

УДК: 539.4

Распространение волн Рэлея при косом ударе метеорита о поверхность Земли и их воздействие на здания и сооружения

И. С. Никитин^{1,a}, А. В. Филимонов¹, В. Л. Якушев^{1,2}

¹Институт автоматизации проектирования РАН,
Россия, 123056, г. Москва, 2-я Брестская ул., д. 19/18

²Московский физико-технический институт,
Россия, 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

E-mail: ^a i_nikitin@list.ru

Получено 15 сентября 2013 г.

В данной работе решается динамическая задача теории упругости о совместном нормальном и касательном воздействии на полупространство. С помощью этой задачи моделируется процесс наклонного падения метеорита на земную поверхность. Проведены исследования и расчеты поверхностной волны Рэлея. Полученное решение использовано в качестве внешнего воздействия на высотное здание, находящееся на некотором расстоянии от места падения для оценки безопасности и устойчивости его конструкции. Проведены численные эксперименты на основе конечно-элементного программного комплекса STARK ES. Рассчитаны амплитуды колебаний верхних этажей выбранного объекта при таком динамическом воздействии. Также проведено их систематическое сравнение с результатами расчета при колебаниях основания, соответствующих стандартной акселерограмме 8-балльного землетрясения.

Ключевые слова: волны Рэлея, метеорит, землетрясение

Propagation of Rayleigh waves at oblique impact of the meteorite about the Earth's surface and their effects on buildings and structures

I. S. Nikitin¹, A. V. Filimonov¹, V. L. Yakushev^{1,2}

¹Institute for Computer Aided Design, 19/18 2nd Brestskaya str., Moscow, 123056, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, 9 Institutskiy lane, Dolgoprudny, Moscow region, 141700, Russia

Abstract. — In this paper the dynamic elasticity problem of the simultaneous normal and tangential impact on the half-space is solved. This problem simulates the oblique incidence of meteorite on the Earth's surface. The surface Rayleigh wave is investigated. The resulting solution is used as an external effect on the high-rise building, located at some distance from the spot of falling for the safety and stability assessment of its structure. Numerical experiments were made based on the finite element software package STARK ES. Upper floors amplitudes of the selected object were calculated under such dynamic effects. Also a systematic comparison with the results at the foundation vibrations, relevant to standard a 8-point earthquake accelerograms, was made.

Keywords: Rayleigh wave, meteorite, earthquake

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 6, pp. 981–992 (Russian).

Статья опубликована в специальном выпуске журнала «Компьютерные исследования и моделирование», посвященном исследованиям метеорита, упавшего 15 февраля 2013 года в районе города Челябинска.

Волны Рэлея при наклонном падении метеорита

В данной работе решается динамическая задача теории упругости о совместном нормальном (осесимметричная задача Лэмба [Петрашень и др., 1950; Поручиков, 1986; Слепян, 1972]) и касательном (пространственная касательная задача Лэмба [Шемякин, Файншмидт, 1954]) воздействии на полупространство $z \geq 0$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$. С помощью этой задачи моделируется процесс наклонного падения массивного тела относительно небольшого размера (метеорита) на земную поверхность. Известно, что наименее затухающей составляющей волнового поля в задаче Лэмба является поверхностная волна Рэлея [Поручиков, 1986; Слепян, 1972] (в плоском случае она вообще не затухает), поэтому проведены исследования и расчеты именно этой волны. Полученное решение использовано в качестве внешнего воздействия на поверхностное сооружение (высотное здание), находящееся на некотором расстоянии от места падения для оценки безопасности и устойчивости его конструкции.

Проведены численные эксперименты на основе конечно-элементного программного комплекса STARK ES и рассчитаны амплитуды колебаний верхних этажей выбранного объекта при таком динамическом воздействии, а также проведено их систематическое сравнение с результатами расчета при колебаниях основания, соответствующих стандартной акселерограмме 8-балльного землетрясения. Также проведено сравнение с сейсмическим воздействием мощного Карпатского землетрясения 1977 года.

Постановка задачи и оценка внешних воздействий

Представим перемещения \mathbf{u} через скалярный и векторный потенциалы φ и $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ [Поручиков, 1986; Слепян, 1972]):

$$\mathbf{u} = \text{grad}\varphi + \text{rot}\psi,$$

$$a^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad b^2 \Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

где $\gamma = a/b$, a и b — скорости упругих продольных и поперечных волн, ρ — плотность среды.

Начальные условия при $t = 0$:

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0.$$

Граничные условия при $z = 0$:

$$\rho b^2 \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial y \partial z} \right] = \tau_{xy},$$

$$\rho b^2 \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial z} \right] = \tau_{yz},$$

$$\rho b^2 \left[(\gamma^2 - 2) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial z} \right) \right] = \sigma_{zz}.$$

Будем решать задачу о касательном воздействии (задача 1) с граничными условиями на границе полупространства $\tau_{xz} = \tau_0 \delta_\varepsilon(r) \delta(t)$, $\tau_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ и задачу о нормальном воздействии (задача 2) с граничными условиями $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0$, $\sigma_{zz} = -\sigma_0 \delta_\varepsilon(r) \delta(t)$.

Пространственное распределение приложенных нагрузок выберем в виде «размазанной» функции $\delta_\varepsilon(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к импульсной δ -функции. Здесь ε — характерный размер («полуширина») выбранного распределения

$$\delta_\varepsilon(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Несложно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \delta_{\varepsilon}(r) dr = 1, \quad \delta_{\varepsilon}(r) \rightarrow \delta(r) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Двойное преобразование Фурье функции $\delta_{\varepsilon}(r)$ вычисляется следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x, y) e^{i(\mu x + \nu y)} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{3/2}} e^{iqr \cos(\theta - \alpha)} r dr d\theta,$$

где сделаны замены $\mu = q \cos \alpha$, $\nu = q \sin \alpha$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

При вычислении использованы формулы [Градштейн, Рыжик, 1971]:

$$\int_0^{2\pi} e^{iqr \cos(\theta - \alpha)} d\theta = 2\pi J_0(qr), \quad \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\varepsilon^2 + r^2)^{3/2}} r J_0(qr) dr = e^{\varepsilon q}.$$

В итоге получаем простую формулу двойного преобразования Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x, y) e^{i(\mu x + \nu y)} dx dy = e^{\varepsilon q}.$$

Такое представление «размазанных» импульсных нагрузок наиболее удобно при решении задач теории упругости методом интегральных преобразований, так как оно дает возможность аналитического обратного преобразования Фурье [Слепян, 1972].

Определим эффективные амплитуды распределенных поверхностных воздействий. Изменение импульса наклонно падающего массивного тела с характерным размером d , плотностью ρ_0 , скоростью падения c_0 , углом падения φ , за время $0 < t < \Delta t$ по оси z и x соответственно равно

$$F_{\sigma} = \iint \sigma_{zz} dx dy = \rho_0 d^3 c_0 \sin \varphi / \Delta t, \quad F_{\tau} = \iint \tau_{xz} dx dy = \rho_0 d^3 c_0 \sin \varphi / \Delta t.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ $F_{\sigma} = \rho_0 d^3 c_0 \sin \varphi \delta(t)$, $F_{\tau} = \rho_0 d^3 c_0 \cos \varphi \delta(t)$. Таким образом, значения амплитуд приложенных нагрузок равны

$$\tau_0 = \rho_0 d^3 c_0 \cos \varphi, \quad \sigma_0 = \rho_0 d^3 c_0 \sin \varphi.$$

Для дальнейших оценок принимаем $\varepsilon = d/2$.

Применим двойное преобразование Фурье по координатам x и y с параметрами μ и ν и преобразование Лапласа по координате t с параметром p к потенциалам φ и ψ_j :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mu, \nu, p, z) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y, z, t) e^{i(\mu x + \nu y)} dx dy \right) \exp(-pt) dt, \\ \tilde{\psi}_j(\mu, \nu, p, z) &= \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_j(x, y, z, t) e^{i(\mu x + \nu y)} dx dy \right) \exp(-pt) dt. \end{aligned}$$

С учетом нулевых начальных условий решение, убывающее при $z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(\mu, \nu, p, z) &= \Phi(\mu, \nu, p) \exp(-zP_a), \\ \tilde{\psi}_j(\mu, \nu, p, z) &= \Psi_j(\mu, \nu, p) \exp(-zP_b).\end{aligned}$$

Введены обозначения

$$P_a = \sqrt{p^2/a^2 + q^2}, \quad P_b = \sqrt{p^2/b^2 + q^2}, \quad q = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}.$$

Задача о касательной нагрузке

В этом случае граничные условия при $z = 0$:

$$\tau_{xz} = \tau_0 \delta_\varepsilon(r) \delta(t), \quad \tau_{xz} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0$$

С учетом граничных условий и дополнительного условия на векторный потенциал $\Psi_l(\mu, \nu, p)$ [Шемякин, Файншмидт, 1954] имеем

$$\begin{aligned}\Phi(\mu, \nu, p) &= \frac{\tau_0}{\rho b^2} \frac{2i\mu P_b e^{-\varepsilon q}}{R(p)}, \\ \Psi_1(\mu, \nu, p) &= 0, \\ \Psi_2(\mu, \nu, p) &= \frac{\tau_0}{\rho b^2} \frac{-(p^2/b^2 + 2q^2) e^{-\varepsilon q}}{R(p)}, \\ \Psi_3(\mu, \nu, p) &= \frac{\tau_0}{\rho b^2} \frac{-i\nu [(p^2/b^2 + 2q^2) - 4P_a P_b] e^{-\varepsilon q}}{P_b R(p)}, \\ R(p) &= (p^2/b^2 + 2q^2)^2 - 4q^2 P_a P_b.\end{aligned}$$

Введем новую переменную $\zeta = p/q/b$, $p = \zeta qb$.

$$\begin{aligned}\Phi(\mu, \nu, \zeta) &= \frac{\tau_0}{\rho b^2} \frac{2i\mu \sqrt{1 + \zeta^2} e^{-\varepsilon q}}{q^3 R(\zeta)}, \\ \Psi_2(\mu, \nu, \zeta) &= \frac{\tau_0}{\rho b^2} \frac{-(2 + \zeta^2) e^{-\varepsilon q}}{q^2 R(\zeta)}, \\ \Psi_3(\mu, \nu, \zeta) &= \frac{\tau_0}{\rho b^2} \frac{-i\nu [(2 + \zeta^2) - 4\sqrt{1 + \zeta^2/\gamma^2} \sqrt{1 + \zeta^2}] e^{-\varepsilon q}}{q^3 \sqrt{1 + \zeta^2} R(\zeta)},\end{aligned}$$

где $R(\zeta) = (2 + \zeta^2)^2 - 4\sqrt{1 + \zeta^2/\gamma^2} \sqrt{1 + \zeta^2}$ — функция Рэлея.

Выражения для смещений \mathbf{u} в цилиндрических координатах через потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned}u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, \\ u_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \cos \theta \frac{\partial \psi_2}{\partial r}.\end{aligned}$$

Совершая обратные преобразования Фурье и Лапласа, с учетом свойств четности и нечетности по μ и ν , используя известные представления для функций Бесселя, получим формулы

для смещений, которые с точностью до множителя $\zeta e^{-\varepsilon q}$ совпадают с формулами из [Шемякин, Файншмидт, 1954]. В этой работе задача Лэмба решалась для касательного воздействия, импульсного по пространству (δ -функция) и ступенчатого по времени (функция Хэвисайда).

Поскольку нас интересуют смещения на поверхности полупространства, во избежание излишней громоздкости будем использовать полученные формулы при значении $z = 0$:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{\tau_0 \cos \theta}{2\pi\rho b} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{-\zeta^2 \sqrt{1+\zeta^2}}{R(\zeta)} e^{qbt\zeta} d\zeta \right] q J_0(qr) e^{-\varepsilon q} dq - \\
 &- \frac{\tau_0 \cos \theta}{2\pi\rho b} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{4+3\zeta^2-4\sqrt{1+\zeta^2/\gamma^2}\sqrt{1+\zeta^2}}{\sqrt{1+\zeta^2}R(\zeta)} \right) e^{qbt\zeta} d\zeta \right] \frac{J_1(qr) e^{-\varepsilon q}}{r} dq; \\
 u_\theta &= \frac{\tau_0 \sin \theta}{2\pi\rho b} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} e^{qbt\zeta} d\zeta \right] q J_0(qr) e^{-\varepsilon q} dq - \\
 &- \frac{\tau_0 \sin \theta}{2\pi\rho b} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{4+3\zeta^2-4\sqrt{1+\zeta^2/\gamma^2}\sqrt{1+\zeta^2}}{\sqrt{1+\zeta^2}R(\zeta)} \right) e^{qbt\zeta} d\zeta \right] \frac{J_1(qr) e^{-\varepsilon q}}{r}; \\
 u_z &= \frac{\tau_0 \cos \theta}{2\pi\rho b} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left(\frac{2+\zeta^2-2\sqrt{1+\zeta^2/\gamma^2}\sqrt{1+\zeta^2}}{R(\zeta)} \right) e^{qbt\zeta} d\zeta \right] J_1(qr) e^{-\varepsilon q} dq.
 \end{aligned}$$

Выделим волны Рэлея, соответствующие вычетам в полюсах знаменателя интеграла по ζ . Корни уравнения Рэлея $R(\zeta) = 0$ равны $\zeta = \pm i\xi$, $\xi < 1$.

Обозначим $v_0 = \xi b$ — скорость волны Рэлея. Производная функции Рэлея равна

$$R'_\zeta(\zeta) = 4\zeta \left[2 + \zeta^2 - \frac{\sqrt{1+\zeta^2/\gamma^2}}{\sqrt{1+\zeta^2}} - \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\gamma^2 \sqrt{1+\zeta^2/\gamma^2}} \right].$$

Введем связанную с ней функцию

$$D(\xi) = 4\xi \left[2\xi^2 - \frac{\sqrt{1-\xi^2/\gamma^2}}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\gamma^2 \sqrt{1-\xi^2/\gamma^2}} \right].$$

Также вычислим интегралы [Градштейн, Рыжик, 1971]:

$$I_1^\pm = \mp i \int_0^\infty q J_0(qr) e^{-(\varepsilon \mp i v_0 t) q} dq, \quad I_1 = I_1^+ + I_1^- = -\frac{2r_1}{r_2^{3/2}} \sin(\beta_1 - 3\beta_2/2),$$

$$I_2^\pm = \mp i \int_0^\infty J_1(qr) e^{-(\varepsilon \mp i v_0 t) q} dq, \quad I_2 = I_2^+ + I_2^- = \frac{2r_1}{r_2^{1/2}} \sin(\beta_1 - \beta_2/2),$$

$$I_3^\pm = \mp i \int_0^\infty q J_1(qr) e^{-(\varepsilon \mp i v_0 t) q} dq, \quad I_3 = I_3^+ + I_3^- = \frac{2r}{r_2^{3/2}} \sin(3\beta_2/2),$$

$$r_1 = \sqrt{\varepsilon^2 + v_0^2 t^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\varepsilon^2 + r^2 - v_0^2 t^2)^2 + 4\varepsilon^2 v_0^2 t^2},$$

$$\beta_1 = \arctan(v_0 t / \varepsilon), \quad \beta_2 = \left[1 - H(\varepsilon^2 + r^2 - v_0^2 t^2) \right] \pi + \arctan \left[2\varepsilon v_0 t / (\varepsilon^2 + r^2 - v_0^2 t^2) \right],$$

$H(x)$ — функция Хэвисайда.

Окончательные выражения для смещений принимают вид

$$u_r = \frac{\tau_0 \cos \theta}{2\pi\rho b} \left[\frac{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}}{D(\xi)} I_1 - \frac{4-3\xi^2-4\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2/\gamma^2}}{\sqrt{1-\xi^2}D(\xi)} I_2/r \right],$$

$$u_\theta = \frac{\tau_0 \sin \theta}{2\pi\rho b} \left[\frac{(4\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2/\gamma^2}-4+3\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}D(\xi)} I_2/r \right],$$

$$u_z = \frac{\tau_0 \cos \theta}{2\pi\rho b} \left[\frac{(2-\xi^2-2\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\xi^2/\gamma^2})}{D(\xi)} I_3 \right].$$

Отметим, что в данном случае за счет «размазанного» на характерный размер ε поверхностного воздействия получено непрерывное распределение смещений в волне Рэлея. При формальном решении для импульсного воздействия смещения терпят разрыв [Слепян, 1972; Шемякин, Файншмидт, 1954], и количественные оценки становятся невозможны.

Задача о нормальной нагрузке

Граничные условия при $z = 0$:

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_{zz} = -\sigma_0 \delta_\varepsilon(r) \delta(t).$$

С учетом граничных условий и дополнительного условия на векторный потенциал $\Psi_3(\mu, \nu, p)$ [Шемякин, Файншмидт, 1954] имеем

$$\Phi(\mu, \nu, p) = \frac{\sigma_0 - (p^2/b^2 + 2q^2)e^{-\varepsilon q}}{\rho b^2 R(p)},$$

$$\Psi_1(\mu, \nu, p) = \frac{\sigma_0 2ivP_a e^{-\varepsilon q}}{\rho b^2 R(p)},$$

$$\Psi_2(\mu, \nu, p) = \frac{\sigma_0 - 2i\mu P_a e^{-\varepsilon q}}{\rho b^2 R(p)}$$

$$\Psi_3(\mu, \nu, p) = 0.$$

Как и ранее, введем новую переменную $\zeta = p/q/b$, $p = \zeta qb$,

$$\Phi(\mu, \nu, \zeta) = \frac{\sigma_0 - (2 + \zeta^2)e^{-\varepsilon q}}{\rho b^2 q^2 R(\zeta)},$$

$$\Psi_1(\mu, \nu, \zeta) = \frac{\sigma_0 2iv \sqrt{1 + \zeta^2/\gamma^2} e^{-\varepsilon q}}{\rho b^2 q^3 R(\zeta)},$$

$$\Psi_2(\mu, \nu, \zeta) = \frac{\sigma_0 - 2i\mu \sqrt{1 + \zeta^2/\gamma^2} e^{-\varepsilon q}}{\rho b^2 R(p)}.$$

Так же, как и выше, из формул обратных преобразований Фурье и Лапласа, можно получить выражения для смещений на поверхности полупространства при $z = 0$:

$$v_r = \frac{\sigma_0}{2\pi\rho b} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2 + \zeta^2 - 2\sqrt{1 + \zeta^2/\gamma^2} \sqrt{1 + \zeta^2}}{R(\zeta)} e^{qbt\zeta} d\zeta \right] q J_1(qr) e^{-\varepsilon q} dq,$$

$$v_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\rho b} \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\zeta^2 \sqrt{1 + \zeta^2/\gamma^2}}{R(\zeta)} e^{qbt\zeta} d\zeta \right] q J_0(qr) e^{-\varepsilon q} dq, \quad v_\theta = 0.$$

Отметим, что известное осесимметричное [Петрашень и др., 1950; Поручиков, 1986; Слепнян, 1972] решение в данном случае получено из полной трехмерной постановки задачи в декартовых координатах. Окончательные выражения для смещений в волне Рэля принимают вид

$$v_r = \frac{\sigma_0}{2\pi\rho b} \left[\frac{2 - \xi^2 - 2\sqrt{1\xi^2/\gamma^2}\sqrt{1-\xi^2}}{D(\xi)} I_3 \right],$$

$$v_z = \frac{\sigma_0}{2\pi\rho b} \left[\frac{-\xi^2\sqrt{1\xi^2/\gamma^2}}{D(\xi)} I_1 \right].$$

Суммарные смещения w получаются сложением соответствующих компонент:

$$w_r = u_r + v_r, \quad w_\theta = u_\theta, \quad w_z = u_z + v_z.$$

Таким образом, в элементарных функциях получены выражения для смещений в волне Рэля, возникающих на границе полупространства при совместном нормальном и касательном воздействии, импульсном по времени и «размазанном» по поверхности.

Результаты расчетов волн Рэля

Самый массивный из известных, не взорвавшихся при соударении с земной поверхностью, метеоритов (метеорит Гоба в Юго-Западной Африке) имеет размеры $3 \times 3 \times 1$ м и состоит из практически чистого железа, рисунок 1.



Рис. 1

Поэтому для количественных оценок смещений в волне Рэля, сформированной при наклонном падении массивного тела на земную поверхность, выбраны следующие значения параметров.

Параметры упругой среды: плотность $\rho = 2500$ кг/м³, скорость продольных волн $a = 3400$ м/с, скорость поперечных волн $b = 2000$ м/с.

Плотность метеорита $\rho_0 = 8000$ кг/м³, скорость падения $c_0 = 2500$ м/с, угол падения (к земной поверхности) $\varphi = 10^\circ$, характерный размер $\varepsilon = 1.5$ м.

Расстояние до точки наблюдения $r_0 = 1000$ м, направление на нее задается углами $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi$. Значение корня Рэля $\xi = 0.92$.

Графики зависимости суммарных компонент смещений от времени в указанной точке приведены на рисунках 2–4 (а) — для $w_r(r_0, \theta_{1,2,3}, t)$, (б) — для $w_z(r_0, \theta_{1,2,3}, t)$. Компонента w_θ мала относительно других компонент смещений, поэтому ее график не приводится и ее вклад в дальнейшем не учитывается.

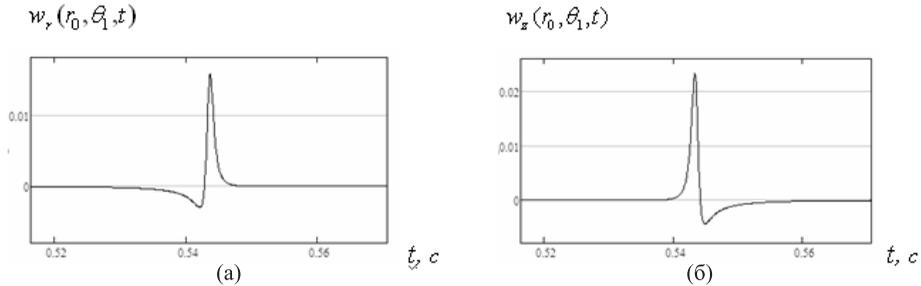


Рис. 2. Радиальные и вертикальные смещения в точке наблюдения при $\theta_1 = 0$ м

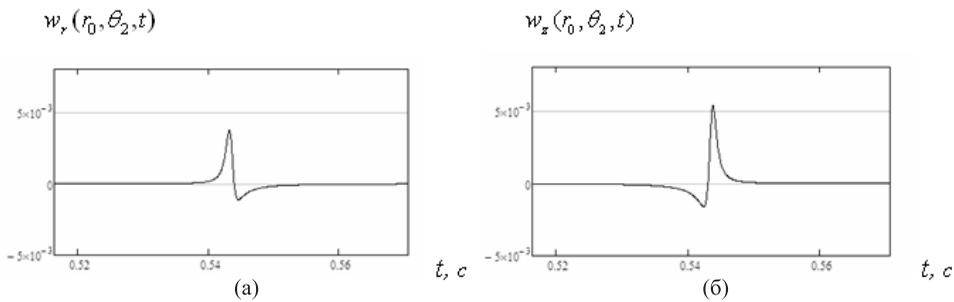


Рис. 3. Радиальные и вертикальные смещения в точке наблюдения при $\theta_2 = \pi/2$ м

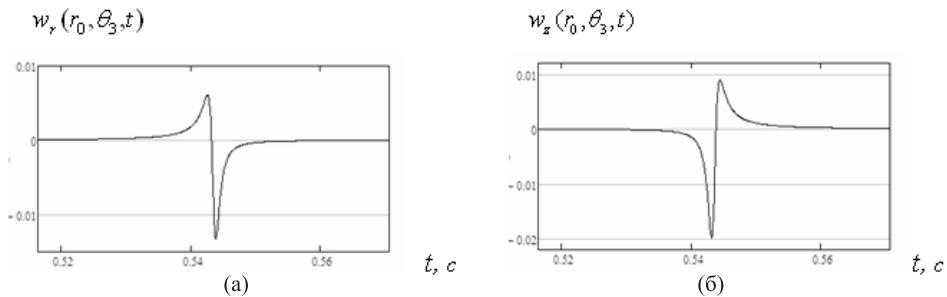


Рис. 4. Радиальные и вертикальные смещения в точке наблюдения при $\theta_2 = \pi$ м

Приведенные выше формулы и графики динамических смещений поверхности дают представление об их амплитудах и формах в зависимости от скорости и угла падения метеорита, а также от расстояния и направления на точку наблюдения по отношению к проекции траектории на земную поверхность. Эти зависимости будут использованы для оценки колебаний и устойчивости высотного сооружения (здания), находящегося в точке наблюдения.

Численные расчеты колебаний высотных зданий при различных динамических воздействиях

Для расчета и оценки сейсмического воздействия метеорита на здания и сооружения была проведена серия численных экспериментов для конечно-элементной модели высотного здания,

разработанной в ООО «Еврософт» и ЦНИИСК им. Кучеренко. Здание высотой 97.5 м насчитывает 28 этажей. Сооружение имеет приблизительно овальную в плане форму с заостренными углами и габаритными размерами в плане — 53.8×34.3 м, рисунок 5. В качестве несущей системы здания применен монолитный железобетонный каркас, конструкции которого выполнены из тяжелого бетона класса В30 с рабочим армированием стержневой арматурой класса А500с.

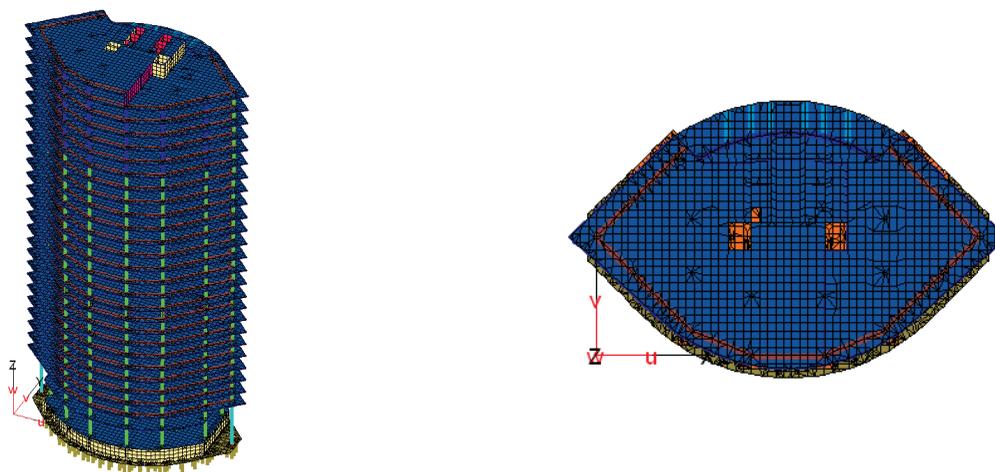


Рис. 5. Общий вид конечно-элементной модели высотного здания

Расчет вынужденных колебаний здания был проведен с помощью метода разложения по собственным формам во временной области, используя интегральную модель сейсмического воздействия [Назаров и др., 2005]. Согласно интегральной модели сейсмическое движение грунта основания конструкции описывается вектором ускорения поступательного движения в трех взаимно перпендикулярных направлениях как жесткое тело, а таким образом, можно задать силовое воздействие на сооружения с помощью принципа Даламбера. Определялось необходимое количество собственных форм колебаний конструкции [Якушев и др., 2012а]. Для решения обобщенной собственной проблемы был использован метод Ланцоша с оценкой количества модальных масс. Для определения наиболее опасного направления воздействия использовался энергетический критерий [Симбиркин, Филимонов, 2012]. Совокупность этих моделей и методов была реализована в программном комплексе STARK ES. Этот программный комплекс эффективно применялся для расчета ответственных сооружений на сейсмические и особые воздействия [Якушев и др., 2012б]. В данной работе в качестве особого воздействия рассматривалась волна Рэлея, сформированная при наклонном падении метеорита на относительно небольшом расстоянии от высотного здания выбранного типа. Параметры волны и относительные координаты расположения сооружения приведены выше. Для наглядности представления результатов проведено их систематическое сравнение с результатами сейсмического воздействия определенной балльности.

Результаты расчетов для характерной скорости и угла падения метеорита приведены в таблице 1. Из таблицы 1 видно, что наиболее опасное воздействие от метеорита достигается при следующих параметрах $c_0 = 2500$ м/с, $\varphi = 10^\circ$, $\theta_1 = 0$. Для сравнения с воздействием от землетрясения были проведены дополнительные расчеты на синтезированную акселерограмму, соответствующую 8-балльному землетрясению, и реальной записи Карпатского землетрясения 7 марта 1977 года. Результаты представлены в таблице 2.

На рисунках 6–8 изображены максимальные по модулю перемещения для перекрытия верхнего этажа для двух типов воздействий: (а) — наклонного падения метеорита (зеленым¹ цветом) в сравнении с синтезированной акселерограммой 8-балльного землетрясения (синим

¹ Полноцветные версии рисунков доступны в электронной версии статьи — <http://crm.ics.org.ru/journal/article/2099/>.

Таблица 1. Значение максимальных перемещений перекрытия верхнего этажа, м

	Направление	$\theta_1 = 0$	$\theta_2 = \pi/2$	$\theta_3 = \pi$
$c_0 = 2500$ м/с	X	0.001	0.000	0.000
	Y	0.142	0.036	0.069
$\varphi = 10^\circ$	Z	0.023	0.007	0.012

Таблица 2. Значение максимальных перемещений перекрытия верхнего этажа, м

Направление	Синтезированная акселерограмма 8 баллов	Максимальное воздействие от метеорита	Карпатское землетрясение, 1977 г.
X	0.069	0.001	0.611
Y	0.093	0.142	1.153
Z	0.013	0.023	0.135

цветом), (б) — наклонного падения метеорита (зеленым цветом) в сравнении с Карпатским землетрясением 1977 года (синим цветом).

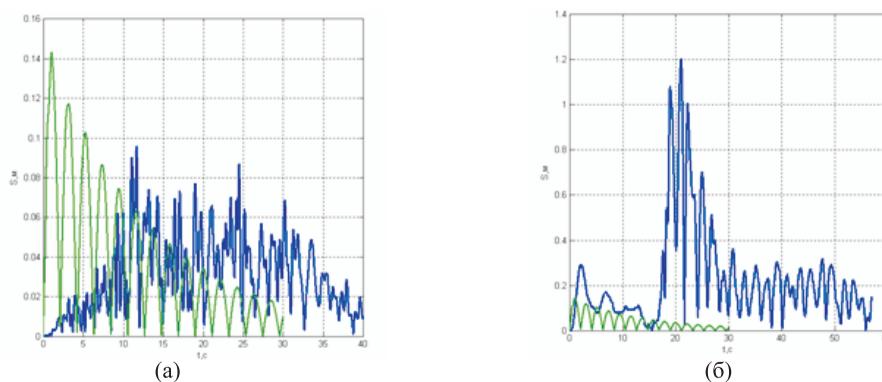


Рис. 6. График максимального перемещения верхнего этажа, м. Параметры падения метеорита $c_0 = 2500$ м/с, $\varphi = 10^\circ$, $\theta_1 = 0$. (а) сравнение с синтезированной акселерограммой, (б) сравнение с Карпатским землетрясением 1977 года

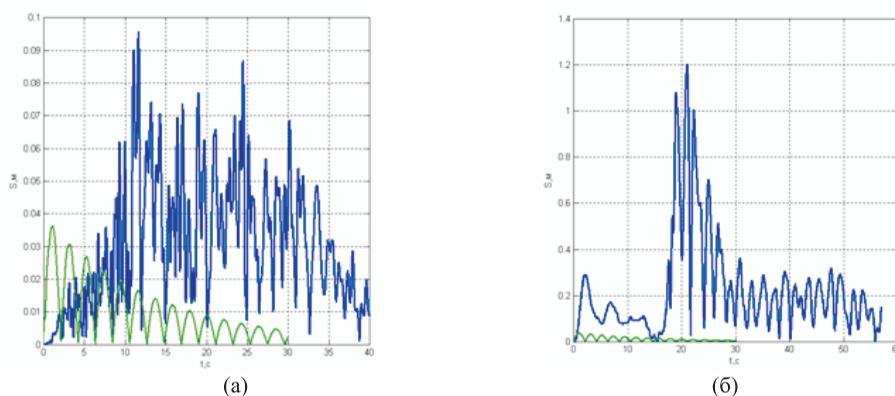


Рис. 7. График максимального перемещения верхнего этажа, м. Параметры падения метеорита $c_0 = 2500$ м/с, $\varphi = 10^\circ$, $\theta_1 = \pi/2$. (а) сравнение с синтезированной акселерограммой, (б) сравнение с Карпатским землетрясением 1977 года

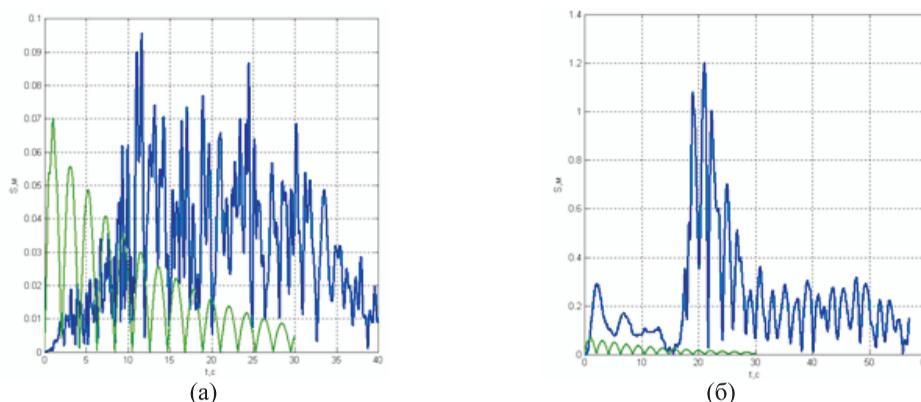


Рис. 8. График максимального перемещения верхнего этажа, м. Параметры падения метеорита $c_0 = 2500$ м/с, $\varphi = 10^\circ$, $\theta_1 = \pi$. (а) сравнение с синтезированной акселерограммой, (б) сравнение с Карпатским землетрясением 1977 года

Результаты сравнения показывают, что перемещение от воздействия метеорита сопоставимо с перемещением от условного 8-бального землетрясения при угле $\theta_3 = \pi$ и даже превосходит его при $\theta_1 = 0$, но на порядок слабее, чем перемещения от реального землетрясения 1977 года. Воздействие от волны Рэля, порожденной ударом метеорита, имеет очень малую протяженность во времени 0.04 секунды, в отличие от времени действия характерной акселерограммы землетрясения. Максимум перемещений достигается не в момент воздействия, а несколько позже при свободных затухающих колебаниях конструкции.

На рисунке 9 изображена пространственная траектория движения узла перекрытия верхнего этажа высотного здания для двух типов воздействия: наклонного падения метеорита (зеленым цветом) и синтезированной акселерограммы 8-бального землетрясения (синим цветом).

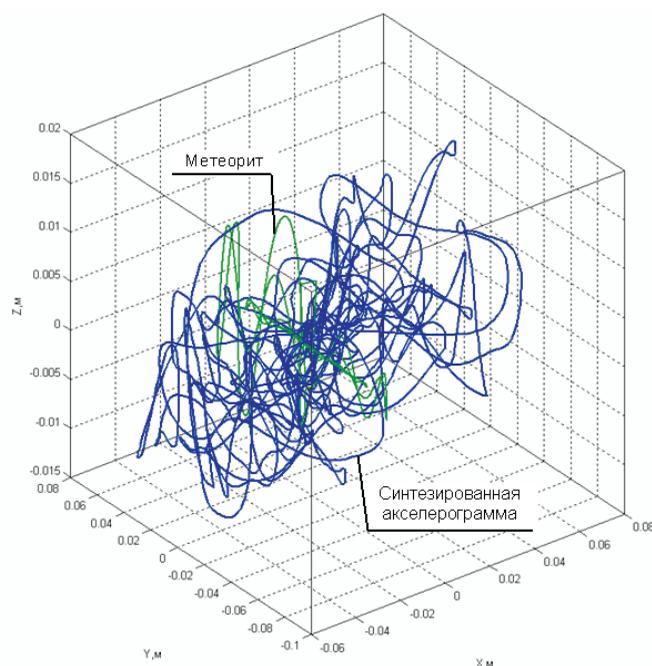


Рис. 9. Траектории движения узла перекрытия верхнего этажа: синтезированная акселерограмма 8 баллов в сравнении с воздействием от метеорита: $c_0 = 2500$ м/с, $\varphi = 10^\circ$, $\theta_1 = 0$

Таким образом, в принятой модели возбуждения волн Рэлея при наклонном падении достаточно крупного метеорита размером порядка 2–3 м, их существенное сейсмическое воздействие, по амплитуде сравнимое с 8-балльным землетрясением, может быть оказано на расстоянии до 1 км. Период этого воздействия относительно мал, и первый резкий толчок основания (фундамента) с амплитудой, определяемой полученными формулами, с запаздыванием дает максимальные смещения верхних перекрытий высотного здания, которые переходят в затухающие свободные колебания.

Список литературы

- Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 5-е. — М.: Наука, 1971. — 1108 с.
- Назаров Ю. П., Симбиркин В. Н., Филимонов А. В.* Динамический расчет пространственных сооружений с использованием интегральной модели сейсмического воздействия // Доклады VI Российской национальной конференции по сейсмостойкому строительству и сейсмическому районированию, г. Сочи, 19–24 сентября 2005 г. — 8 с.
- Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И.* О задаче Лэмба в случае полупространства. — Уч. Зап. ЛГУ, сер. мат. — 1950. — Вып. 21, № 35. — С. 71–118.
- Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 328 с.
- Симбиркин В. Н., Филимонов А. В.* Определение опасных направлений сейсмического воздействия для пространственных сооружений // Вестник НИЦ «Строительство». Исследования по теории сооружений: Сб. статей. Вып. 6 (XXXI) / под ред. И. И. Ведякова и Г. С. Варданяна. — М.: НИЦ «Строительство», 2012. — С. 23–30.
- Слепян Л. И.* Нестационарные упругие волны. — Л.: Судостроение, 1972. — 376 с.
- Шемякин Е. И., Файншмидт В. Л.* Распространение волн в упругом полупространстве, возбужденном поверхностной касательной силой. — Уч. Зап. ЛГУ, сер. мат. — 1954. — Вып. 28, № 148. — С. 148–179.
- Якушев В. Л., Жук Ю. Н., Симбиркин В. Н., Филимонов А. В.* Сейсмический режим поиска собственных форм колебаний в программном комплексе STARK ES // Вестник кибернетики. — 2012а. — № 11 — Тюмень, ИПСОС СО РАН. — С. 151–157.
- Якушев В. Л., Назаров Ю. П., Жук Ю. Н., Симбиркин В. Н., Филимонов А. В.* Математическое моделирование несущих конструкций уникальных и ответственных сооружений методом конечных элементов и решение связанных с этим вычислительных проблем // Проблемы вычислительной и прикладной механики. Автоматизация моделирования: Сборник статей / Под ред. А. С. Холодова. — М.: МАКС Пресс, 2012б. — Вып. 2. — С. 54–79.