

УДК: 531.55+514.85

Численно-аналитическое интегрирование уравнений свободного движения тяжелой точки вблизи звукового пика показателя степенного сопротивления

В. В. Чистяков

ФБГОУ ВПО «Ярославская государственная сельскохозяйственная академия»,
Россия, 150042, г. Ярославль, Тутаевское ш., д. 58

E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru

Получено 9 апреля 2012 г.
после доработки 3 октября 2013 г.

Показано, что для различных баллистических профилей во всем скоростном пространстве сила сопротивления изменяется со скоростью V по закону $R(V) = Mg \cdot w \left(\frac{V}{W_T} \right)^{n(V)}$, где W_T — близкая к звуковой пороговая скорость, $w = R(W_T)$, $n(V)$ — значение показателя в кусочно-степенной формуле. Методом, базирующимся на преобразованиях Лежандра, найдена отражающая пик $n(V)$ поправка к невозмущенной резольвентной функции $f(b) = a''_{bb}(b)$, $a(b)$ — подкасательная к траектории, $b = \text{tg } \theta$ — ее наклон.

Ключевые слова: баллистический профиль, сопротивление, скорость, показатель степени, звуковой пик, преобразование Лежандра, резольвентная функция, поправка теории возмущений

Numerical-analytical integrating the equations of a point mass projectile motion at the velocities close to sonic peak of air drag exponent

V.V. Chistyakov

Yaroslavl' State Academy of Agriculture, 58 Tutaevskoe shosse, Yaroslavl', 150042, Russia

Abstract. — It is shown that the relative air drag force for many different ballistic profiles obeys the law as follows $R(V) = w \left(\frac{V}{W_T} \right)^{n(V)}$ with V being the velocity, W_T — some threshold velocity close to that of sound, w equals to $R(W_T)$ and $n(V)$ is the exponent in broken power Gâvre formula. Using the Legendre transformation and in frames of perturbation approach received was the expression for addition $\delta a''_{bb}(b)$ to resolvent function $a''_{bb}(b)$, where $a(b)$ is an intercept and $b = \text{tg } \theta$, θ — inclination angle.

Keywords: ballistic profile, power-law air resistance, exponent, sonic peak, Legendre transformation, resolvent function, perturbation approach, first term

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 5, pp. 785–798 (Russian).

Постановка задачи

Кусочно-степенную формулу Гавра (Gåvre) $R(V) = K \cdot V^n$ для описания силы сопротивления движению в воздухе тяжелой массы повсеместно используют, несмотря на наличие в скоростном поведении $n(V)$ ярко выраженного звукового пика. (Вне околосвуковой области сила $R(V)$ подчиняется квадратичному закону Рэлея [Routh, 1898; Забудский, 1895], а непосредственно за звуковым пределом — закону «3/2-х» Томаса [Thomas, 1945]).

Такое использование предполагает разбиение всего скоростного диапазона на сравнительно узкие интервалы, в каждом из которых зависимость $\ln R(V)$ от $\ln V$ с высокой точностью приближается линейной регрессией. Таким образом, надежно оценивается эластичность силы сопротивления по скорости $E_v(R) = \frac{d \ln R(V)}{d \ln V}$, равная, как известно, показателю степени n_i , а также $\ln K_i$ как свободный член уравнения регрессии в интервале i .

Но по мере повышения требуемой точности скоростные интервалы становятся все уже, а «скачки» n — все более микроскопическими ([G1 drag function file]). Потому разумно принять концепцию непрерывно изменяющегося со скоростью показателя в соответствии с относительно несложной интерполяционной формулой для опытных данных и аналитически/численно интегрировать баллистические уравнения в восстановленном таким образом целом скоростном пространстве.

Проблема численного интегрирования актуальна и для собственно баллистики, занимающейся разработкой баллистических калькуляторов, и для космических исследований, имеющих дело со спускаемыми аппаратами, и для других прикладных областей техники, а также для спорта, анимации и пр.

Что же касается аналитического интегрирования, преследующего цель получить аналитическое выражение, которое затем аналитически же можно исследовать в зависимости от входных параметров, то интерес здесь проявляется с фундаментальной точки зрения как к задаче нелинейной динамики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для ее решения использовался базирующийся на преобразованиях Лежандра резольвентный метод, ранее зарекомендовавший себя в получении высокоточных аппроксимаций решений для движения в однородной и неоднородной средах при фиксированном показателе степени [Чистяков, 2011; Чистяков, 2012а, 2012б].

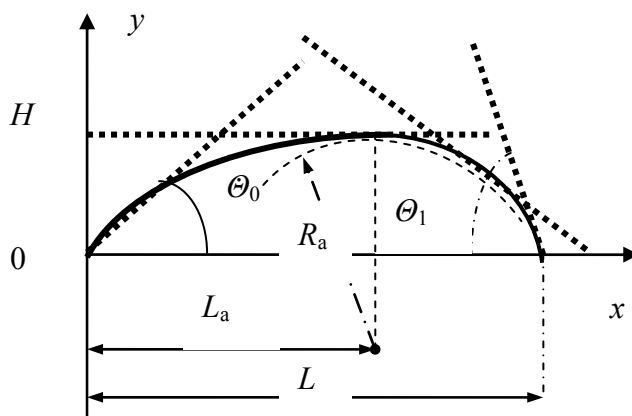


Рис. 1. Баллистическая траектория (—) и ее касательное расслоение (---)

В согласии с этим методом задача рассматривается в *проективно-двойственных* переменных, то есть фигурируют *угловой коэффициент* касательной к траектории $b = \operatorname{tg} \theta$ и *прерывание* $a(\theta(b)) \equiv a(b)$, которые по мере свободного движения монотонно изменяются от своих стартовых значений $b_0 = \operatorname{tg} \theta_0 > 0$ и $a_0 = 0$ (рис. 1). При этом вторичный по важности временной

фактор исключается из рассмотрения, и траектория задается зависимостью

$$a = a(b), \quad b \in [b_0, b_1],$$

легко допускающей обратный переход к x -, y -координатам и скоростям V по известным формулам [там же]

$$x = -\int_{b_0}^b a_{bb}^{\cdot\cdot}(\tilde{b})d\tilde{b}, \quad y = -\int_{b_0}^b \tilde{b}a_{bb}^{\cdot\cdot}(\tilde{b})d\tilde{b}, \quad V = \sqrt{a_{bb}^{\cdot\cdot}g(1+b^2)}. \quad (1.1)$$

Сила сопротивления

В кусочно-степенной формуле для относительной силы сопротивления

$$G(V) = F(V) / Mg = \frac{d^2}{Mg} \cdot K(V)V^{n(V)} \quad (2.1)$$

параметры K и n для испытуемых тел вращения диаметром d различны в относительно узких скоростных поддиапазонах, число которых может доходить до 40 [G1 drag function file]. Граничные скачки показателя n и $\lg K$ при этом незначительны, поэтому, как уже отмечалось, не будет ошибкой интерполировать баллистические данные непрерывными функциями $K(V)$ и $n(V)$.

Переменный показатель степени требует безразмерного аргумента, поэтому для силы сопротивления R предполагалось выражение

$$R(V) = w \left(\frac{V}{W_T} \right)^{n(V)}, \quad (2.2)$$

где W_T — некоторая пороговая скорость, w — относительное (в единицах веса Mg) сопротивление движению с этой скоростью, а $n(V)$ — интерполяция экспериментальных данных.

Если отождествить $R(V)$ (2.2) с $G(V)$ (2.1), то, с одной стороны $\lg G(V) = \text{const}(d) + \lg K + n \lg V$, с другой — $\lg R(V) = \lg w + n \lg V - n \lg W_T$. Следовательно, при справедливости (2.2) должно выполняться равенство

$$\lg K = -\text{const}(d) + \lg w - n \lg W_T \quad (2.3)$$

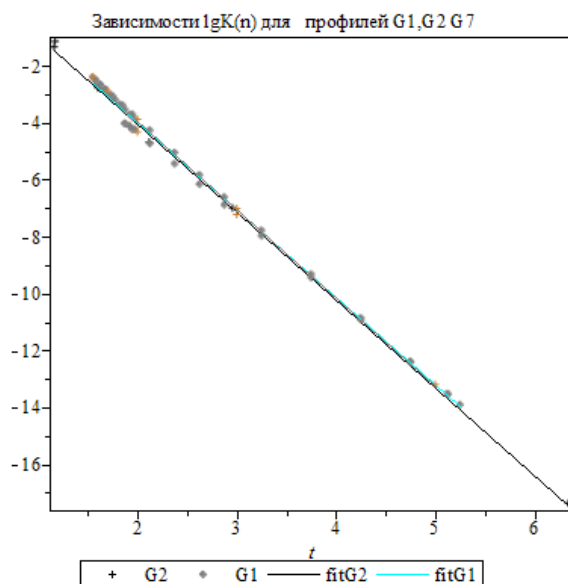
и наоборот.

Линейная регрессия для данных по баллистическому профилю G1 [G1 drag function file] дает практически идеальную зависимость $\lg K = 2.13885(0.07886) - 3.07076(0.02751) \cdot n$ ($adj - R^2 = 0.9970$, $F(1,38) = 12460$) и значение порога $W_T = 358 \pm 24$ м/с, формально заматающее звуковую скорость $V_s = 331$ м/с. Однако объем данных $N = 40$ единиц сформирован по гораздо большему числу экспериментальных точек, хотя бы по 5 на каждый скоростной интервал, поэтому разброс W_T должен быть в разы уменьшен.

Для других профилей (G2, G3, G7) и по другим литературным данным идеальность линейной зависимости сохраняется, но значения порога W_T составляли от 311 до 413 м/с.

Чрезвычайно высокая надежность отдельных оценок (для $W_T = 386$ м/с $adj - R^2 = 0.99986$) не позволяет утверждать, что пороговая скорость тождественна со звуковой, не способной так широко варьироваться с температурой (0.59 м/с·град) и давлением. Данная величина уникальна для каждого тела, как и закон $n(V)$, вкпе с которым (и с величиной w (2.2)) они составляют полный баллистический портрет снаряда.

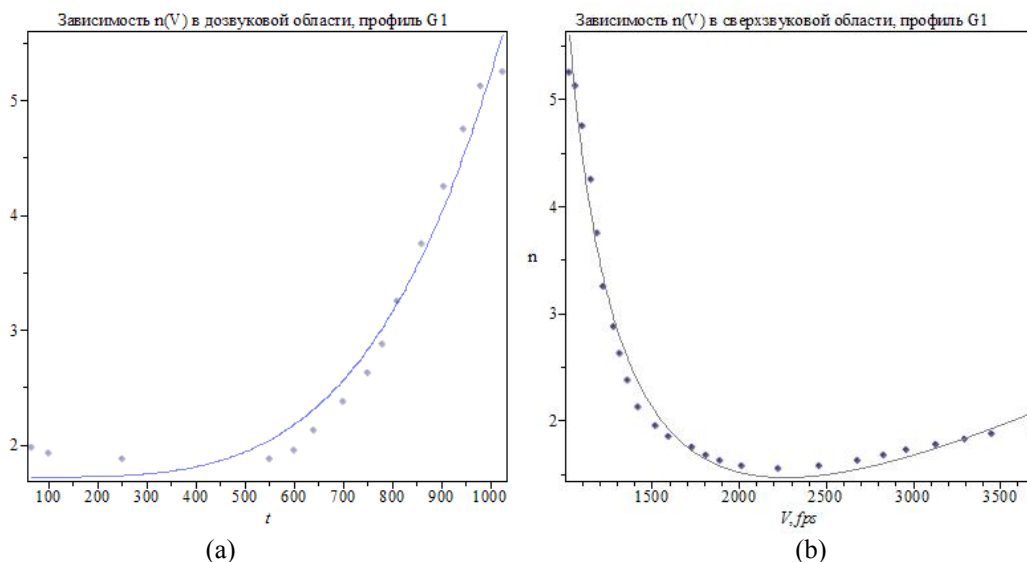
Безразмерная скорость $u = V/W_T$ далее будет именоваться *квазичислом Маха*.

Рис. 2. Зависимости $\lg K(n)$ по данным [URL]

Что касается моделирования поведения показателя степени, то разумно рассматривать до- и сверхзвуковую области раздельно. В первой из-за критического возрастания $n(V)$ вблизи звукового порога V_s разумно предположить зависимость

$$n(V) \approx n_0 + \lambda \left(\frac{V}{V_s} \right)^k = n_0 + \lambda u^k \left(\frac{W_T}{V_s} \right)^k, \quad k = 2, 3, 4 \dots \quad (2.4)$$

Значение $k = 4$, т. е. неполная биквадратная зависимость, хорошо приближает экспериментальные данные по профилю G1 при $n_0 = 1.72 \pm 0.08$, $\lambda = 4.79 \pm 0.22$ ($R^2 = 0.973$), (рис. 3а). Для других профилей ввиду малочисленности данных оценки не производились.

Рис. 3. Экспериментальные [URL] зависимости и теоретические кривые $n(V/\text{фт/с})$ (2.4) в до- и (2.5) в сверхзвуковых областях для профиля G1

В сверхзвуковой области резкое убывание $n(V)$ (для того же профиля) неплохо интерполируются формулой, сводящейся к хрестоматийной сумме взаимнообратных линейных выражений,

т. е.

$$n(V / м / с) \approx -1.345 + \frac{570}{V - 221} + 0.00236 \cdot V, \quad (2.5)$$

$R^2 = 0.979$ (рис. 3b).

Но локально в непосредственной близости звукового пика зависимость $n(V)$ хорошо моделируется простой линейной формулой

$$n(V) \approx n_0 + \lambda V, \quad (2.6)$$

с $\lambda_+ = 0.03 \pm 0.002$ с/м ($adj - R^2 = 0.982$, $F(1.5) = 323.42$) на возрастающей ветви, и $\lambda_- = -0.021 \pm \pm 0.0024$ с/м — на ниспадающей.

Уравнения динамики

Даже при линейной зависимости $n(V)$ они не интегрируемы в квадратурах, поэтому получить приближенное аналитическое решение можно, например, при помощи теории возмущений. Тогда встает вопрос о выборе нулевого приближения, которое должно соответствовать некоторому неизменному показателю m .

Нецелесообразно выбирать его соответствующим начальной скорости V_0 , так как вариация $n(V)$ от нее максимальна в процессе движения. То же и для минимальной скорости V_{\min} , достигаемой на участке падения.

Разумно в качестве такой базовой скорости выбрать среднюю скорость $V_{cp} = L_m / T_m$, где L_m — длина дуги, а T_m — время движения по невозмущенной изменчивостью n траектории с некоторым базовым индексом m , соответствующим на кривой $n(V)$ этой самой скорости. Однако, временное среднее не имеет прямого отношения к решаемой задаче, где аргументом является наклон b .

В качестве оценки этой важной средней величины может служить вершинная, или разворотная скорость $V_a \in (V_{\min}, V_0)$, удобная уже тем, что всегда достигается при одном и том же наклоне $b_a = 0$. Кроме того, при значениях $w = R(W_T) \geq 1$ после прохождения пологого минимума скорости последняя восстанавливается слабо, и можно считать, что весь оставшийся путь вплоть до приземления на уровне старта проходит с этой минимальной скоростью.

Вообще, вершинные параметры являются ключевыми при интегрировании невозмущенной задачи [Чистяков, 2011; Чистяков, 2012а, 2012b], потому имеет смысл остановиться на этом варианте, т. е. разворотной скорости $V_a \in (V_{\min}, V_0)$, определение которой по исходным величинам n_0 , V_0 и b_0 представляет определенную проблему (см. ниже).

Примем линейное приближение для показателя $n(V)$. Тогда $n(V) \approx (n_0 + \lambda_{\pm} V_a) + \lambda_{\pm} (V - V_a) = m + \lambda_{\pm} (V - V_a)$ (далее параметр обозначен просто λ).

Ниже записаны исходные

$$\begin{cases} \ddot{x} = -gw\dot{x} \frac{V^{n(V)-1}}{W_T^{n(V)}}, \\ \ddot{y} = -gw\dot{y} \frac{V^{n(V)-1}}{W_T^{n(V)}} - g \end{cases}$$

и преобразованные баллистические уравнения

$$\begin{cases} \ddot{x} = -gw \left(\frac{\dot{x}}{W_T} \right)^{n(V)} \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{n(V)-1}, \\ \ddot{y} = -gwb \left(\frac{\dot{x}}{W_T} \right)^{n(V)} \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{n(V)-1} - g. \end{cases} \quad (3.1)$$

С учетом выражений для темпа изменений наклона и координат [там же1]

$$\dot{b} = -\sqrt{\frac{g}{a_{bb}''}} \quad \dot{x} = \sqrt{a_{bb}'' g}, \quad V = \sqrt{a_{bb}'' g (1+b^2)}$$

несложные элементарные преобразования дадут резольвентное уравнение [Чистяков, 2012, тез.] —

$$a_{bbb}''' = 2a_{bb}'' w \left(\frac{a_{bb}'' g}{W_T^2} \right)^{\frac{m}{2} + \frac{\lambda \left(\sqrt{a_{bb}'' g (1+b^2)}^{\frac{1}{2}} - V_a \right)}{2}} \left(\sqrt{1+b^2} \right)^{m+\lambda \left(\sqrt{a_{bb}'' g (1+b^2)}^{\frac{1}{2}} - V_a \right) - 1}. \quad (3.2)$$

Переходом к безразмерной функции $s(b) = \frac{g a_{bb}''(b)}{W_T^2}$ и вводом нового, также безразмерного параметра $\Delta_T = \lambda \cdot W_T$ получается

$$\frac{ds(b)}{db} = 2ws(b)^{\frac{m}{2}+1+\frac{\Delta_T \left(\sqrt{s(b)(1+b^2)}^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right)}{2}} \left(1+b^2 \right)^{\frac{m-1+\Delta_T \left(\sqrt{s(b)(1+b^2)}^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right)}{2}}. \quad (3.3)$$

При этом уравнение для неизменного базового показателя $m = n_0 + \lambda V_a = n_0 + \frac{\lambda V_0}{\sqrt{C_m}}$

$$\frac{ds_m(b)}{db} = 2ws_m(b)^{\frac{m}{2}+1} \left(1+b^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \quad (3.4)$$

имеет при соответствующих начальных условиях в качестве решения [Чистяков, 2012, ст.]

$$s_m(b) = \frac{gR_a}{W_T^2 \left(1 - m\beta_m b F \left(\frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b^2 \right) \right)^{\frac{2}{m}}}, \quad (3.4')$$

где $R_a = \frac{V_a^2}{g} = \frac{V_0^2}{g \left(\left(1+b_0^2 \right)^{\frac{m}{2}} + m \left(\frac{V_0}{V_T} \right)^m b_0 F \left(\frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{m}}}$ — радиус кривизны в вершине

траектории, $V_a^2 = \frac{V_0^2}{C_m}$ — вершинный квадрат скорости, $C_m = \frac{V_0^2}{V_a^2} =$

$= \left(\left(1+b_0^2 \right)^{\frac{m}{2}} + m \left(\frac{V_0}{V_T} \right)^m b_0 F \left(\frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{m}}$, $\beta_m = \frac{V_a^2}{V_T^2}$ — отношение квадрата вершинной

(разворотной) скорости к квадрату предельной (V_T) при падении с неограниченной высоты в однородном поле тяготения.

Преобразование (3.3) с учетом логарифмического тождества дает

$$\frac{ds(b)}{db} = 2ws(b)^{\frac{m}{2}+1} \left(1+b^2 \right)^{\frac{m}{2}+1-\frac{3}{2}} \cdot \exp \left(\Delta_T \left(\sqrt{s(b)(1+b^2)}^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln \left(\sqrt{s(b)(1+b^2)}^{\frac{1}{2}} \right) \right). \quad (3.5)$$

Для квазичисла Маха $u(b) = \frac{V(b)}{W_T} = \sqrt{s(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}}$ получается уравнение

$$\frac{du(b)}{db} = \frac{u(b)b}{1+b^2} + w \frac{u(b)^{m+1} \cdot \exp\left(\Delta_T \left(u(b) - \frac{V_a}{W_T}\right) \ln u(b)\right)}{\sqrt{1+b^2}}, \quad (3.6)$$

которое при $\Delta_T = 0$ переходит в невозмущенное

$$\frac{du_0(b)}{db} = \frac{u_0(b)b}{1+b^2} + w \frac{u_0(b)^{m+1}}{\sqrt{1+b^2}} \quad (3.7)$$

относительно $u_0(b) = \sqrt{s_m(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}}$.

Аналитическое интегрирование

Способ интегрирования базируется на условии малости аргумента экспоненты (3.6)

$$q(b, w) = \Delta_T \left| \left(u(b) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u(b) \right| < q_{cr}^{(I)} = 0.15,$$

позволяющем с однопроцентной точностью заменить ее разложением первого порядка, а при $q(b, w) \leq q_{cr}^{(II)} = 0.45$ с той же точностью, но порядка два.

Эта величина есть текущая вариация показателя $\Delta n(V) = n(V) - m$ от базового значения m . Компьютерные оценки показывают, что в области углов прицельной стрельбы при не слишком больших значениях параметра w она не превышает первый предел 0.15 (рис. 4). Для второго критического уровня область допустимых значений b_0 и w существенно расширяется.

Если перейти к вспомогательной переменной $k = \sqrt{1+b^2}$, то уравнение (3.6) преобразуется к виду

$$\frac{du(k)}{dk} - \frac{u(k)}{k} = \frac{wu(k)^{m+1} \cdot \exp\left(\Delta_T \left(u(k) - \frac{V_a}{W_T}\right) \ln u(k)\right)}{\sqrt{k^2 - 1}}. \quad (4.1)$$

Во втором порядке по аргументу показательной функции $u(k)$ берется в виде суммы убывающих по малости членов $u(k) = u_0(k) + \Delta_T u_1(k) + \Delta_T^2 u_2(k)$.

Линейная добавка $\Delta_T u_1(k)$ удовлетворяет уравнению

$$u_1'(k) - u_1(k) \left(\frac{1}{k} + w(m+1) \frac{u_0(k)^m}{\sqrt{k^2 - 1}} \right) = \frac{wu_0(k)^{m+1} \left(u_0(k) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(k)}{\sqrt{k^2 - 1}},$$

решение которого в исходной переменной b есть

$$\Delta_T u_1(b) = \Delta_T \sqrt{1+b^2} \exp \left(w(m+1) \int_{b_0}^b \frac{u_0(\tilde{b})^m}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right) \times$$

$$\times \int_{b_0}^b \left(\frac{w u_0(b')^{m+1} \left(u_0(b) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(b')}{1+b'^2} \cdot \exp \left(-w(m+1) \int_{b_0}^{b'} \frac{u_0(\tilde{b})^m}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right) \right) db'. \quad (4.2)$$

Обратным переходом к $s_m(b) = \frac{u_0^2(b)}{1+b^2}$ (4.2) преобразуется как

$$\begin{aligned} \Delta_T u_1(b) = \Delta_T \sqrt{1+b^2} \exp \left(w(m+1) \int_{b_0}^b s_{n_1}(\tilde{b})^{\frac{m}{2}} (1+\tilde{b}^2)^{\frac{m-1}{2}} d\tilde{b} \right) \times \\ \times \int_{b_0}^b \left(\frac{w s_m^{\frac{m+1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{m-1}{2}} \left(s_m^{\frac{1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln(s_m(b') (1+b'^2))}{2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left(-w(m+1) \int_{b_0}^{b'} s_m(\tilde{b})^{\frac{m}{2}} (1+\tilde{b}^2)^{\frac{m-1}{2}} d\tilde{b} \right) \right) db'. \end{aligned}$$

Интегрирование по $d\tilde{b}$ с учетом резольвентного уравнения (3.4) для $s_m(b)$ дает

$$\int_{b_0}^b s_m(\tilde{b})^{\frac{m}{2}} (1+\tilde{b}^2)^{\frac{m-1}{2}} d\tilde{b} = \int_{b_0}^b \frac{2s_m(\tilde{b})^{\frac{m+1}{2}}}{2s_m(\tilde{b})} \left(\sqrt{1+\tilde{b}^2} \right)^{m-1} d\tilde{b} = \int_{b_0}^b \frac{s_m(\tilde{b})}{2s_m(\tilde{b})} d\tilde{b} = \frac{1}{2} \ln \frac{s_m(b)}{s_m(b_0)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_T u_1(b) = \Delta_T \sqrt{1+b^2} \left(\frac{s_m(b)}{s_m(b_0)} \right)^{w \left(\frac{m+1}{2} \right)} \times \\ \times \int_{b_0}^b \left(\frac{w (1+b'^2)^{\frac{m}{2}} s_m^{\frac{(m+1)(1-w)}{2}}(b') \left(s_m^{\frac{1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln(s_m(b') (1+b'^2))}{2} \right) db' \cdot \left(\frac{1}{s_m(b_0)} \right)^{-w \left(\frac{m+1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Тогда добавка к безразмерной скорости $u_0(b)$ равна

$$\begin{aligned} \Delta_T u_1(b) = \frac{\Delta_T w}{2} \sqrt{1+b^2} s_m^{w \left(\frac{m+1}{2} \right)}(b) \times \\ \times \left\{ \int_{b_0}^b (1+b'^2)^{\frac{m}{2}} s_m^{\frac{(m+1)(1-w)}{2}}(b') \left(s_m^{\frac{1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_0}{W_T} \right) \ln((1+b'^2) s_m(b')) db' \right\}. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Соответственно, поправка к безразмерной резольвенте $s_m(b)$ (3.4') —

$$\delta s_m^{(I)}(b) = \Delta_T w s_m^{w \left(\frac{m+1}{2} \right) + \frac{1}{2}}(b) \times$$

$$\times \left\{ \int_{b_0}^b (1+b'^2)^{\frac{m}{2}} s_m^{\frac{(m+1)(1-w)}{2}}(b') \left(s_m^{\frac{1}{2}}(b')(1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln \left((1+b'^2) s_m(b') \right) db' \right\}. \quad (4.4)$$

Добавка к исходной размерной резольвенте $f_m(b) = a_{bb}^{(0)}(b)$ после подстановки в (4.4) $s_m(b)$ (3.4') и преобразований получается равной

$$\delta a_{bb}^{(1)}(b) = \frac{R_a (\lambda W_T) w \gamma_a^{\frac{m}{2}}}{\chi_m(b)^{w+\frac{1}{m+\frac{1}{m}}}} \cdot \left[\int_{b_0}^b \frac{(1+b'^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{\sqrt{\gamma_a(1+b'^2)}}{\chi_m(b')^{\frac{1}{m}}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \left\{ \ln \gamma_a(1+b'^2) - \frac{2}{m} \ln \chi_m(b') \right\}}{\chi_m(b')^{1+\frac{1}{m}-\frac{w}{m}}} db' \right], \quad (4.5)$$

$$\chi_m(b) = 1 - m\beta_m b F\left(\frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b^2\right), \quad \gamma_a = \frac{gR_a}{W_T^2} = \frac{u^2(b_0)}{C_m}.$$

Уже по ней можно найти, используя (1.1), добавки $\delta x(b)$ и $\delta y(b)$ к горизонтальной и вертикальной координатам.

Для поправки второго приближения в переменной $k = \sqrt{1+b^2}$ получается уравнение

$$\frac{du_2(k)}{dk} - u_2(k) \left(\frac{1}{k} + \frac{w(m+1)u_0(k)^m + u_0(k)^{m+1} \ln u_0(k)}{\sqrt{k^2-1}} \right) = \frac{wu_0(k)^{m+1} \left(u_0(k) - \frac{V_a}{W_T} \right)^2 \ln u_0^2(k)}{2\sqrt{k^2-1}} +$$

$$+ \frac{w(m^2+m+1)u_0(k)^{m-1} u_1^2(k)}{2\sqrt{k^2-1}} + \frac{wu_1(k)(m+1)u_0(k)^m \left(u_0(k) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(k)}{\sqrt{k^2-1}} + \frac{wu_0(k)^{m+1} u_1(k)}{\sqrt{k^2-1}}. \quad (4.6)$$

Его решение в исходной переменной

$$\Delta_T^2 u_2(b) = \Delta_T^2 w \sqrt{1+b^2} \exp \left(w \int_{b_0}^b \frac{(m+1)u_0^m(\tilde{b}) + u_0^{m+1} \ln u_{(0)}(\tilde{b})}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right) \times$$

$$\times \int_{b_0}^b \frac{u_0^{m-1}(b') \exp \left(-w \int_{b_0}^{b'} \frac{(m+1)u_0^m(\tilde{b}) + u_0^{m+1} \ln u_{(0)}(\tilde{b})}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right)}{2\sqrt{1+b'^2}} \times$$

$$\times \left[u_0(b')^2 \left(u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right)^2 \ln u_0^2(b') + (m^2+m+1)u_1^2(b') + \right.$$

$$\left. + 2u_1(b')(m+1)u_0(b') \left(u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(b') + 2u_0(b')^2 u_1(b') \right] db'.$$

Аналогичным образом, цепочкой преобразований, также использующих уравнение (3.7) для невозмущенной безразмерной скорости $u_0(b)$, решение преобразуется и структурируется

к следующему к виду:

$$\Delta_T^2 u_2(b) = \frac{\Delta_T^2 w}{2} \cdot \frac{e^{-u_0(b)} u_0^{m+1+u_0(b)}(b)}{(1+b^2)^{\frac{m}{2}}} \left\{ \int_{b_0}^b \frac{(1+b'^2)^{\frac{m}{2}}}{u_0^{u_0(b')}(b')} \left[\left(u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right)^2 \ln^2 u_0(b') + (m^2 + m + 1) \frac{u_1^2(b')}{u_0^2(b')} + \frac{2u_1(b')(m+1)}{u_0(b')} \left(u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(b') + 2u_1(b') \right] e^{u_0(b')} \exp \left(- \int_{b'}^b \frac{u_0(\tilde{b}) \ln u_0(\tilde{b}) \tilde{b}}{1+\tilde{b}^2} d\tilde{b} \right) db' \right\}. \quad (4.7)$$

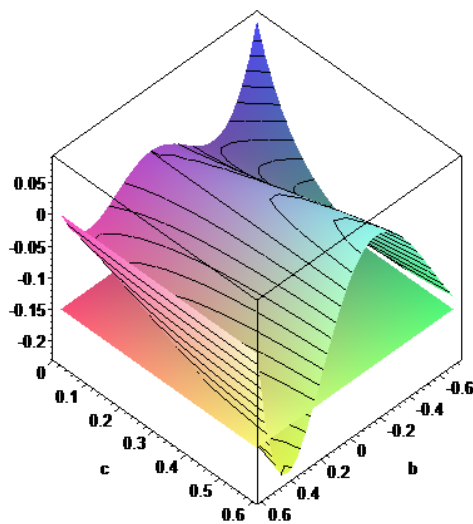
Нахождение базового показателя m

При выборе в качестве базовой скорости V_a показатель степени m зависит от вершинного уменьшения квадрата скорости $p = C_m$, а оно, в свою очередь, также зависит от величины m

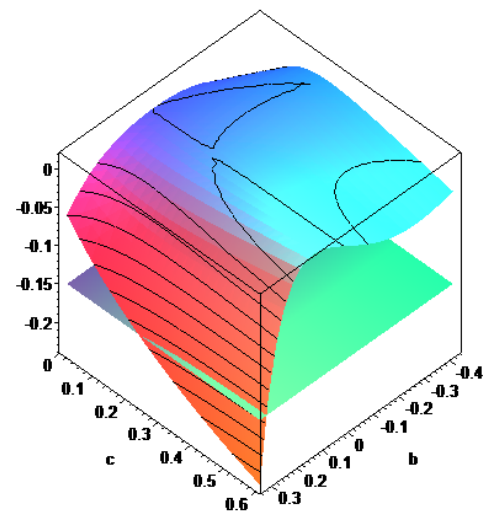
$$m = n_0 + \lambda V_a = n_0 + \lambda \frac{V_0}{\sqrt{C_m}} = n_0 + \lambda \frac{V_0}{\sqrt{p}}. \quad (5.1)$$

Критерий $q(b)$, $b_0=0.33$, $n=3$, $WT=330$, $V_0=330$, $\lambda_{am}=+0.03$

Критерий $q(b)$, $b_0=0.33$, $n=5.3$, $WT=330$, $V_0=380$, $\lambda_{am}=0.02$



(a)



(b)

Рис. 4. Поверхности $\Delta n(V) = q(b, w)$ для $V_0 = 330$ м/с, (a) и $V_0 = 380$ м/с (b), ($c \equiv w$, плоскости — первый нижний критический уровень -0.15)

С другой стороны,

$$C_m(p) \equiv p = (1 + b_0^2) \left(1 + m(p) \left(\frac{V_0}{V_T \sqrt{1 + b_0^2}} \right)^{m(p)} b_0 F \left(\frac{1}{2}, -\frac{m(p)}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{m(p)}}.$$

Тогда заменой $\mu = \sqrt{p} = \frac{V_0}{V_a} > 1$ и с учетом соотношения $V_T = \frac{W_T}{w^{1/n(V)}}$ для предельной скорости падения V_T при неизменном показателе сопротивления m получается трансцендентное

уравнение

$$1 + w \left(n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu} \right) \left(\frac{V_0}{W_T \sqrt{1 + b_0^2}} \right)^{n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu}} b_0 F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu}}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) = \left(\frac{\mu^2}{1 + b_0^2} \right)^{\frac{n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu}}{2}}, \quad (5.2)$$

решение которого определит $C_m = \left(\frac{V_0}{V_a} \right)^2$ и по нему — m (5.1).

Таким образом, в проективно двойственных координатах задача формулируется как *алгебраически-дифференциальное уравнение* (ADE), и она допускает решение при помощи испытанных средств математического софта, таких как Maple, Matlab и др.

Численное интегрирование

Инструментом для расчетов служил программный продукт Maple 15 фирмы Maplesoft.

В обоих диапазонах — до- и сверхзвуковом — начальные скорости V_0 , наклоны вылета b_0 и относительные сопротивления w подбирались так, чтобы движущаяся точечная масса не покидала участок линейности поведения $n(V)$ по ту или другую сторону пика. Это касалось прежде всего начальных наклонов b_0 , выбираемых из малоугловой области прицельной стрельбы.

Вычисления добавок $\delta u(b)$ и $\delta s_m^{(l)}(b)$ производились двумя независимыми способами: 1) сверхточное эталонное интегрирование (3.3), (3.4) и (3.6) по различным разностным схемам, соответствующим методам *gear*, *ck45*, *rkf45* и др. (см. Maple Help); 2) по приближенным формулам (4.2) и (4.4) первого порядка теории возмущений.

При неизменном базовом показателе сопротивления m невозмущенная функция $u_0(b) = \sqrt{s_m(b)(1 + b^2)}$, удовлетворяющая уравнению (3.7), вычиталась из решения возмущенного уравнения (3.4), и получалась тем самым поправка к безразмерной скорости $u_0(b)$ на скоростное изменение показателя. Аналогично определялась и другая добавка $\delta s_m^{(l)}(b)$. (Стоит отметить идеальное совпадение невозмущенных резольвентных функций $s_m(b)$, исчисляемых через разностные схемы и по формуле (3.4').

Характерные значения начальных наклонов траектории выбирались вблизи верхней границы малоугловой области прицельной стрельбы (*direct fire*) $b_0 = 0.25 \dots 0.4$. Для контроля правильности вычислений конечные наклоны b_1 брались существенно превосходящими истинные их значения при приземлении $b_1 \approx -0.35$. В сверхзвуковой области это должно приводить к росту добавки $\delta u(b)$ по мере увеличения отрицательного наклона, связанному с тем, что тело проходит точку минимума скорости $b_{\min} \approx -0.2$ [Tan, Frick, Castillo, 1987], и далее скорость возрастает, превышая разворотное значение V_a . Это приводит к снижению показателя $n(V)$ ниже базового значения m , как бы к скатыванию с правого склона пика (рис. 3b) и, следовательно, к преимуществу в силе сопротивления.

В дозвуковой — все с точностью до наоборот: рост скорости после прохождения минимума должен приводить в конечном итоге к восхождению точки на левый склон звукового пика (рис. 3a) и более быстрому росту со скоростью V силы сопротивления $R(V)$. Однако, сама скорость при этом не должна превышать порог W_T , равнявшийся 330 м/с.

Для демонстрируемых (рис. 5, 6) и также других значений параметра видно, что интегральные формулы (4.2) — (4.4) дают хорошее для первого порядка теории возмущений совпадение с результатами сверхточного счета по разностным схемам (*gear*, *ck45*, *rkf45*), дающим повсеместно одинаковый результат. Особенно хорошее оно в дозвуковой (предпороговой) области.

Несколько хуже ситуация в области сверхзвуковой (запороговой) — $V_0 > W_T = 330$ м/с, где хорошее количественное совпадение расчетов по интегральным формулам и по разностным схемам имело место лишь для малых пороговых сопротивлений $w \leq 0.15$. Это, однако, соответствовало стартовым сопротивлениям $0.23Mg$ для движения с переменным показателем $n(V)$ и $0.27Mg$ — при $n(V) = m = 4.16$. Здесь при полном качественном совпадении интегральные формулы дали превышение над разностными схемами примерно на 15–25 % для наклонов, меньших конечного $b_1 \approx -0.35$.

В целом это весьма неплохо для поправки первого приближения.

В обоих этих, а также других случаях обе добавки составляли величину от нескольких десятых процента до нескольких процентов от невозмущенных значений. И это, несмотря на то, что пороговые силы сопротивления $w = 0.15 \dots 1.0$ были порядка веса Mg , а вариация аргумента экспоненты (3.6) на взлете достигала значений $\lambda_-(V_a - V_{0a}) = 0.021(380 - 336) = 0.924$, что намного превосходило не только первое критическое значение 0.15, но двукратно предел 0.45.

Для движения с дозвуковой скоростью ситуация еще более парадоксальная: здесь вариация показателя $\lambda_+(V_a - V_0) = -0.03(327 - 264) = -1.89$ превышала по модулю единицу при начальном относительном сопротивлении всего на 5 % меньшем веса Mg , а точность поправки первого приближения измерялась малыми процентами.

Таким образом, пиковая зависимость показателя степени от скорости приводит к процентным поправкам к безразмерной резольвенте $\delta s_m^{(l)}(b)$ уже при пороговых сопротивлениях $w = 0.15 \dots 1.0$ и углах вылета $b_0 \leq 0.4$. При характерных значениях линейного масштаба $\frac{W_T^2}{g} \approx 11000$ м поправка к дальности δL составит величину порядка многих десятков — нескольких сотен метров. Однако точные оценки требуют помимо изменения резольвенты также учет изменения конечного наклона приземления b_1 , который в данной работе оценивался невозмущенным значением.

Что касается знака поправки δL , то преимущественная положительность $\delta s_m^{(l)}(b)$ свидетельствует об увеличении длины полета L . И эффект, понятно, тем заметнее, чем больше величина начального наклона b_0 (сравни рис. 5а и б).

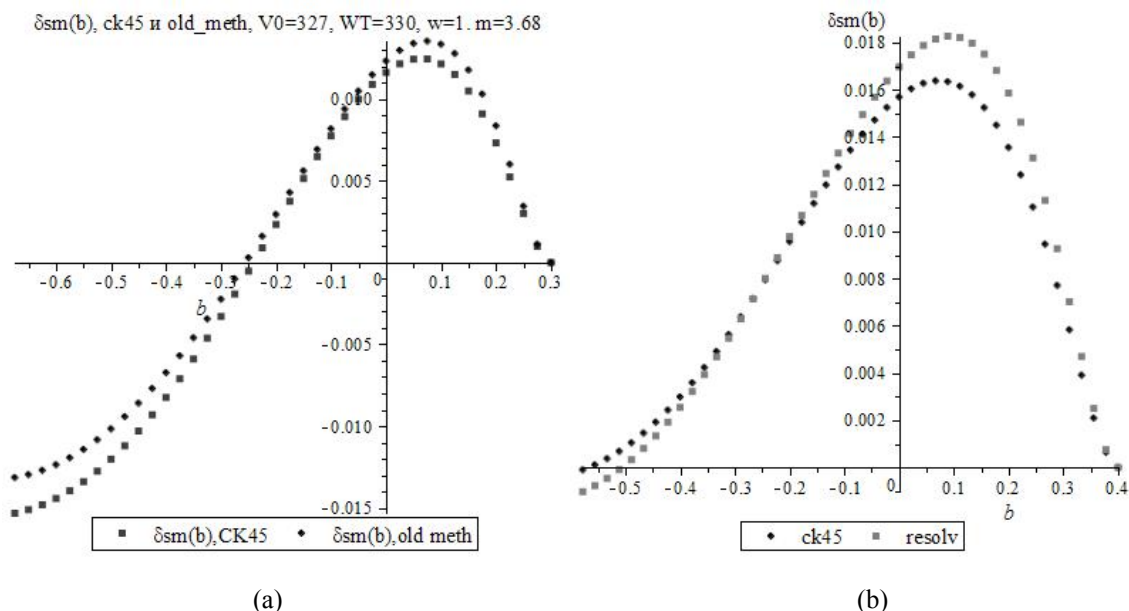


Рис. 5. Добавка $\delta s_m^{(l)}(b)$ в дозвуковой области, определенная по методу ck45 и по формуле (4.4), (а) $w = 1.0$, $V_0 = 327$ м/с, (б) $w = 0.8$, $V_0 = 330$ м/с

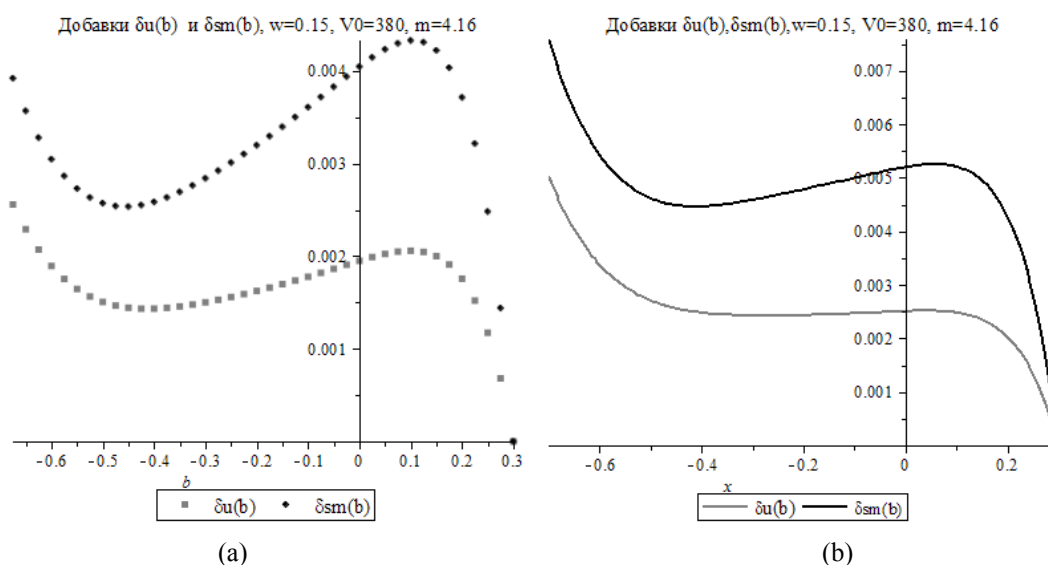


Рис. 6. Полетное поведение добавок $\delta u(b)$ и $\delta s_m^{(l)}(b)$ в сверхзвуковом диапазоне при $w = 0.15$, $V_0 = 380$ м/с (а) по методу *gear*, (б) по формулам (4.2) и (4.4)

Заключение

1. Путем регрессионного анализа баллистических данных из различных источников обнаружена повсеместная линейная взаимосвязь (2.3) между логарифмом $\lg K_i$ константы в кусочно-степенной формуле для скоростной зависимости силы сопротивления $R_i(V) = K_i V^{n_i}$ и показателем n_i , i — номер скоростного интервала.

2. С учетом такой взаимосвязи верифицирована интерполяционная формула для $R(V)$ (2.2), хорошо работающая ($adj - R \approx 0.98-0.99$) в до- и сверхзвуковых областях при использовании экспериментальных значений показателя n_i из соответствующего скоростного поддиапазона i .

3. В приближении линейного роста/падения $n(V)$ (2.6) на склонах звукового пика методами теории возмущений проинтегрировано резольвентное уравнение траектории (3.2) в проективно-двойственных переменных и обнаружена неожиданно хорошая точность получаемой аналитически поправки (4.5), проверяемая решением динамических уравнений разностными методами (*gear*, *ck45*, *rkf45* и др.).

4. Несложными рациональными выражениями смоделированы зависимости $n(V)$ в до- (2.4) и сверхзвуковой (2.5) области, которые также могут быть инкорпорированы в уравнение (3.2) с целью расширения охватываемых скоростных диапазонов за область пика.

Список литературы

- Забудский Н. А. Внешняя баллистика. — СПб.: Типография Императорской Академии наук, 1895. — 627 с.
- Чистяков В. В. Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 3. — С. 265–277.
- Чистяков В. В. Интегрирование уравнений свободного движения тяжелой точки в среде с вертикальным градиентом плотности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012а. — Вып. 1. — С. 120 — 131.

- Чистяков В. В.* Интегрирование уравнений динамики тяжелой точки в среде с показательно-степенным законом сопротивления // Тезисы XIX Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование», Дубна 30 января – 4 февраля 2012г. — С. 213.
- Routh E. J.* A Treatise on Dynamics of a Particle with Numerous Examples. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1898. — 418 p.
- G1 drag function file, American Sniping Community Website, <http://www.snipercountry.com/ballistics/>
- Tan A., Frick C. H., Castillo O.* The fly ball trajectory: An older approach revisited, Am. J. Phys. 1987. — Vol. 55, No. 1. — P. 37–40.
- Thomas R. N.* Some Comments on the Form of Drag Coefficient at Supersonic Velocity: report no. 542; U.S. Army Ballistic Research Laboratory: Aberdeen Proving Ground, MD, April, 1945.