

УДК: 530.182.1

Управление динамикой кинка модифицированного уравнения синус-Гордона внешним воздействием с меняющимися параметрами

Ф.К. Закирьянов^{1,а}, Л.В. Якушевич²

¹Башкирский государственный университет,
Россия, 450074, г. Уфа, ул. З. Валиди, д. 32

²Институт биофизики клетки РАН,
Россия, 142290, г. Пушкино, ул. Институтская, д. 3

E-mail: farni@rambler.ru

Получено 29 июня 2013 г.,
после доработки 22 ноября 2013 г.

В работе представлены результаты, подтверждающие возможность управления движением кинка модифицированного уравнения синус-Гордона внешним воздействием с изменяющимися параметрами. Рассмотрены три типа внешних воздействий: постоянное, периодическое с постоянной частотой и периодическое частотно-модулированное. С использованием метода Мак-Лафлина–Скотта получены зависимости координаты и скорости кинка от времени при разных значениях параметров внешнего воздействия. Показано, что изменяя параметры, можно регулировать скорость и направление движения кинка.

Ключевые слова: уравнение синус-Гордона, солитоны, кинки, управление динамикой кинка, нелинейная динамика ДНК

Control of the dynamics of the kink of the modified sine-Gordon equation by the external exposure with varying parameters

F. K. Zakiryaynov¹, L. V. Yakushevich²

¹ *Bashkir State University, 32 Z. Validi str., Ufa, 450074, Russia*

² *Institute of Cell Biophysics, 3 Institutskaya str., Pushchino, 142290, Russia*

Abstract. — The paper presents results that confirm the ability to control the movement of the kink of the modified sine-Gordon equation with variable external force parameters. Three types of external influences have been considered: permanent action, periodic action with a constant frequency and a frequency-modulated periodic exposure. The dependences of the position and velocity of the kink on time for various values of the parameters of external influence were obtained using the method of McLaughlin and Scott. It is shown that by changing the settings, one can adjust the velocity and direction of movement of the kink.

Keywords: sine-Gordon equation, soliton, kink, control of the movement of the kink, nonlinear DNA dynamics

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 5, pp. 821–834 (Russian).

Динамика топологических солитонов, в частности кинков, привлекает большое внимание исследователей, работающих в различных областях физики, химии, биофизики. Кинки уравнения синус-Гордона (УСГ)

$$I\varphi_{tt} - K'a^2\varphi_{xx} + V \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

описывают в том числе динамику открытых состояний (т. е. локально расплетенных участков двойной спирали) ДНК. Существование таких состояний в ДНК было доказано в экспериментах по водородно-третиевому обмену [Englander, 1980]. Считается, что причиной их появления могут стать, например, тепловые флуктуации, столкновения с «горячими» молекулами раствора, взаимодействие функционально значимых участков ДНК с белками (например, взаимодействие РНК-полимеразы с промоторами в начальной стадии процесса транскрипции, приводящее к образованию транскрипционной вилки).

В этом случае $\varphi(x, t)$ — угловое отклонение азотистого основания, I — его момент инерции, K' — жесткость сахара-фосфатного остова, a — расстояние между ближайшими вдоль главной оси молекулы парами комплементарных оснований, V — коэффициент, характеризующий взаимодействие между основаниями внутри этих пар. Ось x направлена вдоль главной оси молекулы.

Однако, наибольший интерес для приложений, в том числе и для ДНК, представляет модифицированное уравнение синус-Гордона (МУСГ),

$$I\varphi_{tt} - K'a^2\varphi_{xx} + V \sin \varphi = -\alpha\varphi_t + f(t), \quad (2)$$

учитывающее действие диссипации, поскольку функционирование молекулы ДНК в нативном состоянии происходит в вязкой среде, и действие нестационарных внешних сил. Здесь α — коэффициент диссипации, $f(t)$ — внешнее нестационарное воздействие. Член $f(t)$ в уравнении (2) может описывать как естественные факторы — взаимодействие ДНК и белковых макромолекул, участвующих в начальных стадиях процессов транскрипции и/или репликации, так и искусственные — взаимодействие ДНК с сенсорным острием атомного силового микроскопа или влияние внешних электромагнитных полей.

Для динамических систем, моделируемых уравнением (2), не удастся, однако, построить точные решения и придется использовать различные приближенные методы: например, метод теории возмущений [Якушевич, 2007а], метод коллективных переменных [Якушевич, 1990], энергетический метод МакЛафлина–Скотта [McLaughlin, 1978], а также численные методы. Эти методы были успешно использованы для исследования влияния диссипации и периодической внешней силы на динамику кинка МУСГ [Salerno, 1994], для анализа особенностей движения кинка в поле случайной силы [Шаповалов, 2009]. В работе [Екомасов, 2009] был рассмотрен случай пространственной модуляции (неоднородности) параметров самой системы. В наших работах [Закирьянов, 2011; Якушевич, 2012] рассматривались воздействия с меняющейся частотой. Эти работы показали, что существует принципиальная возможность управления динамикой кинка МУСГ изменением параметров внешнего воздействия.

В настоящей работе представлены результаты моделирования движения кинка в рамках модели МУСГ, подтверждающие такую возможность. Хотя модель МУСГ не учитывает многие детали структуры и динамики ДНК (такие, например, как продольные и поперечные движения оснований, спиральный характер двойной цепи ДНК), тем не менее она обладает преимуществом простоты и ясности заложенных в ней идей, а главное — позволяет детально исследовать задачу об управлении динамикой кинка.

Интерес к таким задачам обусловлен прежде всего тем, что они вплотную подводят нас к решению проблемы управления динамикой таких процессов, как транскрипция, трансляция, репликация.

Модель и метод

Исходным для анализа возьмем модифицированное уравнение синус-Гордона (УСГ). В безразмерном виде, имеющем универсальный характер для динамических систем различ-

ного типа, будь то кристаллы [Браун, 2008], магнетики [Шамсутдинов, 2009] или биополимеры [Давыдов, 1984; Якушевич, 2007а], УСГ можно записать как

$$\phi_{\tau\tau} - \phi_{\xi\xi} + \sin \phi = 0, \tag{3}$$

а его точное односолитонное решение (кинк) — как

$$\phi_{kink} = 4 \arctan[\exp(\xi - v\tau - \xi_0)], \tag{4}$$

где $\xi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{V}{K'}} x$, $\tau = \sqrt{\frac{V}{I}} t$, v — безразмерная скорость кинка, ξ_0 — произвольная константа.

Тогда модифицированное уравнение синус-Гордона (МУСГ) в универсальном, безразмерном виде приобретает вид

$$\phi_{\tau\tau} - \phi_{\xi\xi} + \sin \phi = -\beta\phi_{\xi} + F(\tau), \tag{5}$$

где $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{IV}}$, $F(\tau) = \frac{f\left(\sqrt{\frac{V}{I}}t\right)}{V}$.

Мы ограничимся в данной работе случаем малых значений коэффициента диссипации β и амплитуды внешней силы $F(\tau)$. Этот случай представляет особый интерес с точки зрения возможностей управления — малое воздействие может приводить к большому результату.

Для проведения анализа воспользуемся методом МакЛафлина и Скотта [McLaughlin, 1978] и предположим, что влияние факторов внешней среды настолько мало, что общий вид решения решения МУСГ сохранится в форме (4), но при этом вместо постоянного значения скорости v мы будем иметь функцию $v(\tau)$, зависящую от времени. С учетом этого требования задача (5) сводится к более простой: к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для координаты центра масс кинка $x(\tau)$ и его скорости $v(\tau)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{v} = -\beta v(1 - v^2) + \frac{\pi}{4} \sqrt{(1 - v^2)^3} F(\tau). \end{cases} \tag{6}$$

В рамках такого подхода будут рассмотрены следующие виды внешних воздействий:

- 1) постоянное воздействие:
 $F(\tau) = A_0$ — постоянная величина;
- 2) периодическое воздействие с постоянной частотой:
 $F(\tau) = A_0 \cos \omega_0 \tau$, где A_0 и ω_0 — постоянные величины;
- 3) периодическое частотно-модулированное (ЧМ) воздействие:
 $F(\tau) = A_0 \cos(\omega_0 \tau + A_1 \cos \omega_1 \tau)$, где A_0, A_1, ω_0 и ω_1 — постоянные величины.

Возможности управления движением кинка будут проанализированы для каждого из этих видов воздействий. Заметим, что реализация указанных видов внешних воздействий может быть достигнута, например, с использованием атомного силового микроскопа, работающего либо в контактном режиме (contact mode), называемом также методом постоянной силы, либо в осциллирующем режиме (tapping mode) [Сердюк, 2010].

Постоянное внешнее воздействие

Результаты расчета координаты и скорости кинка для случая постоянного внешнего воздействия ($F(\tau) = A_0 = \text{const}$) и нулевой начальной скорости представлены на рисунке 1. Расчеты выполнялись для нескольких значений безразмерного параметра A_0 : 0.1; 0.05; 0.02; 0.01.

В размерном случае, например в случае простой модели однородной ДНК с параметрами, представленными в таблице 1, это означает, что величина внешнего воздействия действительно мала и составляет соответственно одну десятую, пять сотых и т. д. от величины параметра V , который характеризует взаимодействие между комплементарными основаниями.

Таблица 1. Коэффициенты уравнения (4) в случае однородной ДНК

| Вид полинуклеотидной цепочки | I (кг·м ²) × 10 ⁻⁴³ | K' (Дж) × 10 ⁻¹⁷ | V (Дж) × 10 ⁻¹⁹ | a (м) × 10 ⁻¹⁰ |
|------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| poly(A) | 0.76 | 0.227 | 0.209 | 3.4 |

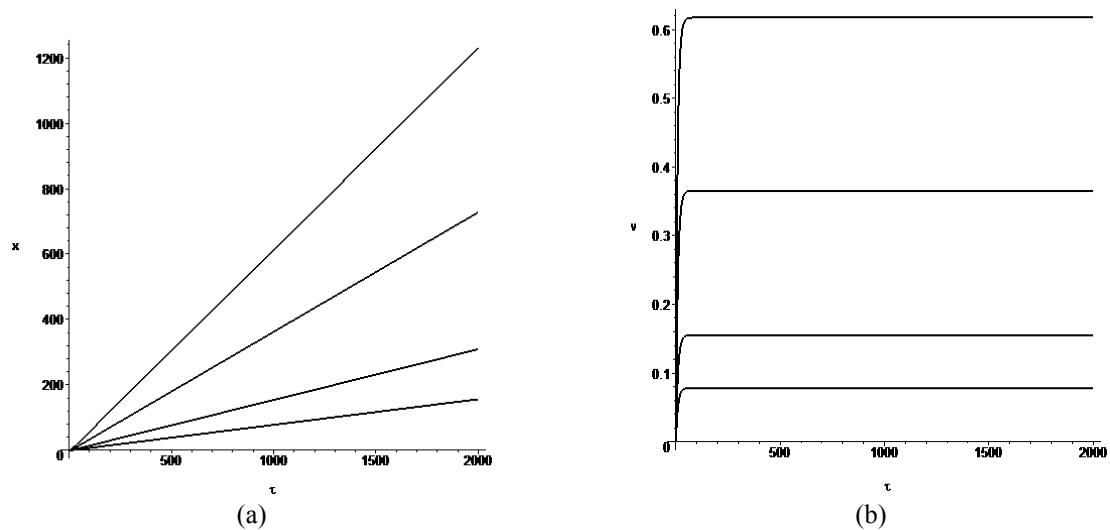


Рис. 1. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае постоянного внешнего воздействия для разных значений параметра A_0 (сверху вниз: $A_0 = 0.1$; $A_0 = 0.05$; $A_0 = 0.02$; $A_0 = 0.01$). Начальная скорость кинка: $v(0) = 0$

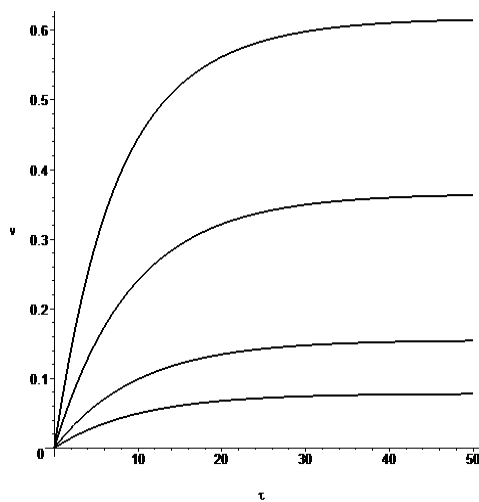


Рис. 2. Зависимость скорости v кинка от времени в случае постоянного внешнего воздействия для разных значений параметра A_0 (сверху вниз: $A_0 = 0.1$; $A_0 = 0.05$; $A_0 = 0.02$; $A_0 = 0.01$) на малых временах. $v(0) = 0$

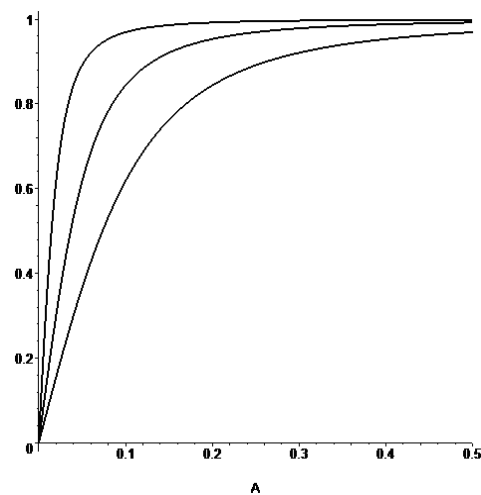


Рис. 3. Зависимость стационарной скорости кинка от A_0 в случае постоянного внешнего воздействия при разных значениях параметра диссипации β (сверху вниз: $\beta = 0.02$; $\beta = 0.05$; $\beta = 0.1$). $v(0) = 0$

Из рисунка 1 видно, что после короткого переходного периода скорость движения кинка выходит на стационар. Время выхода на стационарное значение скорости относительно мало (порядка $\delta\tau \cong 50$) и практически не зависит от величины параметра A_0 (рис. 2). Зависимость

стационарной скорости движения кинка от величины параметра A_0 представлена на рисунке 3. Расчеты выполнялись для трех значений коэффициента диссипации β : 0.1; 0.05; 0.02. В случае ДНК эти значения равны соответственно $4 \cdot 10^{-33}$, $2 \cdot 10^{-33}$ и $1 \cdot 10^{-33}$ ($\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$), что не противоречит имеющимся в литературе данным [Якушевич, 2007б].

В случае ненулевой начальной скорости проявляется еще одна особенность динамики кинка. Из второго уравнения системы (6) следует, что для любого ненулевого значения начальной скорости кинка v_0 имеется некоторое критическое значение параметра A_0^{crit}

$$A_0^{\text{crit}} = \frac{4\beta v_0}{\pi\sqrt{1-v_0^2}}, \quad (7)$$

при котором $\dot{v} = 0$, т. е. скорость кинка будет сохранять постоянное значение, равное начальной скорости v_0 . В этом случае отношение величин A_0 и A_0^{crit} будет определять характер поведения кинка. Так, если мы «запускаем» кинк с некоторой начальной скоростью v_0 , то при $A_0 > A_0^{\text{crit}}$ скорость кинка будет увеличиваться, а при $A_0 < A_0^{\text{crit}}$ скорость кинка будет уменьшаться (рис. 4).

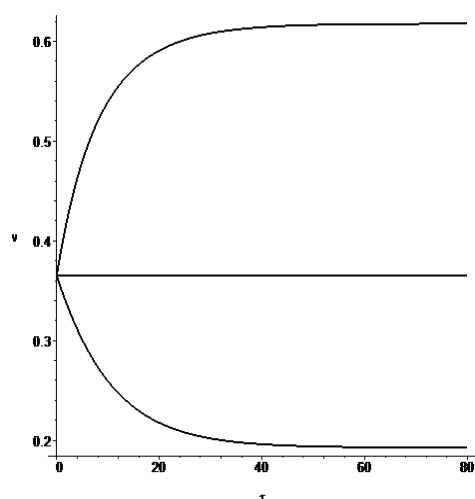


Рис. 4. Зависимость скорости v кинка от времени в случае постоянного внешнего воздействия для разных значений параметра A_0 (сверху вниз: $A_0 = 0.1$; $A_0 = 0.05$; $A_0 = 0.025$) на малых временах. $v(0) = 0.365$

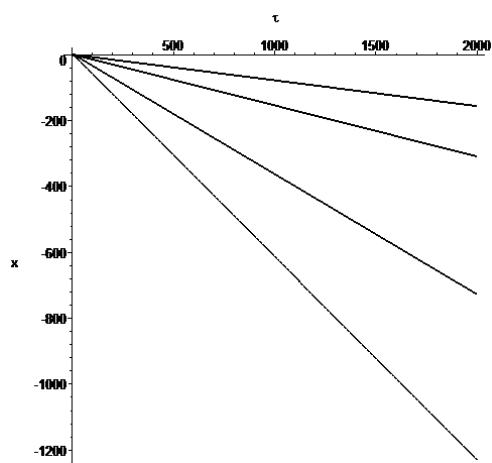


Рис. 5. Зависимость координаты x кинка от времени в случае постоянного внешнего воздействия для значений параметра A_0 (сверху вниз: $A_0 = -0.01$; $A_0 = -0.02$; $A_0 = -0.05$; $A_0 = -0.1$). $v(0) = 0$.

Возвращаясь к случаю нулевой начальной скорости, отметим, что изменив знак параметра A_0 , то есть, изменив направление действия внешней силы, можно заставить кинк двигаться в противоположном направлении (рис. 5).

При «выключении» внешнего воздействия в произвольный момент времени кинк остановится, а при «включении» — возобновит движение (рис. 6).

Таким образом, меняя амплитуду A_0 и время приложения силы, можно управлять скоростью и направлением движения кинка.

Периодическое воздействие с постоянной и низкой частотой

Расчеты показывают, что внешнее воздействие $F(\tau) = A_0 \cos \omega_0 \tau$ приводит к колебательному движению кинка вблизи начального положения (рис. 7). Такое воздействие можно также рассматривать как воздействие предыдущего типа с медленно (и периодически) меняющейся амплитудой. Изменение амплитуды внешней силы A_0 пропорционально меняет амплитуду колебаний кинка.

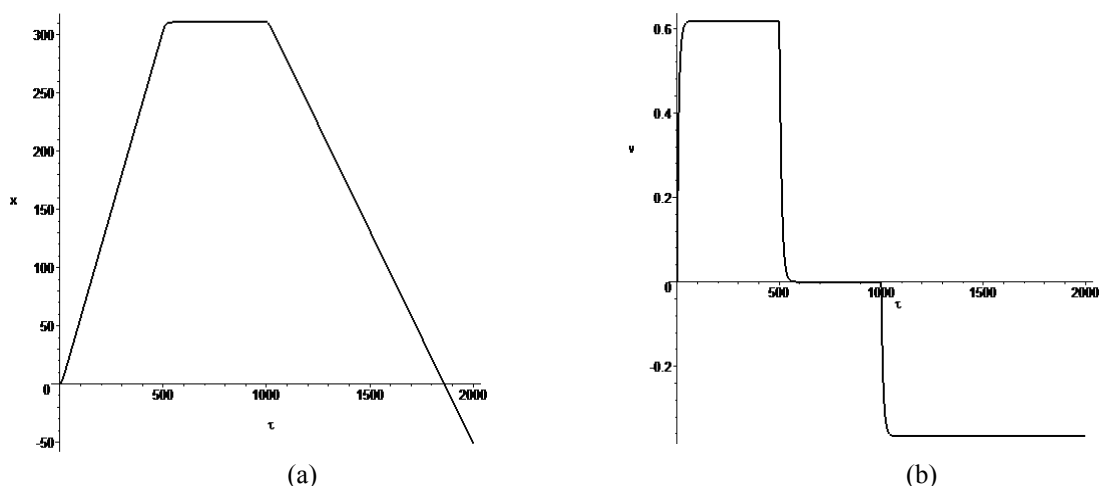


Рис. 6. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v в случае постоянного внешнего воздействия при «включении» и «выключении» внешнего воздействия. При $t = 0$ включается воздействие с $A_0 = 0.1$, которое выключается при $t = 500$. Затем при $t = 1000$ включается воздействие с $A_0 = -0.05$

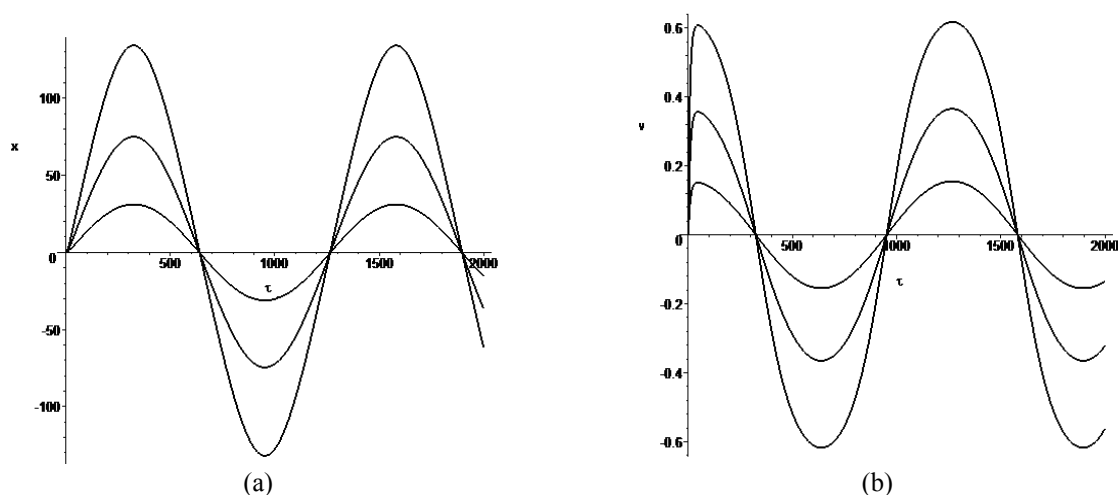


Рис. 7. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического воздействия с постоянной и низкой частотой при разных значениях амплитуды периодической силы (сверху вниз: $A_0 = 0.1$; $A_0 = 0.05$; $A_0 = 0.02$); $\omega_0 = 0.005$; $v(0) = 0$

Увеличение частоты внешнего поля ω_0 приводит к росту частоты колебаний кинка и уменьшению амплитуды этих колебаний (рис. 8).

Периодическое воздействие с постоянной и высокой частотой

При стремлении $\omega_0 \rightarrow 1$ кинк практически не движется, испытывая незначительные вибрации под действием внешней силы $F(\tau) = A_0 \cos \omega_0 \tau$ около начального положения. Другими словами, вследствие инерционности кинк практически не подвержен высокочастотному воздействию. При «выключении» внешнего воздействия колебания кинка прекращаются, а при «включении» — возобновляются. Причем могут наблюдаться небольшие смещения кинка в том или ином направлении в зависимости от величины и направления силы в момент ее «выключения» (рис. 9).

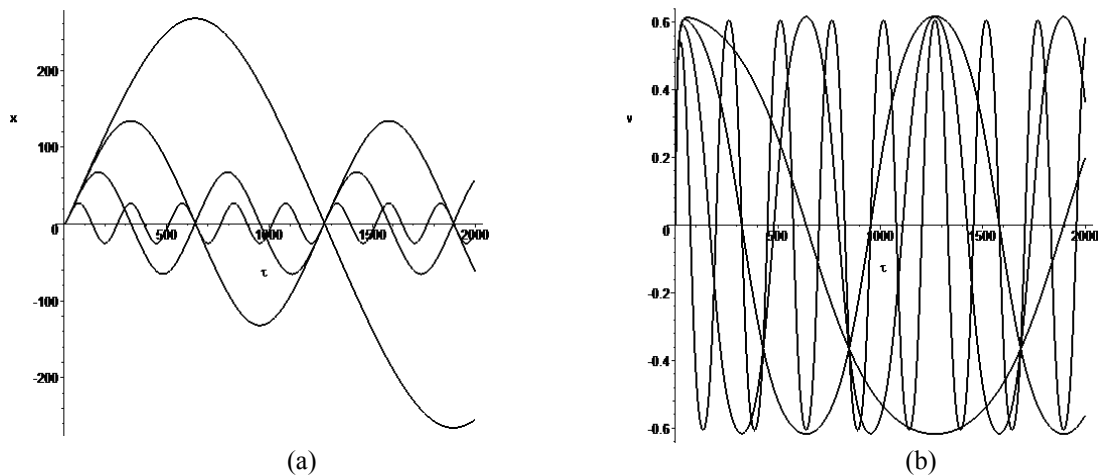


Рис. 8. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического воздействия с постоянной и низкой частотой. $A_0 = 0.1$; $v(0) = 0$. Уменьшению амплитуды колебаний координаты и росту частоты колебаний скорости соответствуют значения параметра $\omega_0 = 0.005$, $\omega_0 = 0.01$, $\omega_0 = 0.02$, $\omega_0 = 0.05$

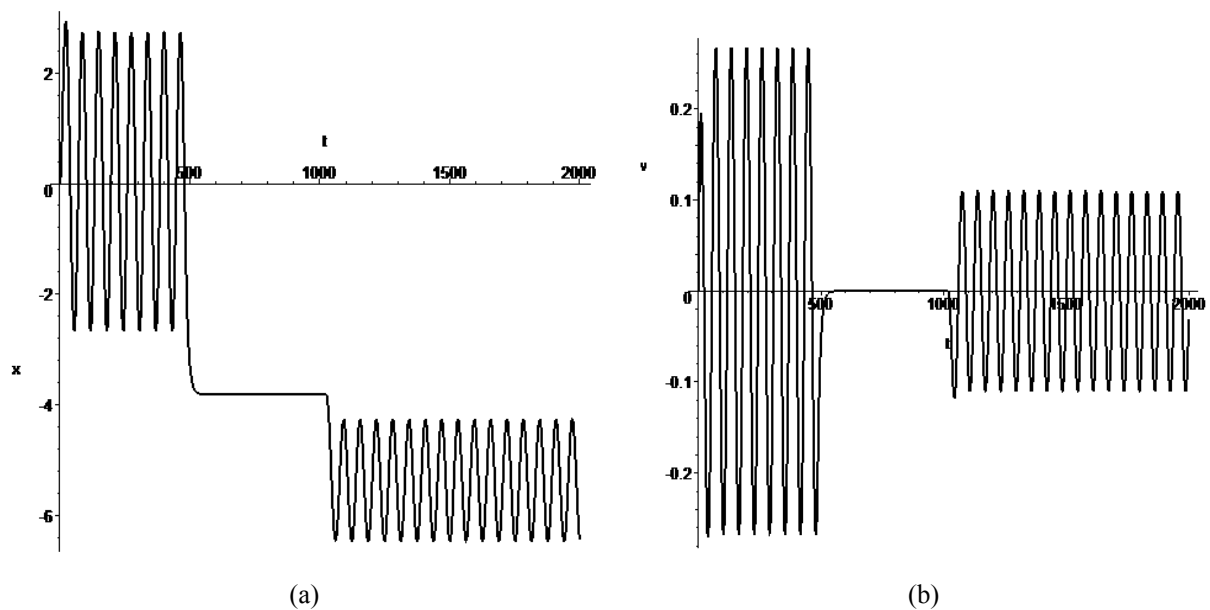


Рис. 9. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического воздействия с постоянной и высокой частотой при «включении» и «выключении» внешнего воздействия. При $t = 0$ включается воздействие с $A_0 = 0.05$ и $\omega_0 = 0.1$, которое выключается при $t = 487$. Затем при $t = 1020$ включается воздействие с $A_0 = 0.02$ и $\omega_0 = 0.1$

Периодическое частотно-модулированное воздействие

График частотно-модулированного поля $F(\tau) = A_0 \cos(\omega_0 \tau + A_1 \cos \omega_1 \tau)$ представлен на рисунке 10. Действие этого поля на динамику кинка (рис. 11) похоже на влияние постоянной внешней силы. Основное отличие в том, что скорость кинка испытывает в этом случае колебания вблизи некоторого среднего значения (рис. 11б). Поэтому движение кинка неравномерное — на поступательное движение кинка накладываются небольшие колебания (рис. 11а). На

рисунке 11а обращает на себя внимание примерно в 2.5 раза меньшая скорость движения кинка по сравнению со случаем постоянной внешней силы (рис. 1).

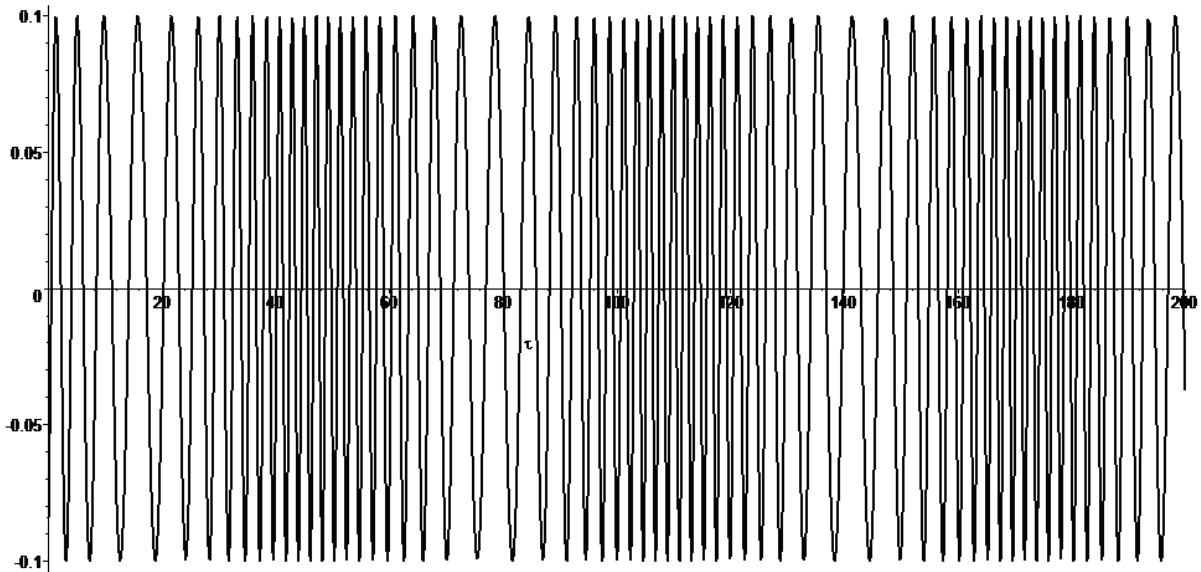


Рис. 10. График функции $F(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + A_1 \cos \omega_1 t)$. $A_0 = 0.1$, $\omega_0 = 2$, $A_1 = 10$, $\omega_1 = 0.1$

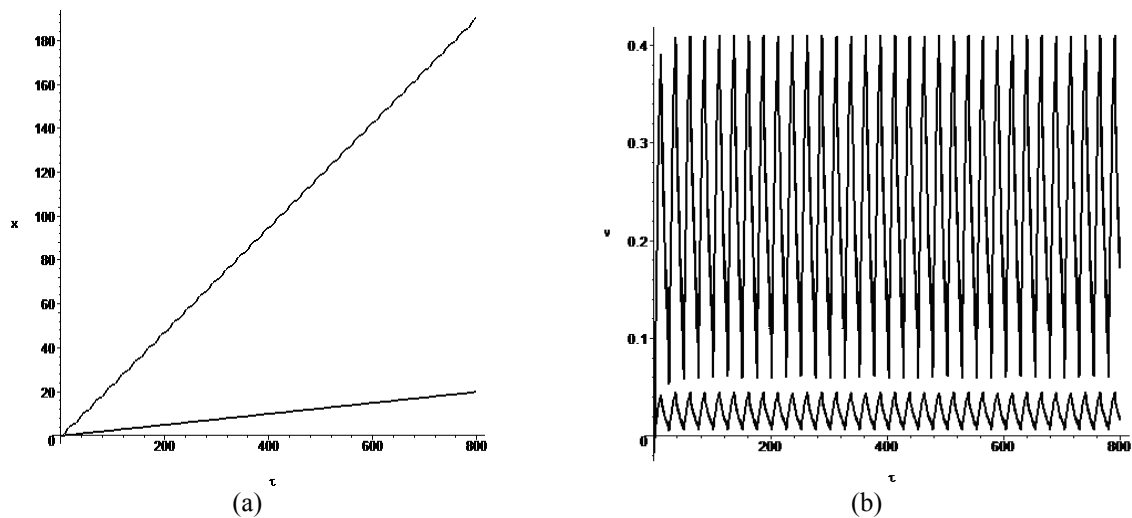


Рис. 11. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического частотно-модулированного воздействия для разных значений параметра A_0 (вверху $A_0 = 0.1$; внизу $A_0 = 0.01$). $\omega_0 = 2$, $A_1 = 10$, $\omega_1 = 0.25$, $v(0) = 0$

Результаты моделирования динамики кинка для разных значений параметра ω_0 (рис. 12) показывают, что при разных значениях этого параметра кинк может как двигаться в разных направлениях с различными скоростями, так и колебаться вблизи своего начального положения.

На рисунке 13 представлены результаты моделирования динамики кинка для разных значений другого параметра — параметра A_1 . Видно, что меняя этот параметр, можно заставить кинк либо колебаться вблизи некоторого начального положения, либо двигаться в том или ином направлении с различными скоростями.

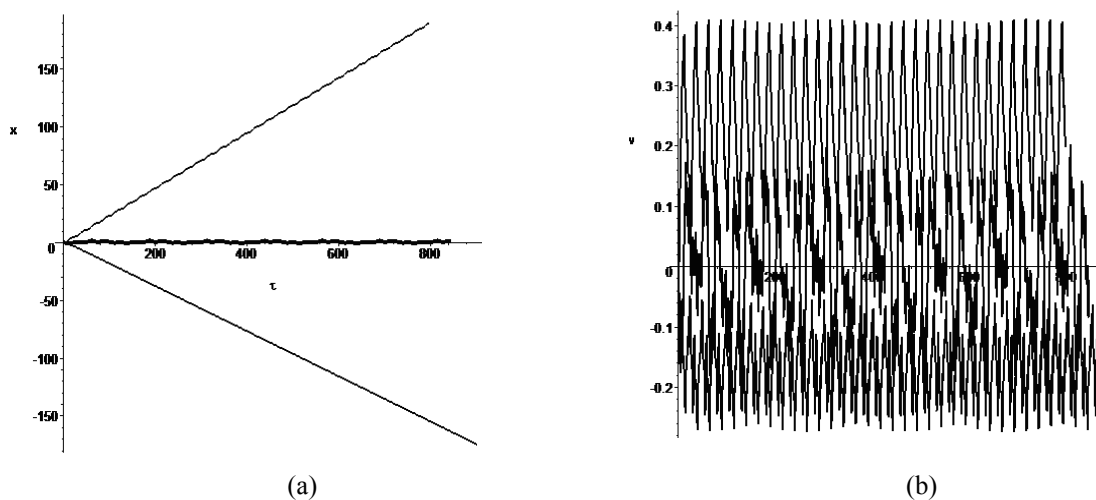


Рис. 12. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического частотно-модулированного воздействия для разных значений параметра ω_0 (сверху вниз $\omega_0 = 2$, $\omega_0 = 0.2$, $\omega_0 = 0.5$). $A_0 = 0.1$, $A_1 = 10$, $\omega_1 = 0.25$, $v(0) = 0$

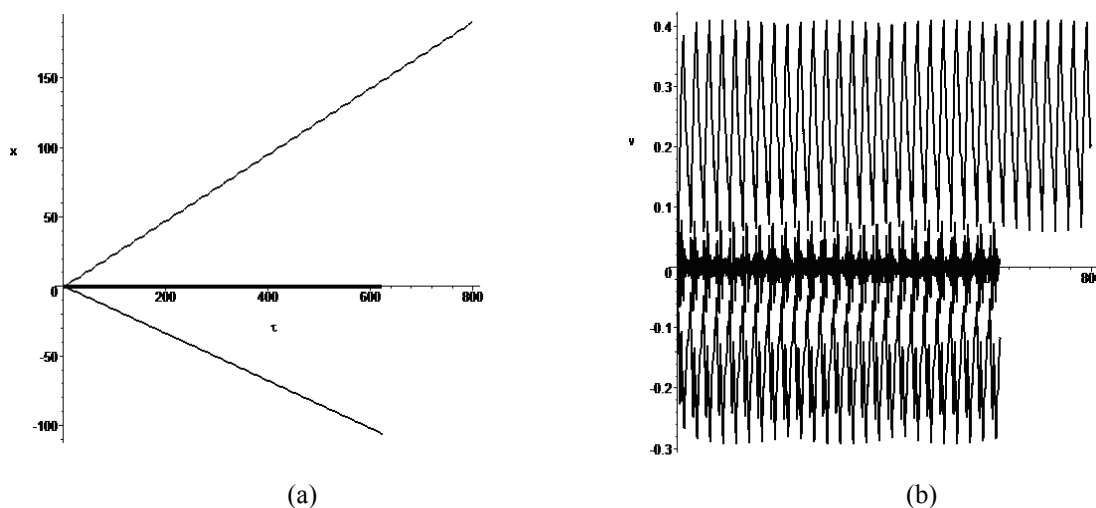


Рис. 13. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического частотно-модулированного воздействия для разных значений параметра A_1 (сверху вниз $A_1 = 10$, $A_1 = 12.23$, $A_1 = 14.5$). $A_0 = 0.1$, $\omega_0 = 2$, $\omega_1 = 0.25$, $v(0) = 0$

На рисунке 14 представлены результаты моделирования динамики кинка для разных значений третьего параметра — параметра ω_1 . Здесь также видно, что меняя этот параметр, можно заставить кинк как колебаться вблизи некоторого положения, так и двигаться в том или ином направлении с различными скоростями.

При выключении внешнего воздействия кинк останавливается, а при повторном включении внешнего воздействия возобновляет свое движение. Меняя параметры частотно-модулированного воздействия, можно менять не только скорость, но и направление движения кинка (рис. 15–16) после возобновления движения.

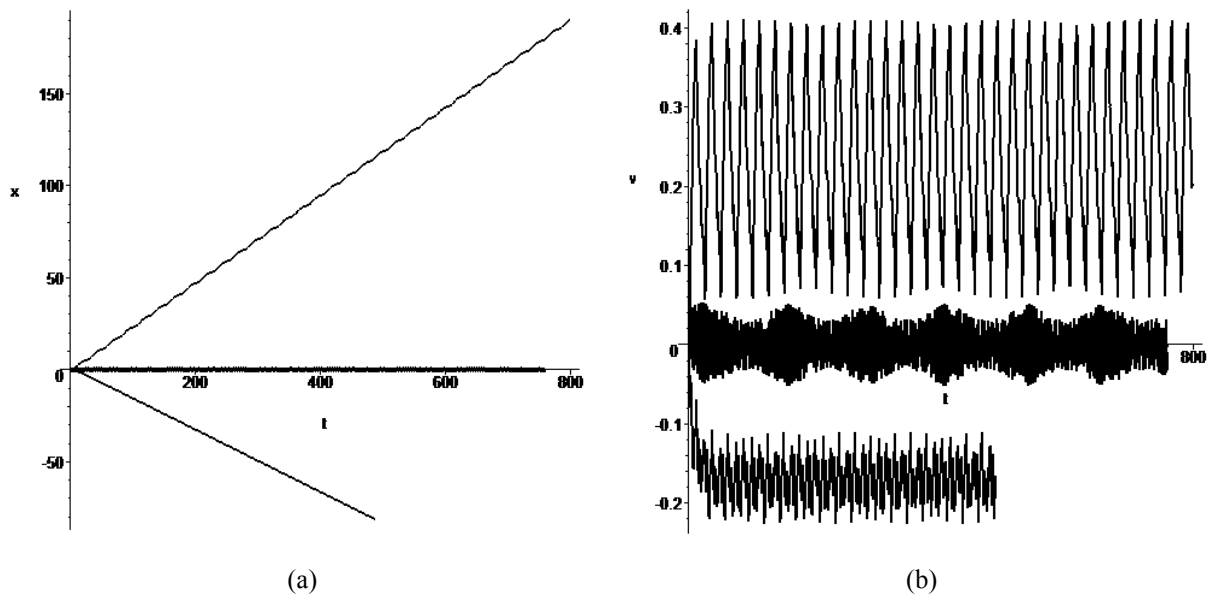


Рис. 14. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического частотно-модулированного воздействия для разных значений параметра ω_1 (сверху вниз $\omega_1 = 0.25$, $\omega_1 = 0.05$, $\omega_1 = 0.5$). $A_0 = 0.1$, $\omega_0 = 2$, $A_1 = 10$, $v(0) = 0$

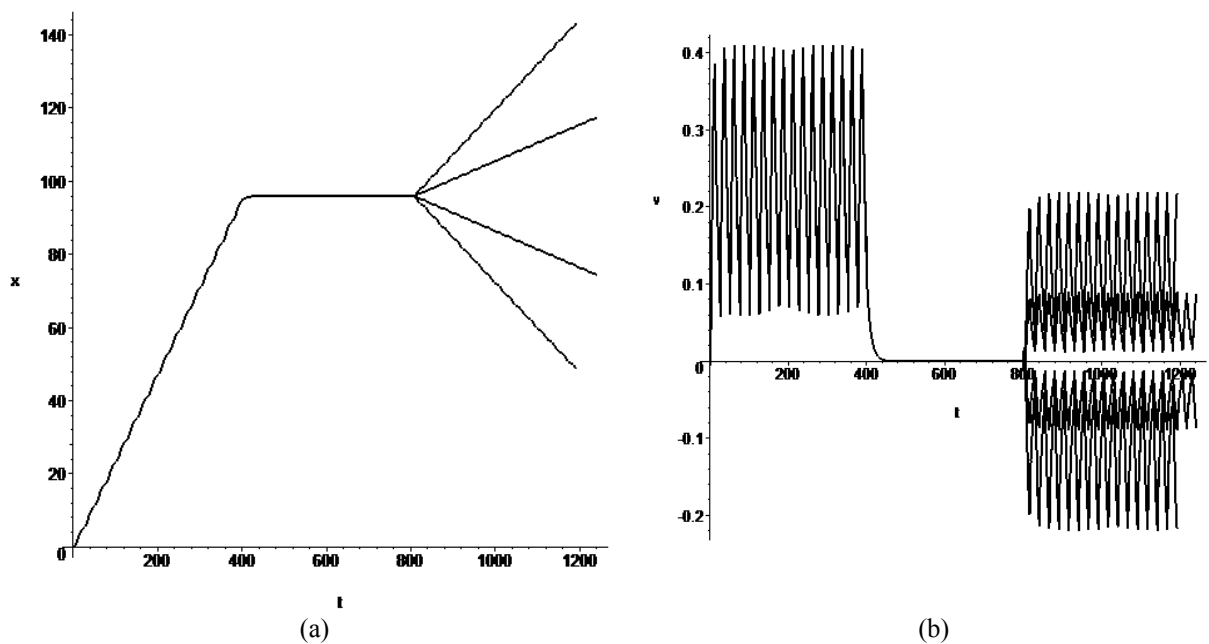


Рис. 15. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического частотно-модулированного воздействия при «включении» и «выключении» внешнего воздействия. При $t = 0$ включается воздействие с $A_0 = 0.1$, которое выключается при $t = 400$. Затем при $t = 800$ включаются воздействия (сверху вниз) с $A_0 = 0.05$, $A_0 = 0.02$, $A_0 = -0.02$ и $A_0 = -0.05$. $\omega_0 = 2$, $A_1 = 10$, $\omega_1 = 0.25$, $v(0) = 0$

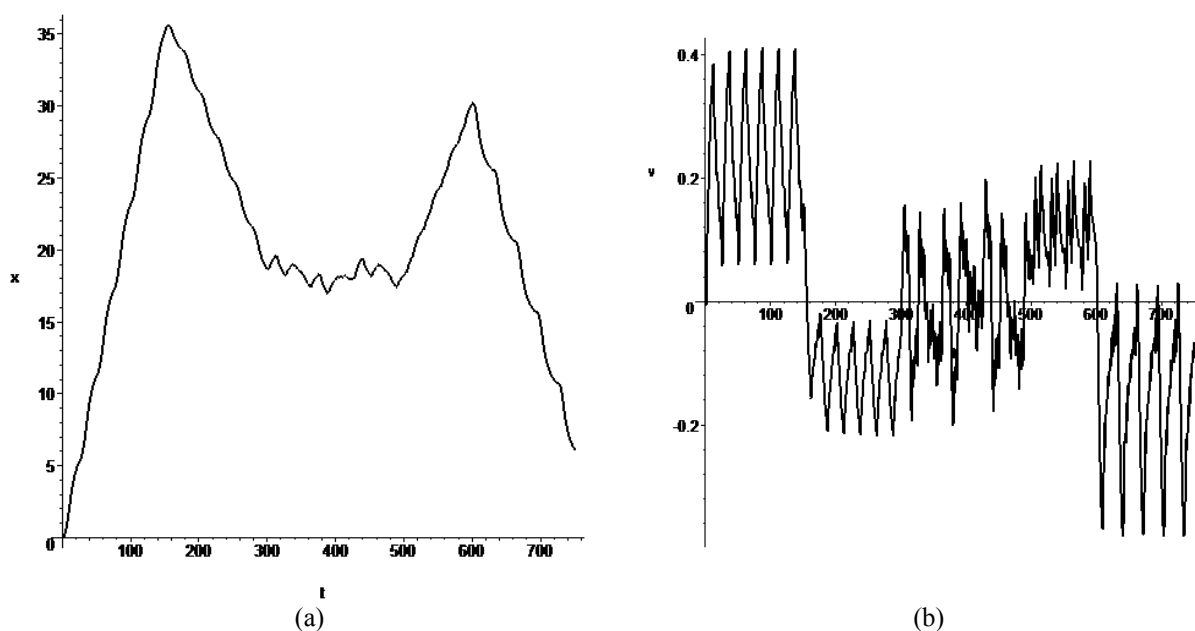


Рис. 16. Зависимость (а) координаты x и (б) скорости v кинка от времени в случае периодического частотно-модулированного воздействия при «включении» и «выключении» внешнего воздействия. Параметры воздействия представлены в таблице 2. $v(0) = 0$

Таблица 2. Параметры внешнего частотно-модулированного воздействия

| t | A_0 | ω_0 | A_1 | ω_1 |
|-----|-------|------------|-------|------------|
| 0 | 0.1 | 2.0 | 10 | 0.25 |
| 150 | -0.05 | 2.0 | 10 | 0.25 |
| 300 | 0.1 | 0.2 | 10 | 0.25 |
| 500 | 0.1 | 2.0 | 17 | 0.25 |
| 600 | 0.1 | 2.0 | 10 | 0.2 |

Особый интерес представляют зависимости стационарных скоростей движения кинка от параметров внешнего частотно-модулированного возбуждения. На рисунке 17 представлены результаты расчета зависимости стационарной скорости движения кинка от параметра A_0 . Видно, что с ростом амплитуды внешнего воздействия скорость кинка монотонно растет, выходя на стационар. Для малых A_0 можно констатировать практически линейную зависимость скорости кинка от амплитуды внешнего воздействия подобно случаю постоянной внешней силы.

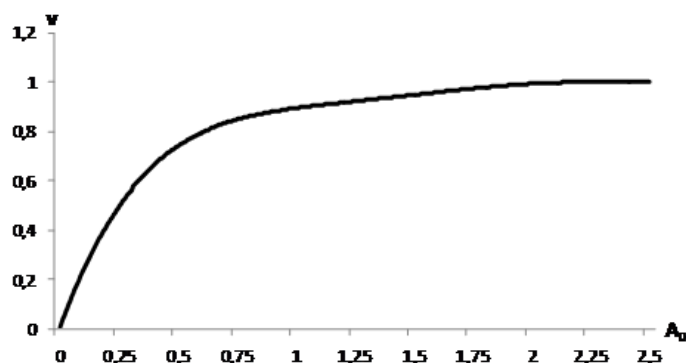


Рис. 17. Зависимость стационарной скорости движения кинка от амплитуды внешнего воздействия A_0

Результаты расчета зависимости стационарной скорости движения кинка от параметра ω_0 представлены на рисунке 18. Эта зависимость носит довольно сложный характер. Обращает на

себя внимание наличие «узких окон» значений параметра ω_0 , в которых возможно поступательное движение кинка. При остальных значениях параметра ω_0 наблюдаются только колебания кинка вблизи некоторого начального положения. Видно, что меняя параметр ω_0 внешнего воздействия, можно регулировать направление и скорость движения кинка.

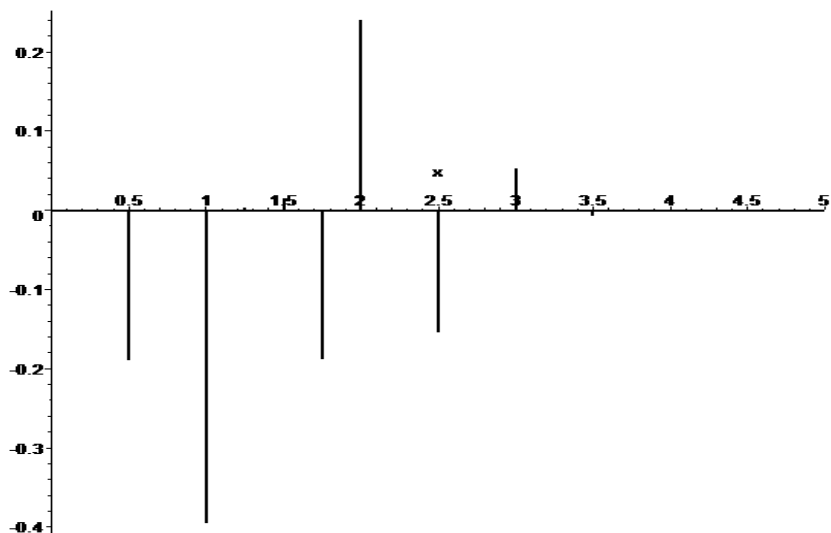


Рис. 18. Зависимость стационарной скорости движения кинка от параметра ω_0

На рисунке 19 представлены результаты расчета зависимости стационарной скорости движения кинка от параметра A_1 . Видно, что направление и скорость движения кинка можно регулировать, меняя параметр A_1 в широком диапазоне. При этом модуль скорости кинка монотонно падает с ростом параметра A_1 .

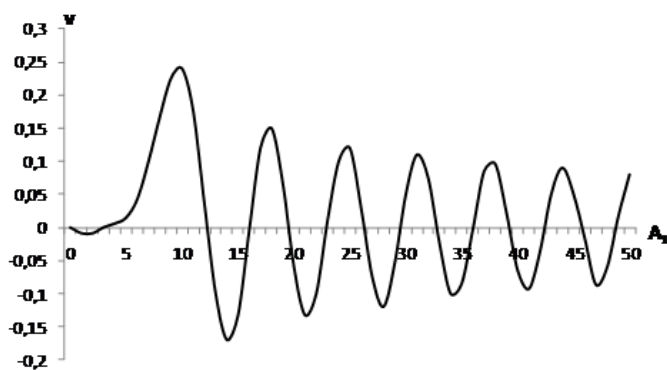


Рис. 19. Зависимость стационарной скорости движения кинка от параметра A_1 ЧМ-воздействия

Зависимость стационарной скорости кинка от параметра ω_1 также носит сложный характер (рис. 20). Здесь нужно отметить наличие «узких окон» значений параметра, в которых наблюдается поступательное движение кинка. При других значениях параметра наблюдаются колебания вблизи начального положения.

Таким образом, в работе рассмотрена возможность управления движением кинка модифицированного уравнения синус-Гордона внешними воздействиями с меняющимися параметрами. С использованием метода МакЛафлина и Скотта получены следующие результаты. Показано, что действие постоянной внешней силы на кинк приводит к пропорциональному изменению скорости последнего. Стационарная скорость движения кинка уменьшается с ростом коэффициента диссипации. Изменение направления действия постоянной внешней силы приводит к изменению направления движения кинка. Включение и выключение внешней силы

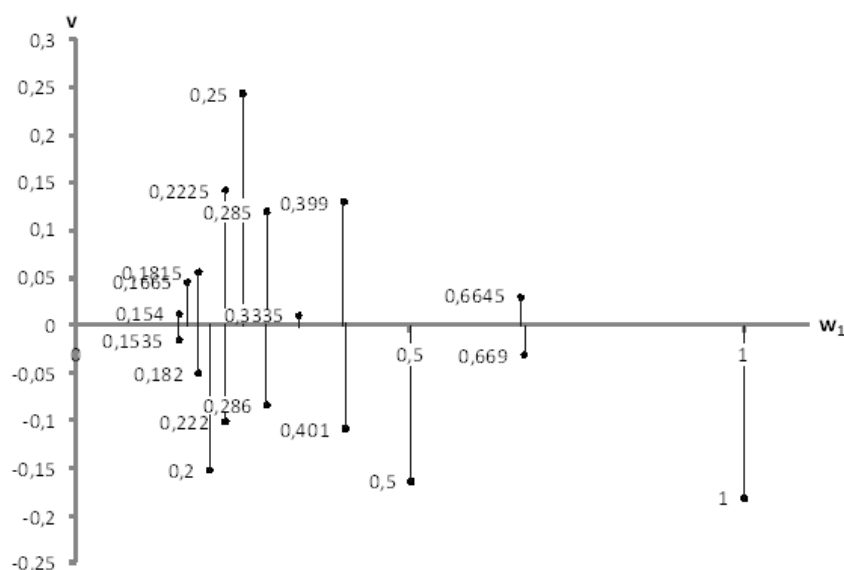


Рис. 20. Зависимость стационарной скорости движения кинка от параметра ω_1 ЧМ-воздействия. Числа соответствуют значениям параметра ω_1 , при которых возможно поступательное движение кинка

приводит к остановке и возобновлению движения кинка. В случае периодического воздействия с постоянной частотой наблюдаются колебания кинка вблизи начального положения, причем рост частоты приводит к уменьшению амплитуды колебаний. Периодическое частотно-модулированное воздействие может заставить кинк либо колебаться вблизи некоторого начального положения, либо двигаться в том или ином направлении с различными скоростями. Для последнего воздействия была также получена зависимость стационарных скоростей движения кинка от параметров. Представленные результаты действительно указывают на возможность управления движением кинка МУСГ внешним воздействием с меняющимися параметрами. В случае ДНК реализация такого воздействия могла бы стать ключом к управлению динамикой таких процессов как транскрипция, трансляция, репликация.

Список литературы

- Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля-Конторовой. Концепции, методы, приложения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 535 с.
- Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах. — Киев: Наукова думка, 1984. — 288 с.
- Екомасов Е. Г. Солитоны модифицированного уравнения синус-Гордона. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. — 94 с.
- Закирьянов Ф. К., Киселева Т. А. Нелинейная динамика ДНК с учетом диссипации и внешних воздействий. — LAP Lambert Academic Publishing, 2011 — 59 с.
- Сердюк И., Заккаи Н., Заккаи Дж. Методы в молекулярной биофизике: структура, функция, динамика: в 2 т. Т. 2 — М.: КДУ, 2010. — 736 с.
- Шамсутдинов М. А., Ломакина И. Ю. и др. Ферро- и антиферромагнитодинамика. Нелинейные колебания, волны и солитоны. — М.: Наука, 2009. — 456 с.
- Шаповалов А. В., Краснобаева Л. А. Солитоны уравнения синус-Гордона. — Томск: ТГУ, 2009. — 192 с.
- Якушев Л. В. Методы теоретической физики в исследовании свойств биополимеров. — Пушкино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1990. — 125 с.
- Якушев Л. В. Нелинейная физика ДНК. — М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007а. — 252 с.

- Якушевич Л. В., Кашапова Г. Р., Закирьянов Ф. К.* Влияние периодического поля с постоянной и медленно меняющейся частотой на движение кинка в ДНК // *Биофизика*. — 2012. — Т. 57, № 1. — С. 21–26.
- Якушевич Л. В., Краснобаева Л. А.* Влияние диссипации и внешнего поля на динамику локальных конформационных возмущений в ДНК // *Биофизика*. — 2007б. — Т. 55, № 2. — С. 237–243.
- Englander S. W., Kallenbach N. R., Heeger A. J., Krumhansl J. A., Litwin A.* Nature of the open state in long polynucleotide double helices: possibility of soliton excitations // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1980. Vol. 77, No 12. P. 7222–7226.
- McLaughlin D. W., Scott A. C.* Perturbation analysis of fluxon dynamics // *Phys. Rev. A*. — 1978. — V. 18, № 4 — P. 1652–1680.
- Salerno V., Kivshar Yu. S.* DNA promoters and nonlinear dynamics // *Phys. Lett. A* 193, 263–266, 1994.