

УДК: 536.581:519.876.5

## Математическая формулировка задачи регулирования температуры микросхемы в рамках трехмерной модели и метод ее решения

**В. М. Карабан, М. П. Сухоруков<sup>а</sup>**

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники  
Россия, 634050, г. Томск, пр. Ленина, д. 40

E-mail: <sup>а</sup> Max\_sukhorukov@mail.ru

*Получено 14 мая 2013 г.,  
после доработки 22 октября 2013 г.*

В работе рассматриваются вопросы реализации трехмерной нелинейной нестационарной математической модели термостатирования и приводится численный метод ее решения.

Ключевые слова: микросхема, гибридно-пленочный микротермостат, термостатирование, численное моделирование, метод конечных разностей

### **The mathematical formulation of the temperature control chip within a three-dimensional model and the solution method**

**V. M. Karaban, M. P. Sukhorukov<sup>а</sup>**

*Tomsk state university of control systems and radioelectronics, 40 Lenin avenue, Tomsk, Russia, 634050*

**Abstract.** — The work deals the implementation of a three-dimensional mathematical model of the nonlinear time-varying temperature control and a numerical method of solving it.

Keywords: chip, hybrid film mikrotermostat, temperature control, numerical simulation, finite difference method

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 5, pp. 805–812 (Russian).

## Введение

К настоящему времени практически отсутствуют работы, посвященные регулированию температуры микросхем. В ряде работ отечественных и зарубежных исследователей (А. И. Кривоносов, О. М. Драпкин, Т. А. Исмаилов, М. Ю. Жачук, В. П. Алексеев, В. Т. Дейнега, Л. Н. Степанова, А. В. Косых, Я. Л. Вороховский, P. R. Gray, D. I. Hamilton, I. D. Lieux) рассматривались вопросы обеспечения температурной стабильности радиотехнических устройств на основе различных методов термостабилизации. Однако в работах, как правило, используются упрощенные (квazitрехмерные) тепловые модели.

В данной работе проведено рассмотрение пространственной постановки задачи микро-термостатирования, которая сводится к решению трехмерного нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности совместно с уравнением пропорционального регулятора температуры термостабильной подложки.

## Трехмерная постановка задачи термостатирования и метод ее решения

В качестве объекта исследования рассматривается гибридно-пленочный микротермостат, содержащий термостабильную подложку, то есть подложку, на которой совместно с термостатируемой схемой в едином технологическом цикле выполнена и схема регулирования температуры (рис. 1). Температура такой подложки поддерживается постоянно в заданном диапазоне изменения температуры внешней среды с погрешностью, определяемой как выбранным законом регулирования температуры, так и конструктивно-технологическими особенностями микротермостата.

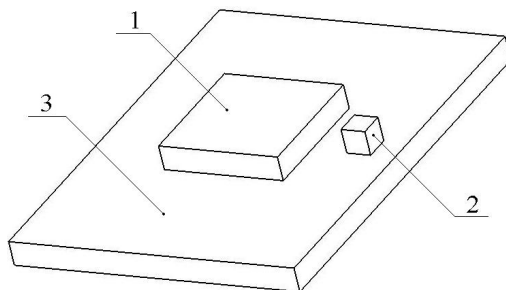


Рис. 1. Физическая модель гибридно-пленочного микротермостата: 1 — нагреватель; 2 — датчик температуры; 3 — подложка

Численное исследование проводится с учетом следующего комплекса теплофизических процессов: кондуктивного теплопереноса между элементами конструкции термостабильной подложки, лучистого теплообмена с внешней средой.

Пространственная (трехмерная) постановка задачи термостатирования сводится к решению трехмерного нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности совместно с уравнением пропорционального регулятора температуры (рис. 2) термостабильной подложки (1) при следующих допущениях:

1. Тепловыделениями термостатируемых элементов на подложке по сравнению с мощностью нагревателя можно пренебречь;
2. Все элементы исследуемой конструкции представляют собой однородные изотропные тела, теплофизические характеристики которых не зависят от координат и температуры;
3. На границах между элементами (телами) считается идеальный тепловой контакт.

$$\begin{cases} C\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{P_H(x, y, z, T_D)}{V_H}; \\ P_H(T_D) = P_{H, \text{МАКС}}, \text{ при } T_D \leq T_{\text{СТ}}; \\ P_H(T_D) = P_{H, \text{МАКС}} - \frac{P_{H, \text{МАКС}}}{\Delta T_{\text{СТ.З}}} (T_D - T_{\text{СТ}}), \text{ при } T_{\text{СТ}} < T_D < T_{\text{СТ.МАКС}}; \\ P_H(T_D) = 0, \text{ при } T_D \geq T_{\text{СТ.МАКС}}; \\ P_H(x, y, z) = P_H(T_D), \text{ при } x, y, z \in [V_H]; \\ P_H(x, y, z) = 0, \text{ при } x, y, z \notin [V_H], \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $x, y, z$  — пространственные координаты (в декартовой системе координат);  $C, \rho, \lambda$  — удельная теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности материалов;  $T, T_D$  — рассчитываемая температура и температура датчика температуры;  $T_{\text{СТ}}, \Delta T_{\text{СТ.МАКС}}, \Delta T_{\text{СТ.З}}$  — температура статирования, максимальная температура статирования и заданный диапазон температуры статирования (рис. 2);  $t$  — текущее время расчета;  $V_H$  — объем нагревателя;  $P_H, P_{H, \text{МАКС}}$  — текущая и максимальная мощность нагревателя.

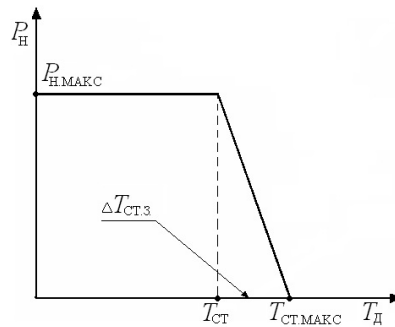


Рис. 2. Модель пропорционального регулятора температуры

Решение системы (1.1) ограничивается следующим временным:

$$t \in [0; t_{\text{МАКС}}], \quad (1.2)$$

и геометрическими условиями (рис. 3):

$$\begin{cases} x \in [x_{H1}; x_{H2}], y \in [y_{H1}; y_{H2}], z \in [z_1; z_2]; \\ x \in [x_{D1}; x_{D2}], y \in [y_{D1}; y_{D2}], z \in [z_1; z_2]; \\ x \in [0; L_x], y \in [0; L_y], z \in [0; z_1]. \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь  $x_{H1}, x_{H2}, y_{H1}, y_{H2}, z_1, z_2$  — координаты размещения нагревателя и  $x_{D1}, x_{D2}, y_{D1}, y_{D2}, z_1, z_2$  — датчика температуры, в соответствии с выбранным направлением.

При задании начальных условий считаем, что температура в начальный момент времени по всей геометрии распределена равномерно:

$$T|_{t=0} = T_0(x, y, z). \quad (1.4)$$

Исходя из (1.3) в областях контакта двух тел (рис. 3) задаются граничные условия IV рода:

$$z = z_1, x \in [x_{H1}; x_{H2}], y \in [y_{H1}; y_{H2}]: \quad \lambda_{\text{II}} \frac{\partial T_{\text{II}}}{\partial z} = \lambda_{\text{H}} \frac{\partial T_{\text{H}}}{\partial z}; \quad (T_{\text{II}} = T_{\text{H}})|_{z=z_1}; \quad (1.5)$$

$$z = z_1, x \in [x_{д1}; x_{д2}], y \in [y_{д1}; y_{д2}]: \quad \lambda_{п} \frac{\partial T_{п}}{\partial z} = \lambda_{д} \frac{\partial T_{д}}{\partial z}; \quad (T_{п} = T_{д}) \Big|_{z=z_1}. \quad (1.6)$$

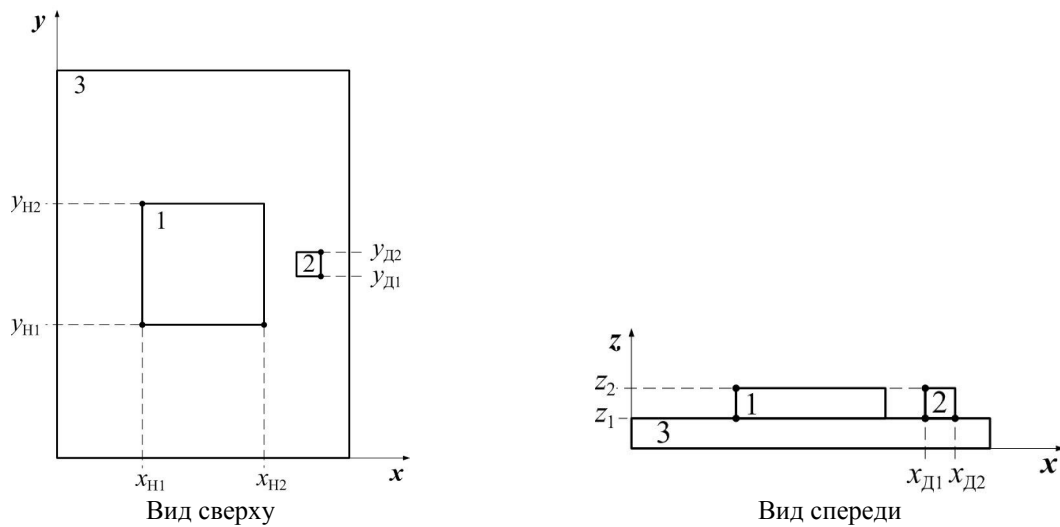


Рис. 3. Геометрия решения: 1 — нагреватель; 2 — датчик температуры; 3 — подложка

В областях свободных от контакта твердых тел задается лучистый теплообмен с поверхности по закону Стефана–Больцмана:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \varepsilon_{пр} \sigma (T^4 - T_{вн}^4) \quad \text{— вдоль оси } x; \quad (1.7)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \varepsilon_{пр} \sigma (T^4 - T_{вн}^4) \quad \text{— вдоль оси } y; \quad (1.8)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \varepsilon_{пр} \sigma (T^4 - T_{вн}^4) \quad \text{— вдоль оси } z. \quad (1.9)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана.

Приведенный коэффициент черноты поверхности тела и окружающей среды вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{пр} = \left( \frac{1}{\varepsilon_{п}} + \frac{1}{\varepsilon_{вн}} - 1 \right)^{-1}, \quad (1.10)$$

где  $\varepsilon_{п}$  — коэффициент черноты поверхности тела;  $\varepsilon_{вн}$  — коэффициент черноты внешней среды.

Сформулированное дифференциальное уравнение (1.1) с соответствующими начальными (1.2), (1.3) и граничными (1.4)–(1.9) условиями решается методом конечных разностей. При этом для производных по пространству использовалась центрально-разностная аппроксимация второго порядка точности, а для производных по времени применялась неявная аппроксимация первого порядка точности.

Для решения разностных аналогов трехмерного уравнения теплопроводности используется схема расщепления по координатам (локально-одномерная) и метод прогонки.

Нелинейности в граничных условиях преодолеваются при помощи итераций, проводимых до получения заданной точности:

$$\frac{\max |T^{(n+1)} - T^{(n)}|}{\max |T^{(n+1)}|} \leq \xi, \quad (1.10')$$

где  $n$  — номер итераций;  $\xi$  — заданная точность вычислений.

При выполнении условия (1.10) осуществляется переход к следующему временному слою.

В том случае, если при некотором заданном значении  $\xi$  выполнение условия (1.10) становится невозможным при ограниченном числе итераций, то необходимо подбирать значения сеточных параметров таким образом, чтобы набор этих параметров был оптимальным и позволял получить приближенное решение с наименьшим числом временных шагов, т. е. машинного времени [Пасконов и др., 1984].

Основные особенности конструкции разностного алгоритма для решения нелинейных дифференциальных задач на примере простейшего квазилинейного уравнения теплопроводности подробно рассмотрены в [Берковский, Ноготов, 1976].

Аппроксимация дифференциальных операторов (производных) конечно-разностными выражениями основана на разложении в ряд Тейлора гладких функций.

Для построения разностных аналогов исходного дифференциального уравнения теплопроводности (1.1) введена равномерная прямоугольная сетка с пространственными узлами в точках  $x_i, y_j, z_k$  и временными узлами в точках  $t^n$ :

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x, & \Delta x &= \frac{L_x}{I}, & i &= 1, 2, \dots, I-1, I; \\ y_j &= j\Delta y, & \Delta y &= \frac{L_y}{J}, & j &= 1, 2, \dots, J-1, J; \\ z_k &= k\Delta z, & \Delta z &= \frac{L_z}{K}, & k &= 1, 2, \dots, K-1, K; \\ t^n &= n\Delta t, & n &= 0, 1, \dots, N-1, N; \end{aligned} \tag{1.11}$$

где  $\Delta t$  — шаг сетки по времени;  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — шаги сетки по пространственным координатам  $x, y$  и  $z$ .

С учетом вышесказанного запишем разностный аналог температуры:

$$T_{i,j,k}^n = T(x_i, y_j, z_k, t^n) + \Theta(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2), \tag{1.12}$$

где  $\Theta$  — означает порядок погрешности, получаемой при отбрасывании остаточных членов ряда.

Разностный аналог тепловой мощности нагревателя:

$$P_{H\ i,j,z}^n = P(x_i, y_j, z_k, t^n) + \Theta(\Delta t + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \tag{1.13}$$

Конечно-разностные аналоги первой производной по времени и вторых производных по пространству выглядят следующим образом:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{n,i,j,k} \approx \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\Delta t} + \Theta(\Delta t); \tag{1.14}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{n,i,j,k} \approx \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \Theta(\Delta x^2); \tag{1.15}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{n,i,j,k} \approx \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} + \Theta(\Delta y^2); \tag{1.16}$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)_{n,i,j,k} \approx \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \Theta(\Delta z^2). \tag{1.17}$$

В соответствии со схемой расщепления переход от  $n$  к  $n + 1$  временному слою осуществляется с помощью двух «дробных» шагов и дифференциальное уравнение (1.1) заменяется

эквивалентной системой уравнений:

$$\text{Cp} \frac{T_{i,j,z}^{n+1/3} - T_{i,j,z}^n}{\Delta t} = \lambda \left( \frac{T_{i-1,j,z}^{n+1/3} - 2T_{i,j,z}^{n+1/3} + T_{i+1,j,z}^{n+1/3}}{\Delta x^2} \right) + \frac{1}{3} P_{H i,j,z}^n \text{ вдоль оси } x; \quad (1.18)$$

$$\text{Cp} \frac{T_{i,j,z}^{n+2/3} - T_{i,j,z}^{n+1/3}}{\Delta t} = \lambda \left( \frac{T_{i,j,z-1}^{n+2/3} - 2T_{i,j,z}^{n+2/3} + T_{i,j,z+1}^{n+2/3}}{\Delta y^2} \right) + \frac{1}{3} P_{H i,j,z}^n \text{ вдоль оси } y; \quad (1.19)$$

$$\text{Cp} \frac{T_{i,j,z}^{n+1} - T_{i,j,z}^{n+2/3}}{\Delta t} = \lambda \left( \frac{T_{i,j,z-1}^{n+1} - 2T_{i,j,z}^{n+1} + T_{i,j,z+1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right) + \frac{1}{3} P_{H i,j,z}^n \text{ вдоль оси } z. \quad (1.20)$$

Уравнение (1.18) есть сеточная аппроксимация предельно анизотропного процесса теплопередачи, при котором распространение тепла происходит лишь в направлении оси  $x$ . Аналогично можно истолковать уравнения (1.19) и (1.20). Предполагается, что попеременное распространение тепла по направлениям осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будет приближать реальный (изотропный) процесс, описываемый уравнением (1.1).

Рассмотрим способ решения уравнения (1.18), уравнения (1.19) и (1.20) решаются аналогично.

Приведем уравнение теплопроводности (1.18) к каноническому виду, сгруппировав предварительно слагаемые, содержащие температуры на разных временных слоях:

$$A_i T_{i+1,j,k}^{n+1/3} - C_i T_{i,j,k}^{n+1/3} + B_i T_{i-1,j,k}^{n+1/3} = -F_i, \quad (1.21)$$

$$A_i = 1; \quad B_i = 1; \quad C_i = 2 + \frac{\Delta x^2}{a \Delta t}; \quad F_i = \frac{\Delta x^2}{a \Delta t} T_{i,j,k}^n + \frac{\Delta x^2}{\lambda} \frac{1}{2} \left[ \frac{P_{H i,j,k}^n}{S_H h} - k_{i,j,k} \frac{\varepsilon_{\text{ПР}} \sigma \left( (T_{i,j,k}^{n+1/3})^4 - T_{\text{ВН}}^4 \right)}{h} \right],$$

где  $a = \text{Cp} / \lambda$  — коэффициент температуропроводности.

Далее введем вспомогательные коэффициенты  $p_i$ ,  $q_i$  и запишем формулы прямой и обратной прогонки:

$$p_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, I-1; \quad (1.22)$$

$$q_{i+1} = \frac{A_i q_i + F_i}{C_i - A_i p_i}, \quad i = 2, 3, \dots, I-1; \quad (1.23)$$

$$T_{i,j,k}^{n+1/3} = p_{i+1} T_{i+1,j,k}^{n+1/3} + q_{i+1}, \quad i = I-1, I-2, \dots, 1. \quad (1.24)$$

Коэффициенты  $p_i$  и  $q_i$  последовательно рассчитываются путем прямой прогонки, затем на их основе путем обратной прогонки рассчитываются значения  $T_{i,j,k}^{n+1/3}$ .

Коэффициенты  $p_1$ ,  $q_1$  и  $T_{I,j,k}^{n+1/3}$  определяются с помощью аппроксимации уравнений, описывающих граничные условия:

$$p_1 = 1, \quad q_1 = \frac{\Delta x}{\lambda} \varepsilon_{\text{ПР}} \sigma \left( (T_{0,j,k}^{n+1/3})^4 - T_{\text{ВН}}^4 \right); \quad (1.25)$$

$$T_{I,j,k}^{n+1/3} = \frac{q_I + \frac{\Delta x}{\lambda} \varepsilon_{\text{ПР}} \sigma \left( (T_{I,j,k}^{n+1/3})^4 - T_{\text{ВН}}^4 \right)}{1 - p_I}. \quad (1.26)$$

## Основные результаты

Трехмерное моделирование проводилось при следующих значениях исходных данных и параметров:

- материалом подложки служит керамика марки ВК-94;
- габаритные размеры подложки 12×16×0.5 мм;
- нагреватель и датчик выполнены по бескорпусной технологии и представляют собой кремневые транзисторы;
- нагреватель размерами 5×5×0.5 мм и мощностью 0,5 Вт расположен в центре подложки;
- датчик температуры размерами 1×1×0.5 мм, координат пространственного размещения датчика температуры [10;8] мм;
- приведенный коэффициент черноты поверхности равен 0.8;
- диапазон изменения температуры внешней среды лежит в пределах 223...323 К;
- в принятом диапазоне температур целесообразно считать достаточной точность вычислений 0.005 ;
- температура статирования составляет 333 К;
- заданный диапазон температуры статирования равен 0.8 К;
- размерность пространственной сетки и величины шага по времени: 300×400×25 (т. е.  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.04$  мм) и  $\Delta t = 0.005$  с.

Теплофизические характеристики используемых конструкционных материалов представлены в таблице 1.

Таблица 1

Наименование конструктивного элемента	Материал	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Теплопроводность $\lambda$ , Вт/(м·К)	Удельная теплоемкость $C$ , Дж/(кг·К)
Датчик температуры, нагреватель	Кремний	2300	167	800
Подложка	ВК-94	3800	13,4	1888

Результаты трехмерного моделирования представлены на рисунках 4–5.

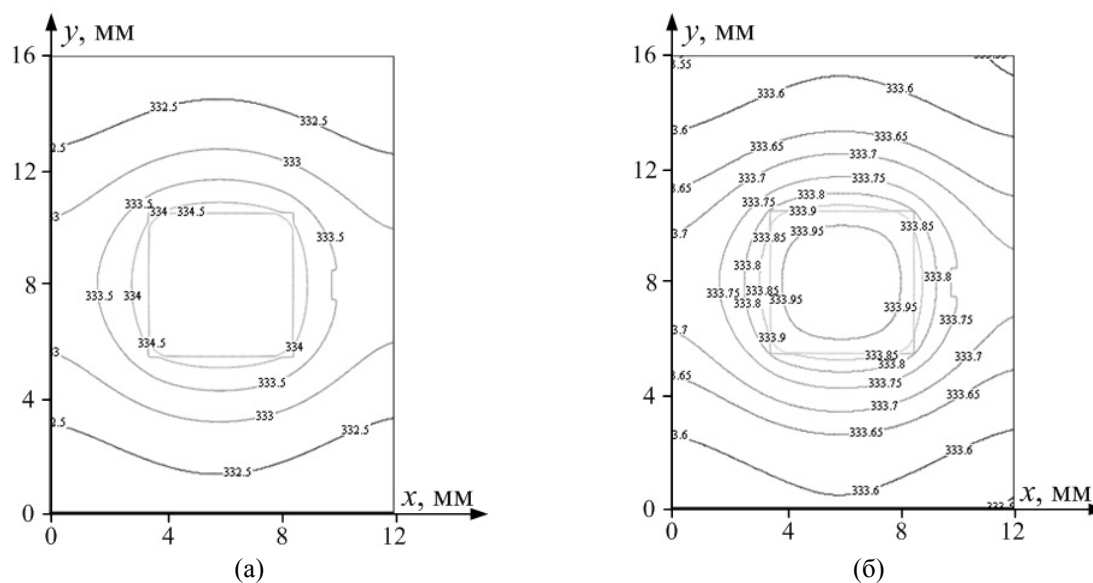


Рис. 4. Пространственная картина распределения температуры подложки: в плоскости  $z = z_1$ , в конечный момент времени, при (а)  $T_{вн} = 223$  К и (б)  $T_{вн} = 323$  К

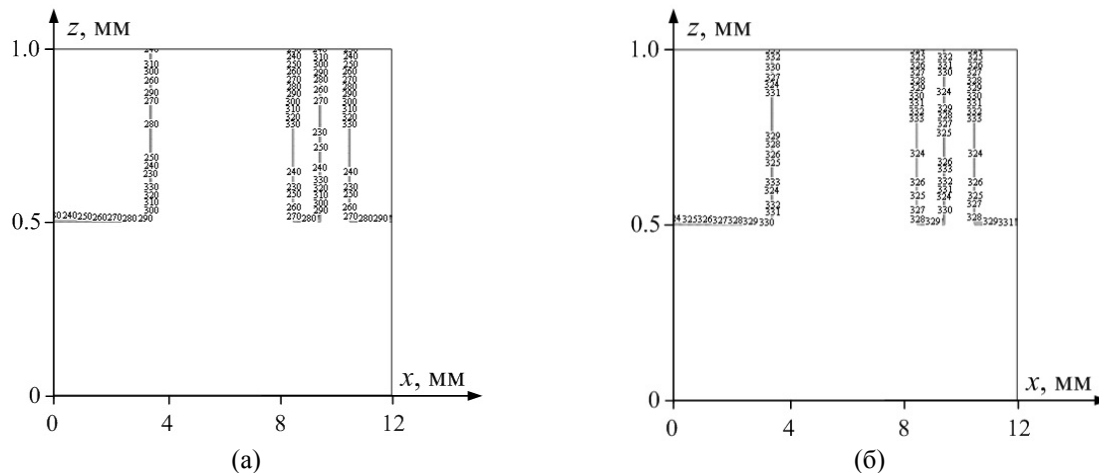


Рис. 5. Пространственная картина распределения температуры подложки: в плоскости  $y = L_y / 2$ , в конечный момент времени, при (а)  $T_{\text{вн}} = 223$  К и (б)  $T_{\text{вн}} = 323$  К

## Заключение

1. Представлена задача совместного решения трехмерного дифференциального нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности и регулирования температуры, сделаны основные допущения.

2. Предложен метод решения сформулированной задачи теплопереноса с учетом тепловой обратной связи, основанный на применении метода конечных разностей совместно со схемой разделения переменных (локально-одномерной схемой) и метода прогонки.

3. Использование трехмерной математической модели сопряжено со значительным увеличением объема вычислений и, как следствие, временных ресурсов в сравнении с упрощенной (квазитрехмерной) тепловой моделью [Alekseev, Karaban, 2008a; Alekseev, Karaban, 2008b; Алексеев, Карабан, 2006]. Однако пространственная постановка задачи является более верной с физической точки зрения, что расширяет диапазон ее применения.

4. Полученные результаты работы представляют практическую ценность для разработчиков термостабильных радиотехнических устройств и систем специального назначения, поскольку позволяют создавать изделия с повышенной и заранее прогнозируемой температурной стабильностью выходных параметров при существенном сокращении времени проектирования.

## Список литературы

- Алексеев В. П., Карабан В. М. Вопросы численного моделирования двумерного нестационарного температурного поля подложки гибридно-пленочного микротермостата // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. — Томск, 2006. — Т. 6. — С. 5–10.
- Берковский Б. М., Ноготов Е. Ф. Разностные методы исследования задач теплообмена. — Минск: Наука и техника, 1976. — 144 с.
- Пасконов В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. — М.: Наука, 1984. — 288 с.
- Alekseev V. P., Karaban V. M. Simulation of nonstationary temperature fields of a thermostable substrate for a proportional temperature regulator // Journal of Engineering Thermophysics, 2008a, Vol. 17, No. 3. — P. 253–257.
- Alekseev V. P., Karaban V. M. Topological Thermal Compensation in a Hybrid-Film Micro Thermostat Containing Thermally Stable Substrate // Radioelectronics and Communications Systems, 2008b. — Vol. 51, No. 11. — P. 585–589.