

УДК: 517.9, 519.6

## Переход к хаосу в системах «реакция–диффузия». Простейшие модели

Г. Г. Малинецкий, Д. С. Фаллер<sup>а</sup>

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,  
Россия, 125047, г. Москва, Миусская пл., 4

E-mail: <sup>а</sup>dfaller@keldysh.ru

Получено 12 ноября 2013 г.,  
после доработки 25 декабря 2013 г.

В работе рассматривается появление хаотических аттракторов в системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих в теории систем «реакция–диффузия». Исследуются динамика соответствующих одномерных и двумерных отображений и ляпуновские показатели возникающих аттракторов. Показано, что переход к хаосу происходит по нетрадиционному сценарию, связанному с многократным рождением и исчезновением хаотических режимов, который ранее был изучен для одномерных отображений с острой вершиной и квадратичным минимумом. С помощью численного анализа были исследованы характерные особенности системы: наличие областей бистабильности и гиперболичности, кризис хаотических аттракторов.

Ключевые слова: нелинейная динамика, системы «реакция–диффузия», бифуркации, самоподобие, «каскад каскадов», кризис аттрактора, эргодичность, бистабильность

### Transition to chaos in the «reaction–diffusion» systems. The simplest models

G. G. Malinetsky, D. S. Faller

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, 4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia*

**Abstract.** — The article discusses the emergence of chaotic attractors in the system of three ordinary differential equations arising in the theory of «reaction-diffusion» systems. The dynamics of the corresponding one- and two-dimensional maps and Lyapunov exponents of such attractors are studied. It is shown that the transition to chaos is in accordance with a non-traditional scenario of repeated birth and disappearance of chaotic regimes, which had been previously studied for one-dimensional maps with a sharp apex and a quadratic minimum. Some characteristic features of the system — zones of bistability and hyperbolicity, the crisis of chaotic attractors — are studied by means of numerical analysis.

Keywords: nonlinear dynamics, «reaction–diffusion» systems, bifurcation, self-similarity, «cascade of cascades», attractor crisis, ergodicity, bistability

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 3–12 (Russian).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 11-01-00887 и № 13-01-00617

© 2014 Георгий Геннадьевич Малинецкий, Дмитрий Сергеевич Фаллер

## Введение

В настоящее время одними из наиболее популярных классов нелинейных математических моделей являются системы «реакция–диффузия» (см., например, [Николис, 1979; Хакен, 1980; Режимы..., 1999])

$$\begin{cases} X_t = D_1 \Delta X + f_1(X, Y, \lambda), \\ Y_t = D_2 \Delta Y + f_2(X, Y, \lambda), \end{cases} \quad (1)$$

где  $X(\vec{r}, t)$  и  $Y(\vec{r}, t)$  — концентрации реагирующих веществ,  $\vec{r}$  и  $t$  — пространственная и временная координаты;  $f_1(X, Y, \lambda)$  и  $f_2(X, Y, \lambda)$  — нелинейные функции, определяющие кинетику их взаимодействия;  $D_1$  и  $D_2$  — соответствующие коэффициенты диффузии;  $\Delta$  — оператор Лапласа. Впервые модель подобного вида была предложена в работе А. Тьюринга [Turing, 1952]; на сегодняшний день этим системам и их многочисленным приложениям посвящено большое количество работ.

В соответствии с исследовательской программой А. Пуанкаре одним из наиболее интересных направлений изучения нелинейных систем является анализ бифуркаций и универсальных описаний изучаемых объектов в окрестностях точек бифуркации. Этот подход был применен к системам вида (1), для которых типичными являются бифуркация Андронова–Хопфа (бифуркация рождения предельного цикла) и бифуркация Тьюринга (диффузионная неустойчивость). Универсальное описание связано с наличием малого параметра  $\varepsilon \approx \sqrt{\lambda - \lambda_0}$  и возможностью перехода к медленным переменным  $\vec{R} = \varepsilon \vec{r}$  и  $T = \varepsilon^2 t$ . В простейшем одномерном (и наиболее типичном) случае это приводит к следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} W_t &= (\pm 1 + ic_0)W + (1 + ic_1)W_{rr} - (1 + ic_2)|W|^2 W, \quad r \in [0, l], \quad t \geq 0, \\ W_r(0, t) &= W_r(l, t) = 0, \quad W(r, 0) = W_0(r), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $W = u(r, t) + iv(r, t)$ .

Вывод этого уравнения на физическом уровне строгости и анализ области его применимости были даны И. Курамото и Т. Цузуки [Kuramoto, Tsuzuki, 1975]. Более строгое обоснование было предложено С.А. Кашенко в построенной им теории квазинормальных форм, в рамках которой можно рассматривать уравнения с малой диффузией, пропорциональной  $\varepsilon$  [Кашенко, 1988]. Нетривиальные аттракторы уравнение имеет, когда выбран знак «плюс». От коэффициента  $c_0$  можно избавиться заменой переменных. Полагая, что в решении при небольших  $l \leq \pi$  существенны только две первые гармоники и пренебрегая остальными, получаем так называемую двухмодовую систему, упрощение которой (см., например, [Ахромеева и др., 2007]) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_2 \sin\theta), \\ \dot{\eta} = 2\eta - 2\eta\left(\xi + \frac{3}{4}\eta\right) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) - 2k^2\eta, \\ \dot{\theta} = c_2\left(2\xi - \frac{1}{2}\eta\right) + \sin\theta(2\xi + \eta) + c_2 \cos\theta(2\xi - \eta) + 2c_1 k^2. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) и будет объектом нашего исследования. Поскольку  $\theta$  имеет смысл разности фаз, будем для удобства считать, что  $\theta$  приведено по модулю  $2\pi$  (аналогичный подход используется, например, при изучении осциллятора Дуффинга с гармоническим внешним воздействием). По этой причине система (3) имеет лишь конечное число особых точек (хотя правые части и содержат тригонометрические функции). Заметим, что возможность перейти от систе-

мы четырех дифференциальных уравнений к трем связана с симметрией исходной задачи  $W \rightarrow We^{i\alpha}$ ,  $\alpha = \text{const}$ , которую сохраняют галеркинские системы.

В работе [Ахромеева и др., 2007] был подробно изучен один хаотический аттрактор, определяющий асимптотику этой системы при  $t \rightarrow \infty$  со значениями параметров  $c_1 = 7$ ,  $c_2 = -6$ ,  $k = 1$  (рис. 1). Оказалось, что это решение обладает многими интересными геометрическими и эргодическими свойствами. Для численного решения (3) использовался стандартный метод Рунге–Кутты 4-ого порядка; шаг интегрирования был выбран таким образом, чтобы исключить появление «вычислительных артефактов».

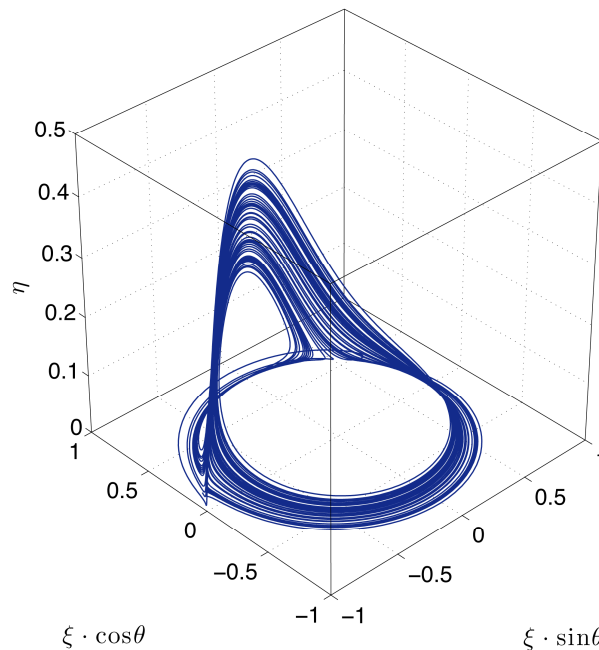


Рис. 1. Хаотический аттрактор системы (3). Траектория получена для начальных данных  $(0.5, 0.5, \pi)$  при значениях параметров  $c_1 = 7$ ,  $c_2 = -6$ ,  $k = 1$

В настоящей работе на основе результатов численного анализа исследуется, как возникает и исчезает этот хаотический аттрактор при изменении параметров в пространстве  $(c_1, c_2, k)$ . Мы будем проводить однопараметрический анализ, фиксируя два параметра и варьируя третий.

## Инструменты анализа и общая картина

Для исследования динамики близких траекторий в работе используются ляпуновские показатели. Для расчета ляпуновских показателей в настоящей работе использовался численный метод, предложенный Д. Бенеттином и соавторами [Benettin et al., 1980].

Странный аттрактор системы (3) порождает в сечении Пуанкаре плоскостью  $\theta = 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  отображение

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = F(\xi_n, \eta_n), \\ \eta_{n+1} = G(\xi_n, \eta_n). \end{cases}$$

У этого отображения есть направление, обеспечивающее сильное сжатие, и направление, вдоль которого происходит растяжение, расположенное под достаточно большим углом к сжимающему направлению во всей области, которой принадлежит этот странный аттрактор (см. схематичное изображение на рис. 2). Это позволило проверить обобщенные условия

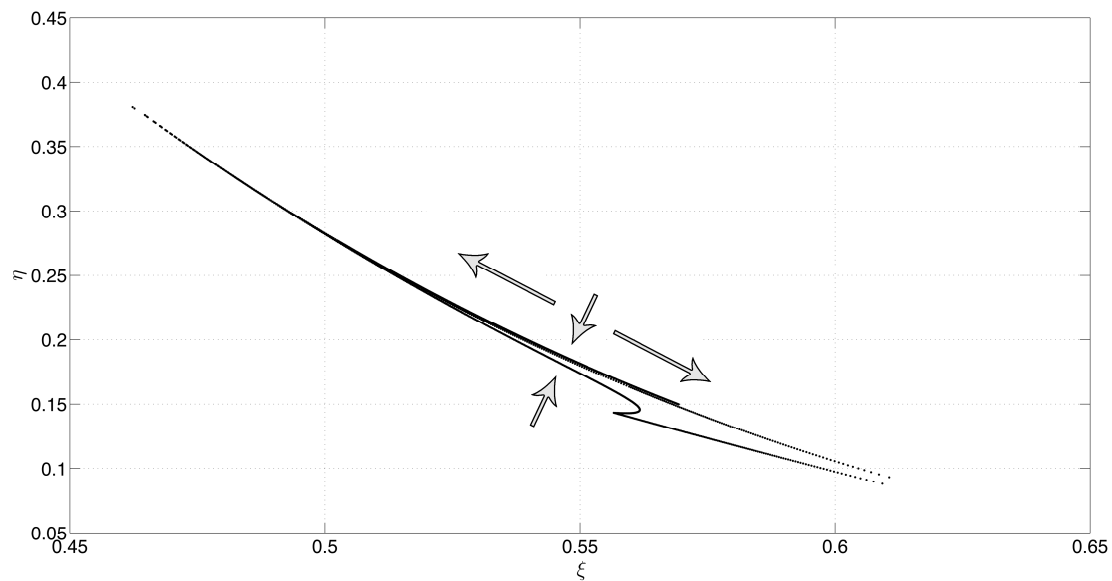


Рис. 2. Сжимающее и растягивающее направления двумерного отображения исходной области  $[0.4, 0.6] \times [0.1, 0.4]$ , переводящего ее в себя,  $c_1 = 7$ ,  $c_2 = -6$ ,  $k = 1$

гиперболичности, гарантирующие ряд характеристик хаоса, связанных с порождаемым им двумерным отображением [Ахромеева и др., 2007].

## Одномерные отображения и сценарии возникновения хаоса

Значительная часть идей и представлений нелинейной динамики оказалась связана с исследованием одномерных отображений (см., например, [Ахромеева и др., 2007]). Хорошо известны результаты для логистического отображения и отображения «тент». Еще один класс отображений, который будет важен для дальнейшего анализа, — отображения с «острой» степенной вершиной:

$$x_{n+1} = \frac{1 - |x - \lambda|^\alpha}{1 + |x - \lambda|^2}, \quad \alpha < 1. \quad (4)$$

Для логистического отображения после каждой бифуркации удвоения периода ближайший к вершине ( $x = 0.5$ ) элемент цикла  $S^{2^n}$  перескакивает с одной ветви ( $x < 0.5$ ) на другую ( $x > 0.5$ ) строго поочередно: влево–вправо–влево–.... Каждый раз, когда элемент цикла попадает на вершину  $x = 0.5$ , возникает сверхустойчивый цикл. Эти переходы через вершину не приводят к усложнению устойчивых циклов и появлению устойчивых режимов.

В отображении (4), бифуркационная диаграмма которого представлена на рисунке 3,  $\partial_x f(x) = \infty$  при  $x = \lambda$ , поэтому «гладкий» переход элемента устойчивого цикла через вершину невозможен. В связи с изменением топологии циклов (числа элементов соответственно на левой и на правой частях отображения) появляется сложная структура, представляющая собой бесконечное количество каскадов бифуркаций удвоения периода. Такая структура, подробно изученная в работе [Боколишвили, Малинецкий, 1987], получила название «каскад каскадов».

## Качественные особенности бифуркационных диаграмм

Приведенные расчеты для трех бифуркационных диаграмм, возникающих соответственно при изменении параметров  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $k$  и фиксированной паре других параметров системы, показывает их удивительное сходство.

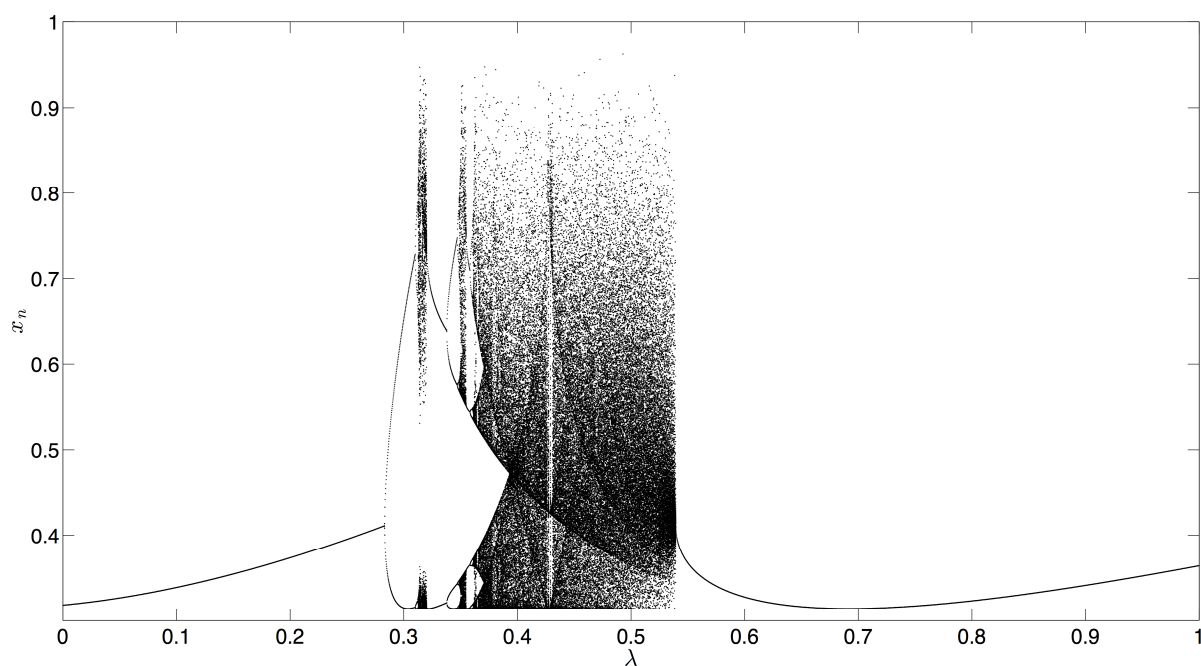


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для отображения с острой степенной вершиной при  $\alpha = 0.25$

Хаотические режимы возникают и исчезают при изменении бифуркационного параметра неоднократно, при этом возникновение зон хаотического поведения является результатом последовательности бифуркаций удвоения периода. Каждый раз появляются области, в которых нет «оконной структуры». Исчезновения аттракторов похожи одно на другое. По этим причинам далее мы подробно остановимся на исследовании перехода к хаосу при изменении параметра  $c_1$  (рис. 4).

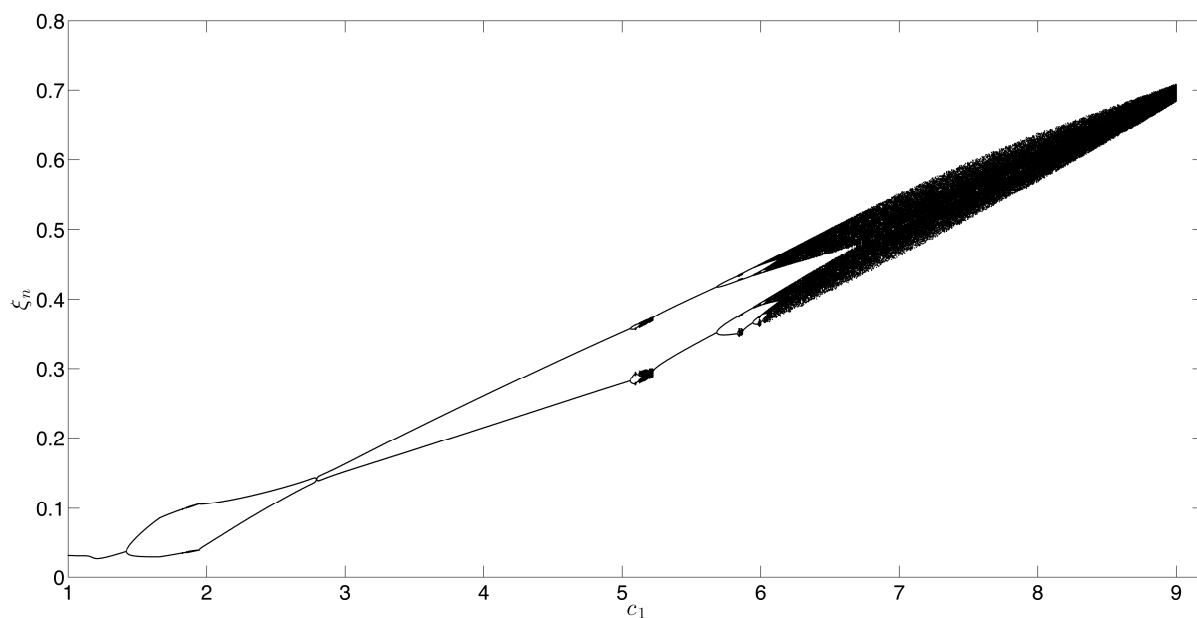


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для системы (3) при вариации параметра  $c_1$  и значениях параметров  $c_2 = -6, k = 1$

## Самоподобие фрагментов бифуркационной диаграммы и наличие «вложенных структур»

Для бифуркационной диаграммы, соответствующей логистическому отображению, характерно «двухуровневое самоподобие». Исследование отображений с острой вершиной и квадратичным минимумом показало, что для них характерен еще один уровень самоподобия. В них, как отмечалось ранее, оказывается бесконечно много каскадов бифуркаций удвоения периода. В дополнение к этому самих таких каскадов, подобных тем, которые наблюдаются в логистическом отображении, по-видимому, также бесконечно много.

Расчеты показывают, что такая вложенная «матрешечная» структура имеет место не только для модельного одномерного отображения, но и для исходной двухмодовой системы.

В самом деле, при взгляде на бифуркационную диаграмму, характеризующую изменение аттракторов при увеличении параметра  $c_1$ , становится ясно, что хаос в этой системе возникает и исчезает примерно одинаковым образом многократно на разных по  $c_1$  масштабах (рис. 5 и 6). Увеличение соответствующих фрагментов показывает, что бифуркационная диаграмма изучаемого объекта действительно носит фрактальный, самоподобный характер с коэффициентом подобия около 10.

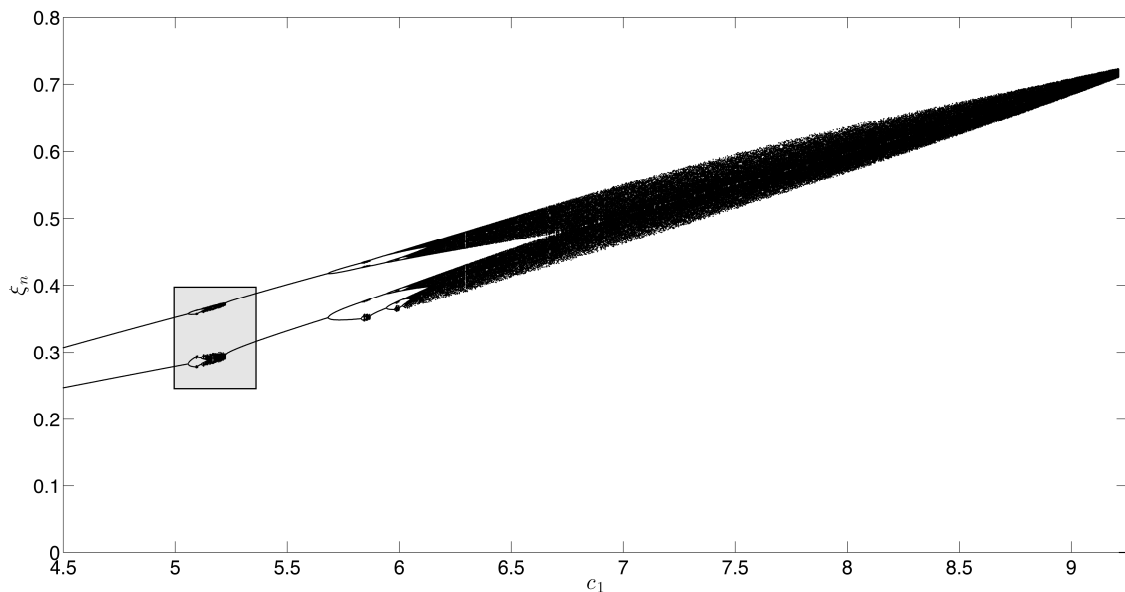
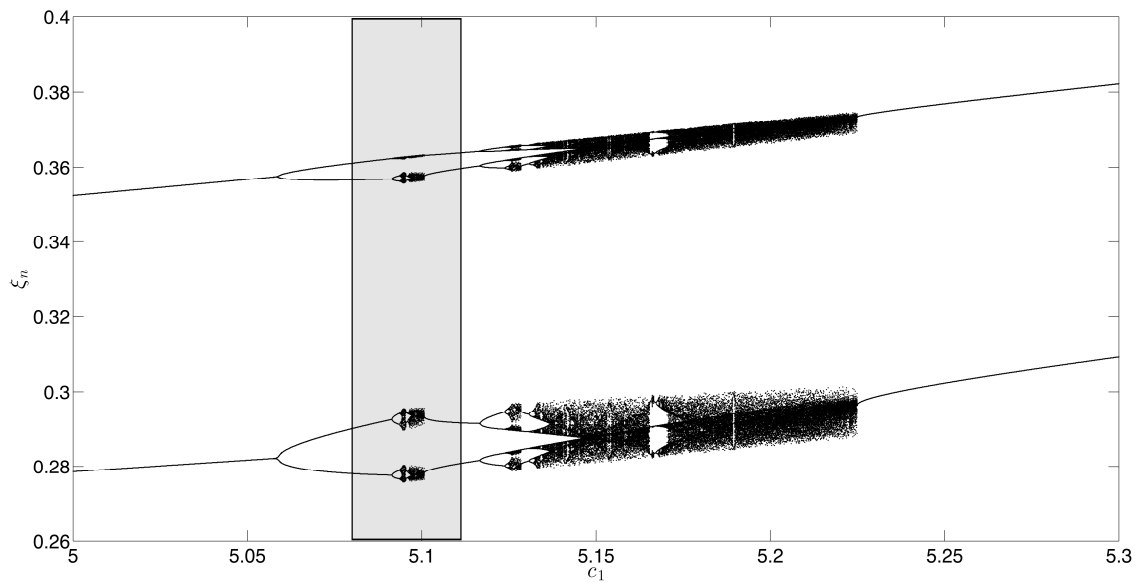


Рис. 5. «Матрешечная» структура в системе (3):  $4.5 \leq c_1 \leq 9.3$ ,  $c_2 = -6$ ,  $k = 1$ . Выделенная область:  $5 \leq c_1 \leq 5.3$

Как и во всех реальных, а не модельных или специально сконструированных фрактальных структурах, мы можем проследить сравнительно небольшое количество уровней, на которых наблюдается самоподобие. В данном случае это ограничено точностью численного решения изучаемой системы дифференциальных уравнений. Однако прослеженные уровни масштабов, на которых фрагменты бифуркационной диаграммы оказываются подобными себе, показывают отличное качественное соответствие с модельным одномерным отображением, и это дает все основания полагать, что в рассматриваемой двухмодовой системе имеет место «каскад каскадов».

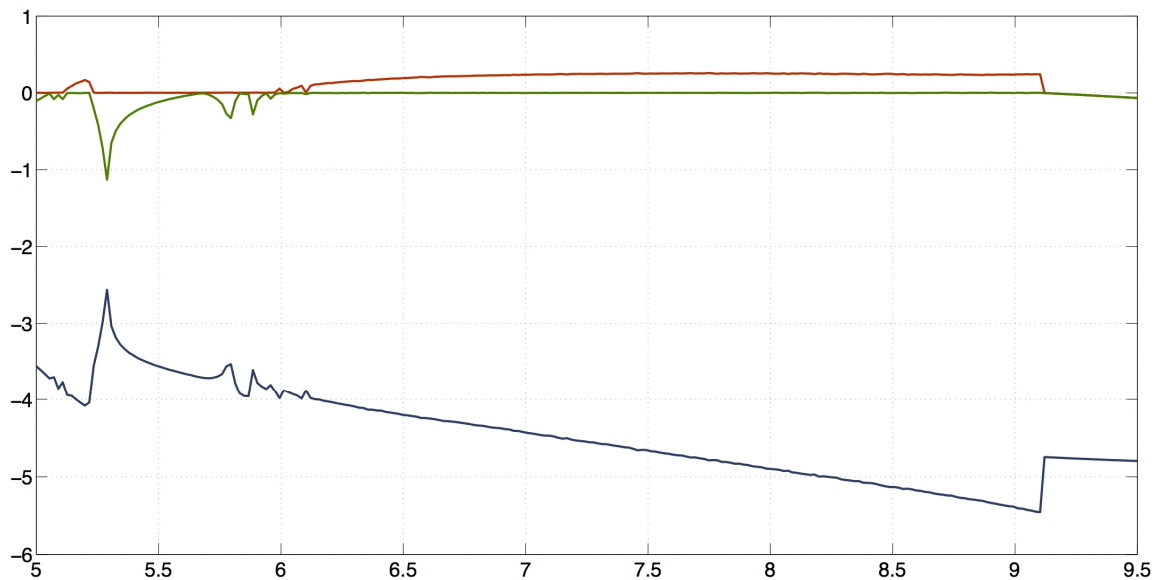
## Семейство хаотических аттракторов, порождающих растягивающие одномерные отображения

Приведенные расчеты убедительно показывают, что структура множества параметров, при которой имеет место хаос, является не сложной, подобной той, которая наблюдается для


 Рис. 6. «Матрешечная» структура в системе (3):  $5 \leq c_1 \leq 5.3$ ,  $c_2 = -6$ ,  $k = 1$ 

логистического отображения, а простой, характерной для всюду растягивающего отображения. Зависимость ляпуновских показателей от параметра такова, что старший ляпуновский показатель  $\lambda$  в большом интервале параметров превышает 0.1 (рис. 7). Заметим, что это значение весьма велико по сравнению с системой Лоренца и рядом других исследованных ранее странных аттракторов систем трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Известно, что для странных аттракторов, существующих в ограниченной области фазового пространства в динамических системах с непрерывным временем, один из ляпуновских показателей равен нулю [Хакен, 1985]. Точность  $\varepsilon$ , с которой это выполняется при численно найденных показателях, позволяет судить о точности используемого вычислительного алгоритма. В нашем случае нулевой показатель приближает  $\lambda_2$  к  $\varepsilon \approx 10^{-3}$ .

Из расчетов следует, что в этой области параметров странные аттракторы порождают семейство растягивающих отображений (см. далее «Возникновение хаоса и эволюция одномерных


 Рис. 7. Зависимость ляпуновских показателей от параметра  $c_1$

отображений) с

$$z_k = \frac{d\xi_{n+k}}{d\xi_n} > 1, \quad k = 1, 2.$$

Иными словами, качественные свойства исследуемого объекта близки к характеристикам простейшего всюду растягивающего одномерного отображения. Поэтому можно ожидать, что и в этом случае количественные характеристики хаоса (моменты распределения  $\xi_n$  и  $\eta_n$ , автокорреляционные функции, спектр мощности, инвариантные меры) непрерывно зависят от параметров задачи в тех пределах, в которых можно пренебречь фрактальной структурой странного аттрактора вдоль сжимающего направления.

## Возникновение хаоса и эволюция одномерных отображений

Наглядно представить сценарий возникновения хаоса позволяет упоминавшееся выше семейство одномерных отображений  $\xi_{n+1} = f(\xi_n, c_1)$ , порождаемое решениями исходной двухмодовой системы при разных значениях  $c_1$ .

Видно, что вначале мы имеем дело с традиционной последовательностью бифуркаций удвоения периода. Соответствующие точки, порождаемые циклами  $S^2$ ,  $S^4$  и  $S^8$ , прекрасно ложатся на квадратичную параболу. Затем возникают хаотический аттрактор и шумящие циклы.

При увеличении  $c_1$  отображение  $f$  «отрачивает острую вершину». В этом представлении получаемое отображение, в отличие от модельного, имеет гладкую вершину и острый минимум. Однако замена вида  $\xi_n' \rightarrow c - \xi_n$ , где  $c$  — подходящая константа, показывает, что они переходят друг в друга.

Появляется вторая ветвь, которая определяет и циклы, и различные типы хаоса. Наличие гладкой вершины, как уже обсуждалось выше, приводит к возникновению сложной «оконной структуры», а наличие острого минимума порождает «каскад каскадов».

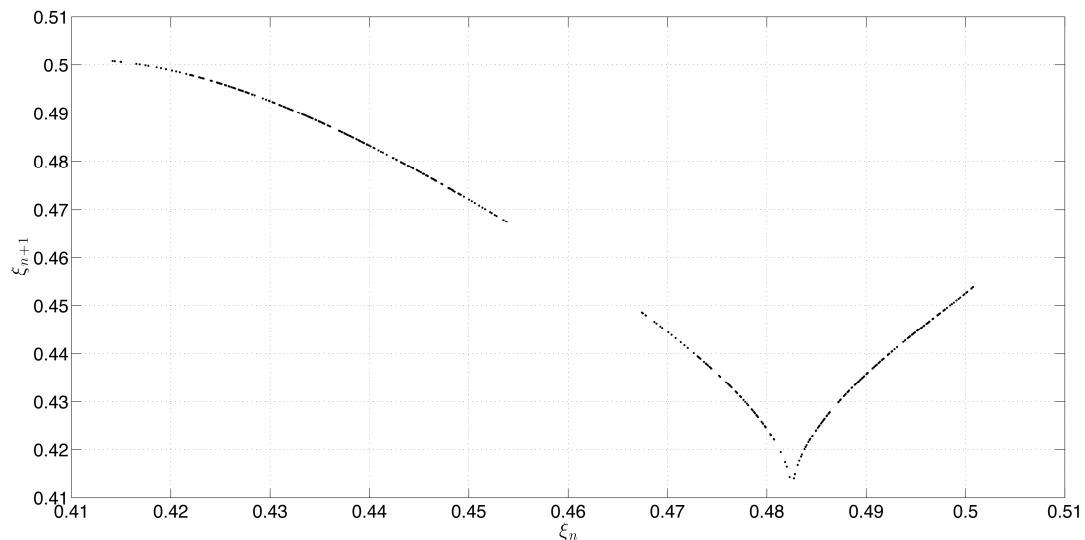


Рис. 8. Одномерное отображение, соответствующее «грубому» хаосу,  $c_1 = 6.5$

Наконец, при дальнейшем увеличении параметра возникает растягивающее отображение, при этом  $z_1 > 1$  на всем переходящем в себя интервале (рис. 8).

Таким отображениям соответствуют бифуркационная диаграмма, лишенная «оконной» или «фрактальной» структуры, «стабильные» ляпуновские показатели и «грубый» хаотический аттрактор. Более подробно эволюция одномерных отображений описана в [Малинецкий, Фаллер, 2013].



## Исчезновение хаотических аттракторов и бистабильность

Анализ двумерного отображения Смейла, системы Лоренца, логистического отображения, а также многих других объектов нелинейной динамики показал, что хаотические аттракторы могут и появляться, и исчезать скачком. В ряде работ это явление называется кризисом аттрактора [Ахромеева и др., 2007].

Расчеты показывают, что с кризисом аттракторов мы имеем дело при увеличении параметров  $c_1$ ,  $c_2$  или  $k$  при исчезновении хаотического аттрактора системы (3). Соответствующие одномерные отображения  $\xi_{n+1} = f(\xi_n)$  перестают переводить отрезок в себя.

Поскольку все траектории двухмодовой системы ограничены [Ахромеева и др., 2007], то после кризиса хаотического аттрактора они стремятся к другому предельному множеству. Таковым при увеличении  $c_1 > 9.25$  является устойчивая особая точка  $\{\xi^*, \eta^*, \theta^*\}$ , лежащая на инвариантной прямой  $\xi > 0, \eta > 0$ .

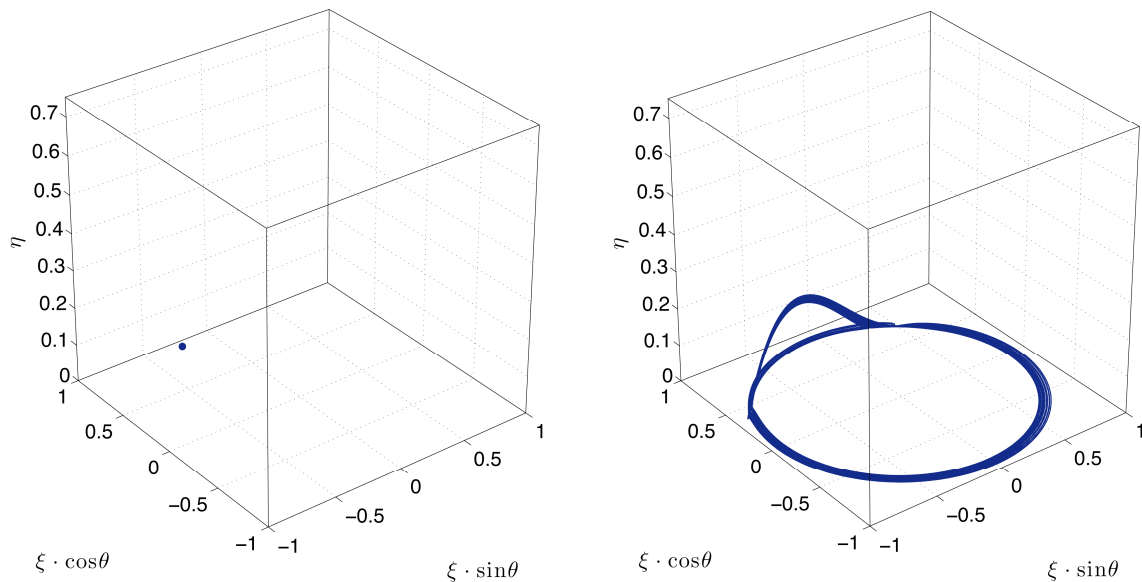


Рис. 9. Бистабильность в системе (3) при  $c_1 = 9.11$

Результаты вычислительного эксперимента говорят о том, что эта устойчивая точка сосуществует с хаотическим аттрактором в интервале параметров  $9.11 \leq c_1 \leq 9.25$  (рис. 9). Для расчетов использовался упрощенный вариант метода продолжения по параметру: со значений  $\tilde{c}_1 = 9.26$ , при которых устойчива только одна точка, рассчитывается траектория при  $\tilde{c}_1 - \Delta c_1$  с начальными данными, лежащими в окрестности точки  $\tilde{c}_1 - \Delta c_1$ , что дает точку или другой нехаотический аттрактор; затем описанная процедура повторяется при  $c_1 = \tilde{c}_1 - 2\Delta c_1$  и т. д.

При  $c_1 = 9.109$  особая точка претерпевает бифуркацию Хопфа (бифуркацию рождения предельного цикла).

В интервале  $9.107 \leq c_1 \leq 9.109$  вместе с хаотическим аттрактором сосуществует предельный цикл. Таким образом, в отличие от логистического отображения, других  $S$ -унимодальных отображений и системы Лоренца, для двухмодовой системы (3) характерна бистабильность — существование двух аттракторов (странный и нехаотический) — со своими областями притяжения.

Это явление характерно для рассматриваемого объекта и при других значениях  $c_1$ . Были обнаружены зоны бистабильности при  $5.224 < c_1 < 5.226$ , в которой хаотический аттрактор со-

существует с устойчивым циклом  $S^2$ , а также в диапазоне значений параметра  $5.870 < c_1 < 5.872$ , при этом устойчив цикл  $S^4$ .

## Заключение

Приведенный численный анализ позволил установить несколько замечательных особенностей аттракторов двухмодовой системы, которая отражает свойства большого класса систем «реакция–диффузия». Была обнаружена большая область параметров, где аттрактор обладает растягивающим и сжимающим направлениями, расположенными под большим углом, и с высокой точностью может быть приближен растягивающим одномерным отображением. Это делает его идеальным объектом для эргодической и гиперболической теорий.

Показано качественное соответствие между бифуркационными диаграммами, описывающими рождение и уничтожение странных аттракторов при вариации параметров  $c_1$ ,  $c_2$  и  $k$  в различных диапазонах. В частности, исчезновение хаоса во множестве случаев связано с кризисом странного аттрактора и бистабильностью (когда наряду со странным аттрактором существует особая точка или предельный цикл).

Интересные свойства изучаемой модели связаны с самоподобием на нескольких уровнях (структура бифуркационной диаграммы типа «каскад каскадов»). Соответствующие одномерные отображения имеют гладкую вершину и острый минимум, что приводит к ряду необычных неустойчивостей.

## Список литературы

- Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. Структуры и хаос в нелинейных средах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 488 с.
- Боколишвили И. Б., Малинецкий Г. Г. О сценариях перехода к хаосу в одномерных отображениях с острой вершиной. — М.: ИПМ, 1987. — 28 с.
- Каценко С. А. О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // ДАН СССР. — 1988. — Т. 229, № 5. — С. 1049–1052.
- Малинецкий Г. Г., Фаллер Д. С. Сценарии перехода к хаосу в двухмодовой системе для моделей «реакция–диффузия» // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2013. № 67. — 36 с.
- Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М.: Мир, 1979. — 512 с.
- Режимы с обострением: эволюция идеи / под ред. Малинецкого Г. Г.; составитель Курдюмов С. П. — М.: Наука, 1999.
- Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980. — 406 с.
- Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1985. — 419 с.
- Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Streltsov J. M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1, 2 // *Mechanica*. — 1980. — Vol. 15, No. 1. — P. 9–20; 21–30.
- Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the formation of dissipative structures in reaction–diffusion systems // *Prog. Theor. Phys.* — 1975. — Vol. 54, No. 3. — P. 687–699.
- Turing A. The chemical basis of morphogenesis // *Phyl. Trans. Roy. Soc. London B*. — 1952. — Vol. 237. — P. 37–72.