \cos 5t + \\
&+ \frac{5}{42\,467\,328}\,\varepsilon^2 \cos 7t + \frac{25}{254\,803\,968}\,\varepsilon^4 \cos 7t - \frac{25\,066\,025}{655\,068\,987\,896\,123}\,\varepsilon^6 \cos 7t - \\
&- \frac{875}{293\,534\,171\,136}\,\varepsilon^7 \cos 7t + \frac{38\,294}{16\,469\,739\,999\,241}\,\varepsilon^9 \cos 7t - \frac{1414}{1\,836\,502\,946\,419}\,\varepsilon^{11} \cos 7t - \\
&- \frac{97}{35\,205\,120}\,\varepsilon^2 \cos 9t - \frac{18\,383}{4\,034\,506\,752}\,\varepsilon^4 \cos 9t - \frac{18\,173}{170\,176\,441\,304}\,\varepsilon^6 \cos 9t - \\
&- \frac{4177}{1\,149\,141\,844\,406}\,\varepsilon^7 \cos 9t + \frac{694}{195\,758\,726\,377}\,\varepsilon^8 \cos 9t + \frac{8651}{3\,045\,253\,483\,275}\,\varepsilon^9 \cos 9t - \\
&- \frac{4633}{1\,169\,824\,170\,602}\,\varepsilon^{10} \cos 9t - \frac{2556}{2\,690\,226\,757\,033}\,\varepsilon^{11} \cos 9t - \frac{1}{35\,205\,120}\,\varepsilon^2 \cos 11t - \\
&- \frac{95}{4\,034\,506\,752}\,\varepsilon^4 \cos 11t + \frac{5512}{600\,256\,698\,449}\,\varepsilon^6 \cos 11t + \frac{9389}{12\,602\,215\,359\,445}\,\varepsilon^7 \cos 11t + \\
&+ \frac{1388}{587\,276\,179\,131}\,\varepsilon^8 \cos 11t - \frac{12\,311}{21\,321\,948\,431\,206}\,\varepsilon^9 \cos 11t - \frac{9757}{3\,695\,437\,437\,696}\,\varepsilon^{10} \cos 11t + \\
&+ \frac{1059}{5\,726\,365\,267\,492}\,\varepsilon^{11} \cos 11t + \frac{85}{4\,161\,798\,144}\,\varepsilon^2 \cos 13t + \frac{425}{24\,970\,788\,864}\,\varepsilon^4 \cos 13t - \\
&- \frac{221}{33\,294\,385\,152}\,\varepsilon^6 \cos 13t - \frac{25}{73\,383\,542\,784}\,\varepsilon^7 \cos 13t + \frac{13}{48\,922\,361\,856}\,\varepsilon^9 \cos 13t - \\
&- \frac{808}{9\,182\,514\,732\,095}\,\varepsilon^{11} \cos 13t - \frac{5}{355\,140\,108\,288}\,\varepsilon^2 \cos 15t + \frac{25}{114\,152\,177\,664}\,\varepsilon^7 \cos 15t - \\
&- \frac{13}{76\,101\,451\,776}\,\varepsilon^9 \cos 15t + \frac{447}{7\,902\,114\,575\,557}\,\varepsilon^{11} \cos 15t + \frac{5}{2\,378\,170\,368}\,\varepsilon^2 \cos 17t + \\
&+ \frac{25}{14\,269\,022\,208}\,\varepsilon^4 \cos 17t - \frac{13}{19\,025\,362\,944}\,\varepsilon^6 \cos 17t + \frac{5}{440\,301\,256\,704}\,\varepsilon^7 \cos 19t - \\
&- \frac{5599}{632\,114\,547\,765\,563}\,\varepsilon^9 \cos 19t + \frac{166}{56\,595\,202\,185\,437}\,\varepsilon^{11} \cos 19t - \frac{1}{5\,935\,913\,238\,528}\,\varepsilon^2 \cos 25t.
\end{aligned}
$$

Второе приближение к функции $v_2(\varepsilon)$ и к собственной функции $\mu_2(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_2(\varepsilon)$ согласно итерационной схеме (11) определяет вектор

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_2(\varepsilon) \\ \zeta_2(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \int_0^{2\pi} \Big[\mathcal{A}_1\Big(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon)\Big) x_2^{(1)}(s,\varepsilon) + \\
+ \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + x_2^{(1)}(s,\varepsilon), \mu_1(\varepsilon), s, \varepsilon)\Big] \cos s\, ds,
\end{aligned}
$$

где

$$\nu_2(\varepsilon) = -\frac{989\,021\,\varepsilon}{2\,365\,784\,064} - \frac{596\,789\,\varepsilon^2}{8\,990\,605\,292} - \frac{1\,290\,714\,\varepsilon^3}{3\,568\,595\,861} - \frac{814\,481\,\varepsilon^4}{7\,382\,682\,406} + \\ + \frac{1\,094\,962\,\varepsilon^5}{7\,752\,680\,109} - \frac{1\,055\,403\,\varepsilon^6}{372\,069\,527\,548} - \frac{212\,363\,\varepsilon^7}{11\,027\,126\,545} - \frac{55\,169\,\varepsilon^8}{113\,465\,964\,455} + \\ + \frac{126\,807\,\varepsilon^9}{88\,877\,006\,657} + \frac{109\,466\,\varepsilon^{10}}{193\,938\,180\,265} - \frac{95\,653\,\varepsilon^{11}}{614\,250\,962\,130} - \frac{71\,4736\,\varepsilon^{12}}{1\,290\,619\,820\,509};$$

кроме того $\zeta_2(\varepsilon) = 0$. Найденные три приближения к 2π-периодическому решению уравнения (16) и его собственной функции $\mu(\varepsilon)$ характеризуют невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) = \left\| y_k''(t,\varepsilon) + \Big(h_k(\varepsilon) + (1+\varepsilon\sin\varepsilon)\cos 2t\ \sin\varepsilon\Big)\cdot y_k(t,\varepsilon) - \cos 5t - y_k^3(t,\varepsilon)\right\|_{C[0;2\pi]}, \quad k = 0,\ 1,\ 2\ .$$

Здесь

$$h_k(\varepsilon) := 1 - \varepsilon\mu_k(\varepsilon), \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

В частности, при $\varepsilon = 0{,}1$ имеем:

$$\Delta_0(0{,}1) \approx 0{,}00419402, \quad \Delta_1(0{,}1) \approx 0{,}0000270803, \quad \Delta_2(0{,}1) \approx 2{,}09137\times 10^{-7}.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0{,}01) \approx 0{,}000415978, \quad \Delta_1(0{,}01) \approx 2{,}66437\times 10^{-7}, \quad \Delta_2(0{,}01) \approx 2{,}04107\times 10^{-10}.$$

Для нахождения приближений к 2π-периодическому решению уравнения (16) и его собственной функции $h(\varepsilon)$ более эффективно использование техники наименьших квадратов (15). Условия доказанного следствия при этом выполнены. Положим, к примеру,

$$\varphi(\tau) = \Big[\ \cos t \quad \cos 3t \quad \cos 5t \ \ \cos 7t \quad \cos 9t \quad \cos 11t \quad \cos 13t \quad \cos 15t\ \Big].$$

Матрица Грама при этом невырождена

$$\det\Big[\Gamma\Big(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)\Big)\Big] \approx \\ \approx 26\,022\,275\,212\,528\,839\,872\,196\,116\,480\,\varepsilon^2 + 3\,302\,289\,754\,263\,641\,387\,782\,111\,232\,\varepsilon^3 + \\ + 43\,618\,482\,736\,669\,361\,856\,808\,222\,720\,\varepsilon^4 + 8\,236\,807\,154\,318\,936\,664\,333\,877\,248\,\varepsilon^5 + \\ + 1\,324\,293\,262\,901\,376\,257\,521\,352\,704\,\varepsilon^6 + 3\,617\,130\,537\,076\,922\,636\,923\,043\,840\,\varepsilon^7 - \\ - 11\,875\,352\,165\,949\,350\,567\,741\,489\,152\,\varepsilon^8 + \ \dots\ + \neq 0.$$

Схема (15) определяет первое приближение к решению периодической задачи для уравнения (16):

$$x_1(t,\varepsilon) \approx \xi_1(t,\varepsilon) = \varphi_1(t)\gamma_1(\varepsilon), \quad \gamma_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^8, \quad \gamma_1(0) = 0,$$

где

$$\gamma_1(\varepsilon) := \Big(\ \gamma_1^a(\varepsilon)\ \gamma_1^b(\varepsilon)\ \gamma_1^c(\varepsilon)\ \gamma_1^d(\varepsilon)\ \gamma_1^e(\varepsilon)\ \gamma_1^f(\varepsilon)\ \gamma_1^g(\varepsilon)\ \gamma_1^h(\varepsilon)\ \Big)^* \in C[0,\varepsilon_0];$$

здесь

$$\gamma_1^a(\varepsilon) \approx \frac{9\,673\,458\,724\,382\,\varepsilon}{3\,695\,261\,232\,713\,925} - \frac{1\,071\,874\,\varepsilon^2}{6\,474\,950\,609} + \frac{11\,364\,749\,\varepsilon^3}{5\,202\,423\,530} - \frac{946\,126\,\varepsilon^4}{3\,444\,254\,885} - \\ - \frac{17\,287\,344\,\varepsilon^5}{21\,332\,723\,177} - \frac{70\,6339\,\varepsilon^6}{70\,107\,040\,820} + \frac{955\,191\,\varepsilon^7}{7\,281\,062\,761} + \frac{996\,986\varepsilon^8}{14\,156\,525\,283},$$

$$\gamma_1^b(\varepsilon) \approx -\frac{\varepsilon}{384} + \frac{4\,372\,621\,\varepsilon^2}{26\,553\,485\,683} - \frac{2\,675\,795\,\varepsilon^3}{1\,224\,903\,309} + \frac{555\,308\,\varepsilon^4}{2\,026\,828\,761} + \frac{2\,199\,152\varepsilon^5}{2\,713\,110\,537} + \\ + \frac{207\,843\varepsilon^6}{20\,104\,291\,900} - \frac{1\,133\,731\,\varepsilon^7}{8\,636\,776\,121} - \frac{334\,104\,\varepsilon^8}{4\,741\,074\,857},$$

$$\gamma_1^c(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{442\,368} - \frac{564\,697\,\varepsilon^2}{8\,921\,514\,755} + \frac{62\,785\,\varepsilon^3}{18\,233\,295\,074} - \frac{714\,703\,\varepsilon^4}{6\,754\,784\,180} + \frac{39\,885\,\varepsilon^5}{4\,643\,811\,926} - \\ - \frac{52\,278\,\varepsilon^6}{13\,552\,434\,187} + \frac{152\,491\,\varepsilon^7}{39\,496\,582\,712} + \frac{204\,651\,\varepsilon^8}{7\,365\,925\,948},$$

$$\gamma_1^d(\varepsilon) \approx -\frac{\varepsilon}{2304} + \frac{5\,\varepsilon^2}{42\,467\,328} - \frac{4\,077\,499\varepsilon^3}{11\,251\,925\,763} + \frac{79\,907\,\varepsilon^4}{594\,345\,010\,584} + \frac{765\,755\varepsilon^5}{5\,496\,037\,604} + \\ + \frac{46\,489\,\varepsilon^6}{565\,234\,777\,339} - \frac{398\,161\,\varepsilon^7}{19\,927\,789\,809} + \frac{20\,635\,\varepsilon^8}{189\,567\,101\,034},$$

$$\gamma_1^e(\varepsilon) \approx -\frac{\varepsilon}{41\,517\,513\,304\,441\,348\,445\,294} - \frac{97\,\varepsilon^2}{35\,205\,120} + \frac{4\,912\,\varepsilon^3}{1\,469\,610\,714\,209} - \frac{442\,843\,\varepsilon^4}{97\,091\,992\,479} + \\ + \frac{5\,486\,\varepsilon^5}{949\,641\,923\,803} - \frac{3\,070\,\varepsilon^6}{25\,162\,867\,673} + \frac{63\,365\,\varepsilon^7}{55\,953\,243\,577\,746} + \frac{83\,213\,\varepsilon^8}{68\,514\,512\,221},$$

$$\gamma_1^f(\varepsilon) \approx -\frac{\varepsilon}{62\,276\,269\,956\,662\,022\,667\,941} - \frac{\varepsilon^2}{35\,205\,120} - \frac{6\,350\,\varepsilon^3}{661\,569\,973\,411} - \frac{10\,397\,\varepsilon^4}{438\,784\,682\,647} - \\ - \frac{33\,071\,\varepsilon^5}{1\,299\,549\,868\,549} + \frac{3\,107\,\varepsilon^6}{352\,462\,806\,362} - \frac{12\,746\,\varepsilon^7}{1\,019\,653\,767\,395} - \frac{1\,852\,\varepsilon^8}{1\,314\,091\,331\,241},$$

$$\gamma_1^g(\varepsilon) \approx \frac{85\,\varepsilon^2}{4\,161\,798\,144} - \frac{2\,564\,\varepsilon^3}{1\,883\,648\,250\,323} + \frac{14\,423\,\varepsilon^4}{843\,261\,025\,790} - \frac{2\,558\,\varepsilon^5}{1\,129\,454\,832\,849} - \\ - \frac{5\,308\,\varepsilon^6}{822\,079\,475\,925} - \frac{2\,213\,\varepsilon^7}{25\,944\,330\,408\,267} + \frac{1\,837\,\varepsilon^8}{1\,957\,633\,061\,731},$$

$$\gamma_1^h(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{12\,386\,304} - \frac{5\,\varepsilon^2}{355\,140\,108\,288} + \frac{2\,706\,\varepsilon^3}{6\,543\,799\,671\,187} - \frac{341\,\varepsilon^4}{14\,787\,916\,001\,055} + \\ + \frac{1\,575\varepsilon^5}{2\,278\,608\,054\,533} - \frac{363\varepsilon^6}{6\,310\,709\,366\,485} + \frac{3\,827\,\varepsilon^7}{153\,019\,619\,704\,307} - \frac{186\,\varepsilon^8}{7\,192\,922\,493\,965},$$

при этом

$$
\begin{aligned}
\xi_1(t,\varepsilon) \approx{}& \frac{9\,673\,458\,724\,382}{3\,695\,261\,232\,713\,925}\,\varepsilon\,\cos t - \frac{930\,537}{5\,621\,165\,468}\,\varepsilon^2\,\cos t + \frac{11\,364\,749}{5\,202\,423\,530}\,\varepsilon^3\,\cos t - \\
&- \frac{946\,126}{3\,444\,254\,885}\,\varepsilon^4\,\cos t - \frac{17\,287\,344}{21\,332\,723\,177}\,\varepsilon^5\,\cos t - \frac{706\,339}{70\,107\,040\,820}\,\varepsilon^6\,\cos t + \\
&+ \frac{955\,191}{7\,281\,062\,761}\,\varepsilon^7\,\cos t + \frac{996\,986}{14\,156\,525\,283}\,\varepsilon^8\,\cos t - \frac{1}{384}\,\varepsilon\,\cos 3t + \\
&+ \frac{4\,372\,621}{26\,553\,485\,683}\,\varepsilon^2\,\cos 3t - \frac{2\,675\,795}{1\,224\,903\,309}\,\varepsilon^3\,\cos 3t + \frac{555\,308}{2\,026\,828\,761}\,\varepsilon^4\,\cos 3t + \\
&+ \frac{2\,199\,152}{2\,713\,110\,537}\,\varepsilon^5\,\cos 3t + \frac{207\,843}{20\,104\,291\,900}\,\varepsilon^6\,\cos 3t - \frac{1\,133\,731}{8\,636\,776\,121}\,\varepsilon^7\,\cos 3t - \\
&- \frac{334\,104}{4\,741\,074\,857}\,\varepsilon^8\,\cos 3t + \frac{1}{442\,368}\,\varepsilon\,\cos 5t - \frac{564\,697}{8\,921\,514\,755}\,\varepsilon^2\,\cos 5t + \\
&+ \frac{62\,785}{18\,233\,295\,074}\,\varepsilon^3\,\cos 5t - \frac{714\,703}{6\,754\,784\,180}\,\varepsilon^4\,\cos 5t + \frac{39\,885}{4\,643\,811\,926}\,\varepsilon^5\,\cos 5t - \\
&- \frac{52\,278}{13\,552\,434\,187}\,\varepsilon^6\,\cos 5t + \frac{152\,491}{39\,496\,582\,712}\,\varepsilon^7\,\cos 5t + \frac{204\,651}{7\,365\,925\,948}\,\varepsilon^8\,\cos 5t - \\
&- \frac{1}{2304}\,\varepsilon\,\cos 7t + \frac{5}{42\,467\,328}\,\varepsilon^2\,\cos 7t - \frac{4\,077\,499}{11\,251\,925\,763}\,\varepsilon^3\,\cos 7t + \\
&+ \frac{79\,907}{594\,345\,010\,584}\,\varepsilon^4\,\cos 7t + \frac{765\,755}{5\,496\,037\,604}\,\varepsilon^5\,\cos 7t + \frac{46\,489}{565\,234\,777\,339}\,\varepsilon^6\,\cos 7t - \\
&- \frac{398\,161}{19\,927\,789\,809}\,\varepsilon^7\,\cos 7t + \frac{20\,635}{189\,567\,101\,034}\,\varepsilon^8\,\cos 7t - \frac{1}{41\,517\,513\,304\,441\,353\,510\,804}\,\varepsilon\,\cos 9t - \\
&- \frac{97}{35\,205\,120}\,\varepsilon^2\,\cos 9t + \frac{4912}{1\,469\,610\,714\,209}\,\varepsilon^3\,\cos 9t - \frac{442\,843}{97\,091\,992\,479}\,\varepsilon^4\,\cos 9t + \\
&+ \frac{5486}{949\,641\,923\,803}\,\varepsilon^5\,\cos 9t - \frac{3070}{25\,162\,867\,673}\,\varepsilon^6\,\cos 9t + \frac{63\,365}{55\,953\,243\,577\,746}\,\varepsilon^7\,\cos 9t + \\
&+ \frac{83\,213}{68\,514\,512\,221}\,\varepsilon^8\,\cos 9t - \frac{1}{62\,276\,269\,956\,662\,022\,667\,941}\,\varepsilon\,\cos 11t - \frac{1}{35\,205\,120}\,\varepsilon^2\,\cos 11t - \\
&- \frac{6350}{661\,569\,973\,411}\,\varepsilon^3\,\cos 11t - \frac{10\,397}{438\,784\,682\,647}\,\varepsilon^4\,\cos 11t - \frac{33\,071}{1\,299\,549\,868\,549}\,\varepsilon^5\,\cos 11t + \\
&+ \frac{3107}{352\,462\,806\,362}\,\varepsilon^6\,\cos 11t - \frac{12\,746}{1\,019\,653\,767\,395}\,\varepsilon^7\,\cos 11t - \frac{1852}{1\,314\,091\,331\,241}\,\varepsilon^8\,\cos 11t + \\
&+ \frac{85}{4\,161\,798\,144}\,\varepsilon^2\,\cos 13t - \frac{2564}{1\,883\,648\,250\,323}\,\varepsilon^3\,\cos 13t + \frac{14\,423}{843\,261\,025\,790}\,\varepsilon^4\,\cos 13t - \\
&- \frac{2558}{1\,129\,454\,832\,849}\,\varepsilon^5\,\cos 13t - \frac{5308}{822\,079\,475\,925}\,\varepsilon^6\,\cos 13t - \frac{2213}{25\,944\,330\,408\,267}\,\varepsilon^7\,\cos 13t + \\
&+ \frac{1837}{1\,957\,633\,061\,731}\,\varepsilon^8\,\cos 13t + \frac{1}{12\,386\,304}\,\varepsilon\,\cos 15t - \frac{5}{355\,140\,108\,288}\,\varepsilon^2\,\cos 15t + \\
&+ \frac{2706}{6\,543\,799\,671\,187}\,\varepsilon^3\,\cos 15t - \frac{341}{14\,787\,916\,001\,055}\,\varepsilon^4\,\cos 15t + \frac{1575}{2\,278\,608\,054\,533}\,\varepsilon^5\,\cos 15t - \\
&- \frac{363}{6\,310\,709\,366\,485}\,\varepsilon^6\,\cos 15t + \frac{3827}{153\,019\,619\,704\,307}\,\varepsilon^7\,\cos 15t - \frac{186}{7\,192\,922\,493\,965}\,\varepsilon^8\,\cos 15t.
\end{aligned}
$$

Первое приближение к функции $\nu_1(\varepsilon)$ и к собственной функции $\mu_1(\varepsilon) := \mu_0 + \zeta_1(\varepsilon)$ согласно итерационной схеме (15) определяет вектор

$$\begin{bmatrix} \nu_1(\varepsilon) \\ \zeta_1(\varepsilon) \end{bmatrix} = -D_0^+\Big(c_0(\varepsilon), \mu_0(\varepsilon)\Big) \cdot \int\limits_0^{2\pi} [\mathcal{A}_1(y_0(s, c_0(\varepsilon)), \mu_0(\varepsilon))\xi_1(s, \varepsilon) +$$

$$+ \mathcal{R}(y_0(s, c_0(\varepsilon)) + \xi_1(s, \varepsilon), \mu_0(\varepsilon), s, \varepsilon)] \cos s \, ds,$$

где

$$\nu_1(\varepsilon) = \frac{80\,551\,\varepsilon^2}{187\,418\,427\,555} + \frac{69\,299\,\varepsilon^3}{1\,870\,957\,842\,498} + \frac{40\,230\,\varepsilon^4}{116\,368\,131\,083} + \frac{30\,061\,\varepsilon^5}{474\,827\,389\,059} -$$

$$-\frac{92\,518\,\varepsilon^6}{591\,537\,465\,595} + \frac{1\,049\varepsilon^7}{173\,462\,596\,370} + \frac{10\,604\,\varepsilon^8}{1\,074\,292\,473\,059} + \frac{28\,293\,\varepsilon^9}{176\,181\,572\,288} + \frac{52\,279\varepsilon^{10}}{323\,583\,527\,845};$$

кроме того, $\zeta_1(\varepsilon) = 0$. Найденные приближения к 2π-периодическому решению уравнения (16) и его собственной функции $\mu(\varepsilon)$ характеризуют невязки $\Delta_k(\varepsilon)$, $k = 0, 1$. В частности, при $\varepsilon = 0{,}1$ имеем:

$$\Delta_0(0{,}1) \approx 0{,}00419402, \quad \Delta_1(0{,}1) \approx 7{,}24231 \times 10^{-9}.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ невязки уменьшаются:

$$\Delta_0(0{,}01) \approx 0{,}000415978, \quad \Delta_1(0{,}01) \approx 6{,}09988 \times 10^{-11}.$$

В заключение заметим, что частным случаем неавтономной периодической задачи в случае параметрического резонанса, в том числе и неавтономной периодической задачи для уравнения типа Хилла, является автономная периодическая задача, которая после замены независимой переменной приведена к неавтономной периодической задаче, содержащей дополнительную неизвестную, отвечающую за поправку на период искомого решения [Малкин, 1956; Бойчук, Чуйко, 1992; Chujko, Boichuk, 2009].

Список литературы

Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965.— 408 с.

Бойчук А. А., Чуйко С. М. Автономные слабонелинейные краевые задачи // Дифференц. уравнения. — 1992. — Т. 28, № 10. — С. 1668–1674.

Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 432 с.

Каудерер Г. Нелинейная механика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961. — 778 с.

Лика Д. К., Рябов Ю. А. Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний. — Кишинев: Штиница, 1974. — 292 с.

Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Гостехиздат, 1956. — 491 с.

Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний // Журн. техн. физики. — 1934. — № 3. — С. 5–29.

Чуйко А. С. Область сходимости итерационной процедуры для слабонелинейной краевой задачи // Нелинейные колебания. — 2005.— Т. 8, № 2. — С. 278–288.

Чуйко С. М., Кулиш П. В. Линейная нетерова краевая задача в случае параметрического резонанса // Труды Инст. прикладной математики и механики НАН Украины. — 2012. — Т. 24. — С. 243–252.

Чуйко С. М., Старкова О. В. Модифицированная двухшаговая итерационная техника для построения функций Матье // Комп. исследов. и моделирование. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 31–43.

Чуйко С. М., Чуйко Е. В., Кулиш П. В. Периодическая задача для уравнения типа Хилла в случае параметрического резонанса // Динамические системы. — 2013. — Т. 3(31), № 1–2. — С. 151–158.

Шмидт Г. Параметрические колебания. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. — М.: Наука, 1987. — 328 с.

Boichuk A. A., Samoilenko A. M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.

Chujko S. M., Boichuk I. A. An autonomous Noetherian boundary value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — 2009.— Issue 12, Vol. 3. — P. 405–416.

Chuiko S. M. Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary value problem // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — 2006. — Issue 9, Vol. 3. — P. 405–422.

Chuiko S. M. On approximate solution of boundary value problems by the least square method // Nonlinear Oscillations (N.Y.). — 2008. — Issue 11, Vol. 4. — P. 585–604.