

УДК: 531.55+514.85

## Численно-аналитическое интегрирование уравнений свободного движения тяжелой точки вблизи звукового пика показателя степенного сопротивления

**В. В. Чистяков**

ФБГОУ ВПО «Ярославская государственная сельскохозяйственная академия»,  
Россия, 150042, г. Ярославль, Тутаевское ш., д. 58

E-mail: v.chistyakov@yarcx.ru

Получено 9 апреля 2012 г.  
после доработки 3 октября 2013 г.

Показано, что для различных баллистических профилей во всем скоростном пространстве сила сопротивления изменяется со скоростью  $V$  по закону  $R(V) = Mg \cdot w \left( \frac{V}{W_T} \right)^{n(V)}$ , где  $W_T$  — близкая к звуковой пороговая скорость,  $w = R(W_T)$ ,  $n(V)$  — значение показателя в кусочно-степенной формуле. Методом, базирующимся на преобразованиях Лежандра, найдена отражающая пик  $n(V)$  поправка к невозмущенной резольвентной функции  $f(b) = a''_{bb}(b)$ ,  $a(b)$  — подкасательная к траектории,  $b = \text{tg } \theta$  — ее наклон.

Ключевые слова: баллистический профиль, сопротивление, скорость, показатель степени, звуковой пик, преобразование Лежандра, резольвентная функция, поправка теории возмущений

### Numerical-analytical integrating the equations of a point mass projectile motion at the velocities close to sonic peak of air drag exponent

V.V. Chistyakov

Yaroslavl' State Academy of Agriculture, 58 Tutaevskoe shosse, Yaroslavl', 150042, Russia

**Abstract.** — It is shown that the relative air drag force for many different ballistic profiles obeys the law as follows  $R(V) = w \left( \frac{V}{W_T} \right)^{n(V)}$  with  $V$  being the velocity,  $W_T$  — some threshold velocity close to that of sound,  $w$  equals to  $R(W_T)$  and  $n(V)$  is the exponent in broken power Gâvre formula. Using the Legendre transformation and in frames of perturbation approach received was the expression for addition  $\delta a''_{bb}(b)$  to resolvent function  $a''_{bb}(b)$ , where  $a(b)$  is an intercept and  $b = \text{tg } \theta$ ,  $\theta$  — inclination angle.

Keywords: ballistic profile, power-law air resistance, exponent, sonic peak, Legendre transformation, resolvent function, perturbation approach, first term

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 5, pp. 785–798 (Russian).

## Постановка задачи

Кусочно-степенную формулу Гавра (Gåvre)  $R(V) = K \cdot V^n$  для описания силы сопротивления движению в воздухе тяжелой массы повсеместно используют, несмотря на наличие в скоростном поведении  $n(V)$  ярко выраженного звукового пика. (Вне околосвуковой области сила  $R(V)$  подчиняется квадратичному закону Рэлея [Routh, 1898; Забудский, 1895], а непосредственно за звуковым пределом — закону «3/2-х» Томаса [Thomas, 1945]).

Такое использование предполагает разбиение всего скоростного диапазона на сравнительно узкие интервалы, в каждом из которых зависимость  $\ln R(V)$  от  $\ln V$  с высокой точностью приближается линейной регрессией. Таким образом, надежно оценивается эластичность силы сопротивления по скорости  $E_v(R) = \frac{d \ln R(V)}{d \ln V}$ , равная, как известно, показателю степени  $n_i$ , а также  $\ln K_i$  как свободный член уравнения регрессии в интервале  $i$ .

Но по мере повышения требуемой точности скоростные интервалы становятся все уже, а «скачки»  $n$  — все более микроскопическими ([G1 drag function file]). Потому разумно принять концепцию непрерывно изменяющегося со скоростью показателя в соответствии с относительно несложной интерполяционной формулой для опытных данных и аналитически/численно интегрировать баллистические уравнения в восстановленном таким образом целом скоростном пространстве.

Проблема численного интегрирования актуальна и для собственно баллистики, занимающейся разработкой баллистических калькуляторов, и для космических исследований, имеющих дело со спускаемыми аппаратами, и для других прикладных областей техники, а также для спорта, анимации и пр.

Что же касается аналитического интегрирования, преследующего цель получить аналитическое выражение, которое затем аналитически же можно исследовать в зависимости от входных параметров, то интерес здесь проявляется с фундаментальной точки зрения как к задаче нелинейной динамики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для ее решения использовался базирующийся на преобразованиях Лежандра резольвентный метод, ранее зарекомендовавший себя в получении высокоточных аппроксимаций решений для движения в однородной и неоднородной средах при фиксированном показателе степени [Чистяков, 2011; Чистяков, 2012а, 2012б].

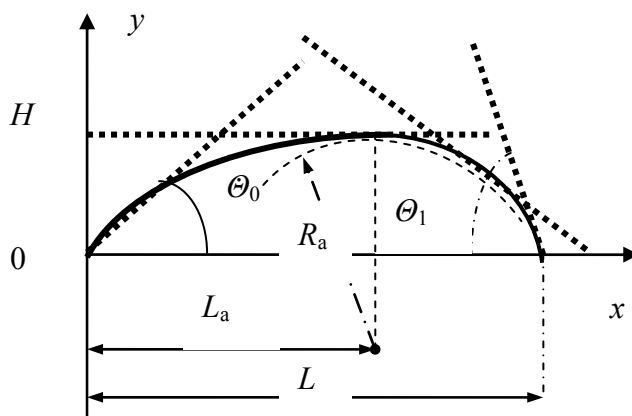


Рис. 1. Баллистическая траектория (—) и ее касательное расслоение (---)

В согласии с этим методом задача рассматривается в *проективно-двойственных* переменных, то есть фигурируют *угловой коэффициент* касательной к траектории  $b = \operatorname{tg} \theta$  и *прерывание*  $a(\theta(b)) \equiv a(b)$ , которые по мере свободного движения монотонно изменяются от своих стартовых значений  $b_0 = \operatorname{tg} \theta_0 > 0$  и  $a_0 = 0$  (рис. 1). При этом вторичный по важности временной

фактор исключается из рассмотрения, и траектория задается зависимостью

$$a = a(b), \quad b \in [b_0, b_1],$$

легко допускающей обратный переход к  $x$ -,  $y$ -координатам и скоростям  $V$  по известным формулам [там же]

$$x = -\int_{b_0}^b a_{bb}^z(\tilde{b}) d\tilde{b}, \quad y = -\int_{b_0}^b \tilde{b} a_{bb}^z(\tilde{b}) d\tilde{b}, \quad V = \sqrt{a_{bb}^z g (1 + b^2)}. \quad (1.1)$$

## Сила сопротивления

В кусочно-степенной формуле для относительной силы сопротивления

$$G(V) = F(V) / Mg = \frac{d^2}{Mg} \cdot K(V) V^{n(V)} \quad (2.1)$$

параметры  $K$  и  $n$  для испытуемых тел вращения диаметром  $d$  различны в относительно узких скоростных поддиапазонах, число которых может доходить до 40 [G1 drag function file]. Граничные скачки показателя  $n$  и  $\lg K$  при этом незначительны, поэтому, как уже отмечалось, не будет ошибкой интерполировать баллистические данные непрерывными функциями  $K(V)$  и  $n(V)$ .

Переменный показатель степени требует безразмерного аргумента, поэтому для силы сопротивления  $R$  предполагалось выражение

$$R(V) = w \left( \frac{V}{W_T} \right)^{n(V)}, \quad (2.2)$$

где  $W_T$  — некоторая пороговая скорость,  $w$  — относительное (в единицах веса  $Mg$ ) сопротивление движению с этой скоростью, а  $n(V)$  — интерполяция экспериментальных данных.

Если отождествить  $R(V)$  (2.2) с  $G(V)$  (2.1), то, с одной стороны  $\lg G(V) = \text{const}(d) + \lg K + n \lg V$ , с другой —  $\lg R(V) = \lg w + n \lg V - n \lg W_T$ . Следовательно, при справедливости (2.2) должно выполняться равенство

$$\lg K = -\text{const}(d) + \lg w - n \lg W_T \quad (2.3)$$

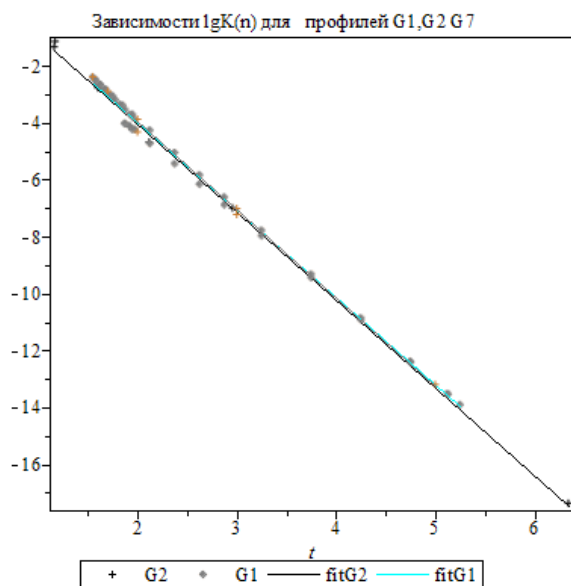
и наоборот.

Линейная регрессия для данных по баллистическому профилю G1 [G1 drag function file] дает практически идеальную зависимость  $\lg K = 2.13885(0.07886) - 3.07076(0.02751) \cdot n$  ( $\text{adj} - R^2 = 0.9970$ ,  $F(1,38) = 12460$ ) и значение порога  $W_T = 358 \pm 24$  м/с, формально замещающее звуковую скорость  $V_s = 331$  м/с. Однако объем данных  $N = 40$  единиц сформирован по гораздо большему числу экспериментальных точек, хотя бы по 5 на каждый скоростной интервал, поэтому разброс  $W_T$  должен быть в разы уменьшен.

Для других профилей (G2, G3, G7) и по другим литературным данным идеальность линейной зависимости сохраняется, но значения порога  $W_T$  составляли от 311 до 413 м/с.

Чрезвычайно высокая надежность отдельных оценок (для  $W_T = 386$  м/с  $\text{adj} - R^2 = 0.99986$ ) не позволяет утверждать, что пороговая скорость тождественна со звуковой, не способной так широко варьироваться с температурой (0.59 м/с·град) и давлением. Данная величина уникальна для каждого тела, как и закон  $n(V)$ , вкпе с которым (и с величиной  $w$  (2.2)) они составляют полный баллистический портрет снаряда.

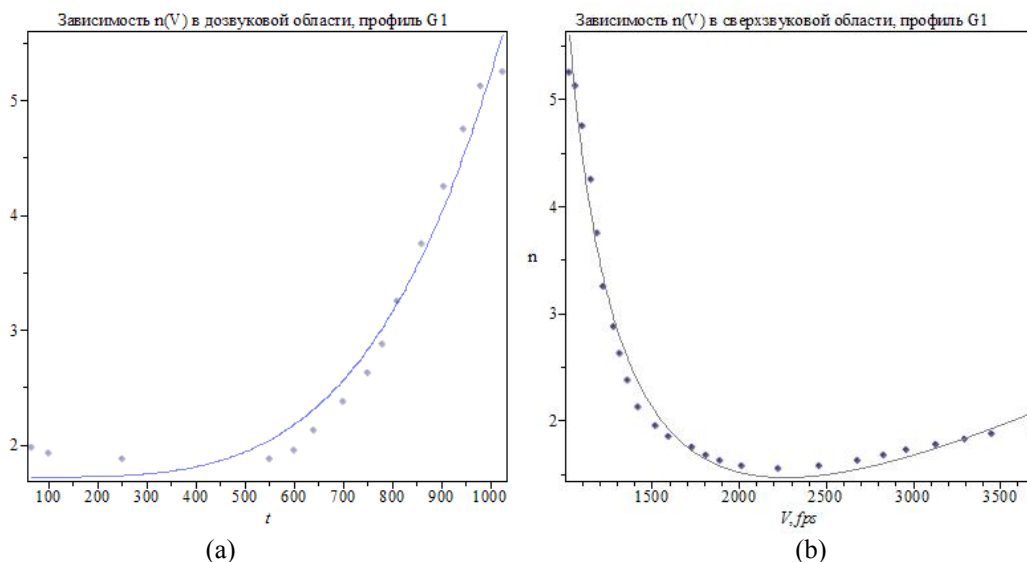
Безразмерная скорость  $u = V/W_T$  далее будет именоваться *квазичислом Маха*.

Рис. 2. Зависимости  $\lg K(n)$  по данным [URL]

Что касается моделирования поведения показателя степени, то разумно рассматривать до- и сверхзвуковую области раздельно. В первой из-за критического возрастания  $n(V)$  вблизи звукового порога  $V_s$  разумно предположить зависимость

$$n(V) \approx n_0 + \lambda \left( \frac{V}{V_s} \right)^k = n_0 + \lambda u^k \left( \frac{W_T}{V_s} \right)^k, \quad k = 2, 3, 4 \dots \quad (2.4)$$

Значение  $k = 4$ , т. е. неполная биквадратная зависимость, хорошо приближает экспериментальные данные по профилю G1 при  $n_0 = 1.72 \pm 0.08$ ,  $\lambda = 4.79 \pm 0.22$  ( $R^2 = 0.973$ ), (рис. 3а). Для других профилей ввиду малочисленности данных оценки не производились.

Рис. 3. Экспериментальные [URL] зависимости и теоретические кривые  $n(V/\text{фт/с})$  (2.4) в до- и (2.5) в сверхзвуковых областях для профиля G1

В сверхзвуковой области резкое убывание  $n(V)$  (для того же профиля) неплохо интерполируются формулой, сводящейся к хрестоматийной сумме взаимнообратных линейных выражений,

т. е.

$$n(V / м / с) \approx -1.345 + \frac{570}{V - 221} + 0.00236 \cdot V, \quad (2.5)$$

$R^2 = 0.979$  (рис. 3b).

Но локально в непосредственной близости звукового пика зависимость  $n(V)$  хорошо моделируется простой линейной формулой

$$n(V) \approx n_0 + \lambda V, \quad (2.6)$$

с  $\lambda_+ = 0.03 \pm 0.002$  с/м ( $adj - R^2 = 0.982$ ,  $F(1.5) = 323.42$ ) на возрастающей ветви, и  $\lambda_- = -0.021 \pm \pm 0.0024$  с/м — на ниспадающей.

## Уравнения динамики

Даже при линейной зависимости  $n(V)$  они не интегрируемы в квадратурах, поэтому получить приближенное аналитическое решение можно, например, при помощи теории возмущений. Тогда встает вопрос о выборе нулевого приближения, которое должно соответствовать некоторому неизменному показателю  $m$ .

Нецелесообразно выбирать его соответствующим начальной скорости  $V_0$ , так как вариация  $n(V)$  от нее максимальна в процессе движения. То же и для минимальной скорости  $V_{\min}$ , достигаемой на участке падения.

Разумно в качестве такой базовой скорости выбрать среднюю скорость  $V_{cp} = L_m / T_m$ , где  $L_m$  — длина дуги, а  $T_m$  — время движения по невозмущенной изменчивостью  $n$  траектории с некоторым базовым индексом  $m$ , соответствующим на кривой  $n(V)$  этой самой скорости. Однако, временное среднее не имеет прямого отношения к решаемой задаче, где аргументом является наклон  $b$ .

В качестве оценки этой важной средней величины может служить вершинная, или разворотная скорость  $V_a \in (V_{\min}, V_0)$ , удобная уже тем, что всегда достигается при одном и том же наклоне  $b_a = 0$ . Кроме того, при значениях  $w = R(W_T) \geq 1$  после прохождения пологого минимума скорости последняя восстанавливается слабо, и можно считать, что весь оставшийся путь вплоть до приземления на уровне старта проходит с этой минимальной скоростью.

Вообще, вершинные параметры являются ключевыми при интегрировании невозмущенной задачи [Чистяков, 2011; Чистяков, 2012а, 2012b], потому имеет смысл остановиться на этом варианте, т. е. разворотной скорости  $V_a \in (V_{\min}, V_0)$ , определение которой по исходным величинам  $n_0$ ,  $V_0$  и  $b_0$  представляет определенную проблему (см. ниже).

Примем линейное приближение для показателя  $n(V)$ . Тогда  $n(V) \approx (n_0 + \lambda_{\pm} V_a) + \lambda_{\pm} (V - V_a) = m + \lambda_{\pm} (V - V_a)$  (далее параметр обозначен просто  $\lambda$ ).

Ниже записаны исходные

$$\begin{cases} \ddot{x} = -gw \dot{x} \frac{V^{n(V)-1}}{W_T^{n(V)}}, \\ \ddot{y} = -gw \dot{y} \frac{V^{n(V)-1}}{W_T^{n(V)}} - g \end{cases}$$

и преобразованные баллистические уравнения

$$\begin{cases} \ddot{x} = -gw \left( \frac{\dot{x}}{W_T} \right)^{n(V)} \left( \sqrt{1+b^2} \right)^{n(V)-1}, \\ \ddot{y} = -gwb \left( \frac{\dot{x}}{W_T} \right)^{n(V)} \left( \sqrt{1+b^2} \right)^{n(V)-1} - g. \end{cases} \quad (3.1)$$

С учетом выражений для темпа изменений наклона и координат [там же1]

$$\dot{b} = -\sqrt{\frac{g}{a_{bb}''}} \quad \dot{x} = \sqrt{a_{bb}''} g, \quad V = \sqrt{a_{bb}''} g (1+b^2)$$

несложные элементарные преобразования дадут резольвентное уравнение [Чистяков, 2012, тез.] —

$$a_{bbb}''' = 2a_{bb}'' w \left( \frac{a_{bb}'' g}{W_T^2} \right)^{\frac{m}{2} + \frac{\lambda \left( \sqrt{a_{bb}''} g (1+b^2)^{\frac{1}{2}} - V_a \right)}{2}} \left( \sqrt{1+b^2} \right)^{m+\lambda \left( \sqrt{a_{bb}''} g (1+b^2)^{\frac{1}{2}} - V_a \right) - 1}. \quad (3.2)$$

Переходом к безразмерной функции  $s(b) = \frac{g a_{bb}''(b)}{W_T^2}$  и вводом нового, также безразмерного параметра  $\Delta_T = \lambda \cdot W_T$  получается

$$\frac{ds(b)}{db} = 2ws(b)^{\frac{m}{2}+1+\frac{\Delta_T \left( \sqrt{s(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right)}{2}} \left( 1+b^2 \right)^{\frac{m-1+\Delta_T \left( \sqrt{s(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right)}{2}}. \quad (3.3)$$

При этом уравнение для неизменного базового показателя  $m = n_0 + \lambda V_a = n_0 + \frac{\lambda V_0}{\sqrt{C_m}}$

$$\frac{ds_m(b)}{db} = 2ws_m(b)^{\frac{m}{2}+1} \left( 1+b^2 \right)^{\frac{m-1}{2}} \quad (3.4)$$

имеет при соответствующих начальных условиях в качестве решения [Чистяков, 2012, ст.]

$$s_m(b) = \frac{gR_a}{W_T^2 \left( 1 - m\beta_m b F \left( \frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b^2 \right) \right)^{\frac{2}{m}}}, \quad (3.4')$$

где  $R_a = \frac{V_a^2}{g} = \frac{V_0^2}{g \left( \left( 1+b_0^2 \right)^{\frac{m}{2}} + m \left( \frac{V_0}{V_T} \right)^m b_0 F \left( \frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{m}}}$  — радиус кривизны в вершине

траектории,  $V_a^2 = \frac{V_0^2}{C_m}$  — вершинный квадрат скорости,  $C_m = \frac{V_0^2}{V_a^2} =$

$= \left( \left( 1+b_0^2 \right)^{\frac{m}{2}} + m \left( \frac{V_0}{V_T} \right)^m b_0 F \left( \frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{m}}$ ,  $\beta_m = \frac{V_a^2}{V_T^2}$  — отношение квадрата вершинной

(разворотной) скорости к квадрату предельной ( $V_T$ ) при падении с неограниченной высоты в однородном поле тяготения.

Преобразование (3.3) с учетом логарифмического тождества дает

$$\frac{ds(b)}{db} = 2ws(b)^{\frac{m}{2}+1} \left( 1+b^2 \right)^{\frac{m}{2}+1-\frac{3}{2}} \cdot \exp \left( \Delta_T \left( \sqrt{s(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln \left( \sqrt{s(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}} \right) \right). \quad (3.5)$$

Для квазичисла Маха  $u(b) = \frac{V(b)}{W_T} = \sqrt{s(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}}$  получается уравнение

$$\frac{du(b)}{db} = \frac{u(b)b}{1+b^2} + w \frac{u(b)^{m+1} \cdot \exp\left(\Delta_T \left(u(b) - \frac{V_a}{W_T}\right) \ln u(b)\right)}{\sqrt{1+b^2}}, \quad (3.6)$$

которое при  $\Delta_T = 0$  переходит в невозмущенное

$$\frac{du_0(b)}{db} = \frac{u_0(b)b}{1+b^2} + w \frac{u_0(b)^{m+1}}{\sqrt{1+b^2}} \quad (3.7)$$

относительно  $u_0(b) = \sqrt{s_m(b)}(1+b^2)^{\frac{1}{2}}$ .

## Аналитическое интегрирование

Способ интегрирования базируется на условии малости аргумента экспоненты (3.6)

$$q(b, w) = \Delta_T \left| \left( u(b) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u(b) \right| < q_{cr}^{(I)} = 0.15,$$

позволяющем с однопроцентной точностью заменить ее разложением первого порядка, а при  $q(b, w) \leq q_{cr}^{(II)} = 0.45$  с той же точностью, но порядка два.

Эта величина есть текущая вариация показателя  $\Delta n(V) = n(V) - m$  от базового значения  $m$ . Компьютерные оценки показывают, что в области углов прицельной стрельбы при не слишком больших значениях параметра  $w$  она не превышает первый предел 0.15 (рис. 4). Для второго критического уровня область допустимых значений  $b_0$  и  $w$  существенно расширяется.

Если перейти к вспомогательной переменной  $k = \sqrt{1+b^2}$ , то уравнение (3.6) преобразуется к виду

$$\frac{du(k)}{dk} - \frac{u(k)}{k} = \frac{wu(k)^{m+1} \cdot \exp\left(\Delta_T \left(u(k) - \frac{V_a}{W_T}\right) \ln u(k)\right)}{\sqrt{k^2-1}}. \quad (4.1)$$

Во втором порядке по аргументу показательной функции  $u(k)$  берется в виде суммы убывающих по малости членов  $u(k) = u_0(k) + \Delta_T u_1(k) + \Delta_T^2 u_2(k)$ .

Линейная добавка  $\Delta_T u_1(k)$  удовлетворяет уравнению

$$u_1'(k) - u_1(k) \left( \frac{1}{k} + w(m+1) \frac{u_0(k)^m}{\sqrt{k^2-1}} \right) = \frac{wu_0(k)^{m+1} \left( u_0(k) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(k)}{\sqrt{k^2-1}},$$

решение которого в исходной переменной  $b$  есть

$$\Delta_T u_1(b) = \Delta_T \sqrt{1+b^2} \exp \left( w(m+1) \int_{b_0}^b \frac{u_0(\tilde{b})^m}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right) \times$$

$$\times \int_{b_0}^b \left( \frac{w u_0(b')^{m+1} \left( u_0(b) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(b')}{1+b'^2} \cdot \exp \left( -w(m+1) \int_{b_0}^{b'} \frac{u_0(\tilde{b})^m}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right) \right) db'. \quad (4.2)$$

Обратным переходом к  $s_m(b) = \frac{u_0^2(b)}{1+b^2}$  (4.2) преобразуется как

$$\begin{aligned} \Delta_T u_1(b) = \Delta_T \sqrt{1+b^2} \exp \left( w(m+1) \int_{b_0}^b s_m(\tilde{b})^{\frac{m}{2}} (1+\tilde{b}^2)^{\frac{m-1}{2}} d\tilde{b} \right) \times \\ \times \int_{b_0}^b \left( \frac{w s_m^{\frac{m+1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{m-1}{2}} \left( s_m^{\frac{1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln(s_m(b') (1+b'^2))}{2} \times \right. \\ \left. \times \exp \left( -w(m+1) \int_{b_0}^{b'} s_m(\tilde{b})^{\frac{m}{2}} (1+\tilde{b}^2)^{\frac{m-1}{2}} d\tilde{b} \right) \right) db'. \end{aligned}$$

Интегрирование по  $d\tilde{b}$  с учетом резольвентного уравнения (3.4) для  $s_m(b)$  дает

$$\int_{b_0}^b s_m(\tilde{b})^{\frac{m}{2}} (1+\tilde{b}^2)^{\frac{m-1}{2}} d\tilde{b} = \int_{b_0}^b \frac{2s_m(\tilde{b})^{\frac{m+1}{2}}}{2s_m(\tilde{b})} \left( \sqrt{1+\tilde{b}^2} \right)^{m-1} d\tilde{b} = \int_{b_0}^b \frac{s_m(\tilde{b})}{2s_m(\tilde{b})} d\tilde{b} = \frac{1}{2} \ln \frac{s_m(b)}{s_m(b_0)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta_T u_1(b) = \Delta_T \sqrt{1+b^2} \left( \frac{s_m(b)}{s_m(b_0)} \right)^{w \left( \frac{m+1}{2} \right)} \times \\ \times \int_{b_0}^b \left( \frac{w (1+b'^2)^{\frac{m}{2}} s_m^{\frac{(m+1)(1-w)}{2}}(b') \left( s_m^{\frac{1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln(s_m(b') (1+b'^2))}{2} \right) db' \cdot \left( \frac{1}{s_m(b_0)} \right)^{-w \left( \frac{m+1}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Тогда добавка к безразмерной скорости  $u_0(b)$  равна

$$\begin{aligned} \Delta_T u_1(b) = \frac{\Delta_T w}{2} \sqrt{1+b^2} s_m^{w \left( \frac{m+1}{2} \right)}(b) \times \\ \times \left\{ \int_{b_0}^b (1+b'^2)^{\frac{m}{2}} s_m^{\frac{(m+1)(1-w)}{2}}(b') \left( s_m^{\frac{1}{2}}(b') (1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_0}{W_T} \right) \ln((1+b'^2) s_m(b')) db' \right\}. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Соответственно, поправка к безразмерной резольвенте  $s_m(b)$  (3.4') —

$$\delta s_m^{(I)}(b) = \Delta_T w s_m^{w \left( \frac{m+1}{2} \right) + \frac{1}{2}}(b) \times$$



$$\times \left\{ \int_{b_0}^b (1+b'^2)^{\frac{m}{2}} s_m^{\frac{(m+1)(1-w)}{2}}(b') \left( s_m^{\frac{1}{2}}(b')(1+b'^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln \left( (1+b'^2) s_m(b') \right) db' \right\}. \quad (4.4)$$

Добавка к исходной размерной резольвенте  $f_m(b) = a_{bb}^{(0)}(b)$  после подстановки в (4.4)  $s_m(b)$  (3.4') и преобразований получается равной

$$\delta a_{bb}^{(1)}(b) = \frac{R_a (\lambda W_T) w \gamma_a^{\frac{m}{2}}}{\chi_m(b)^{w+\frac{1}{m+\frac{1}{m}}}} \cdot \left[ \int_{b_0}^b \frac{(1+b'^2)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{\sqrt{\gamma_a(1+b'^2)}}{\chi_m(b')^{\frac{1}{m}}} - \frac{V_a}{W_T} \right) \left\{ \ln \gamma_a(1+b'^2) - \frac{2}{m} \ln \chi_m(b') \right\}}{\chi_m(b')^{1+\frac{1}{m}-\frac{w}{m}}} db' \right], \quad (4.5)$$

$$\chi_m(b) = 1 - m\beta_m b F\left(\frac{1}{2}, -\frac{m}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b^2\right), \quad \gamma_a = \frac{gR_a}{W_T^2} = \frac{u^2(b_0)}{C_m}.$$

Уже по ней можно найти, используя (1.1), добавки  $\delta x(b)$  и  $\delta y(b)$  к горизонтальной и вертикальной координатам.

Для поправки второго приближения в переменной  $k = \sqrt{1+b^2}$  получается уравнение

$$\frac{du_2(k)}{dk} - u_2(k) \left( \frac{1}{k} + \frac{w(m+1)u_0(k)^m + u_0(k)^{m+1} \ln u_0(k)}{\sqrt{k^2-1}} \right) = \frac{wu_0(k)^{m+1} \left( u_0(k) - \frac{V_a}{W_T} \right)^2 \ln u_0^2(k)}{2\sqrt{k^2-1}} +$$

$$+ \frac{w(m^2+m+1)u_0(k)^{m-1} u_1^2(k)}{2\sqrt{k^2-1}} + \frac{wu_1(k)(m+1)u_0(k)^m \left( u_0(k) - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(k)}{\sqrt{k^2-1}} + \frac{wu_0(k)^{m+1} u_1(k)}{\sqrt{k^2-1}}. \quad (4.6)$$

Его решение в исходной переменной

$$\Delta_T^2 u_2(b) = \Delta_T^2 w \sqrt{1+b^2} \exp \left( w \int_{b_0}^b \frac{(m+1)u_0^m(\tilde{b}) + u_0^{m+1} \ln u_{(0)}(\tilde{b})}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right) \times$$

$$\times \int_{b_0}^b \frac{u_0^{m-1}(b') \exp \left( -w \int_{b_0}^{b'} \frac{(m+1)u_0^m(\tilde{b}) + u_0^{m+1} \ln u_{(0)}(\tilde{b})}{\sqrt{1+\tilde{b}^2}} d\tilde{b} \right)}{2\sqrt{1+b'^2}} \times$$

$$\times \left[ u_0(b')^2 \left( u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right)^2 \ln u_0^2(b') + (m^2+m+1)u_1^2(b') + \right.$$

$$\left. + 2u_1(b')(m+1)u_0(b') \left( u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(b') + 2u_0(b')^2 u_1(b') \right] db'.$$

Аналогичным образом, цепочкой преобразований, также использующих уравнение (3.7) для невозмущенной безразмерной скорости  $u_0(b)$ , решение преобразуется и структурируется

к следующему к виду:

$$\Delta_T^2 u_2(b) = \frac{\Delta_T^2 w}{2} \cdot \frac{e^{-u_0(b)} u_0^{m+1+u_0(b)}(b)}{(1+b^2)^{\frac{m}{2}}} \left\{ \int_{b_0}^b \frac{(1+b'^2)^{\frac{m}{2}}}{u_0^{u_0(b')}(b')} \left[ \left( u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right)^2 \ln^2 u_0(b') + (m^2 + m + 1) \frac{u_1^2(b')}{u_0^2(b')} + \frac{2u_1(b')(m+1)}{u_0(b')} \left( u_0(b') - \frac{V_a}{W_T} \right) \ln u_0(b') + 2u_1(b') \right] e^{u_0(b')} \exp \left( - \int_{b'}^b \frac{u_0(\tilde{b}) \ln u_0(\tilde{b}) \tilde{b}}{1+\tilde{b}^2} d\tilde{b} \right) db' \right\}. \quad (4.7)$$

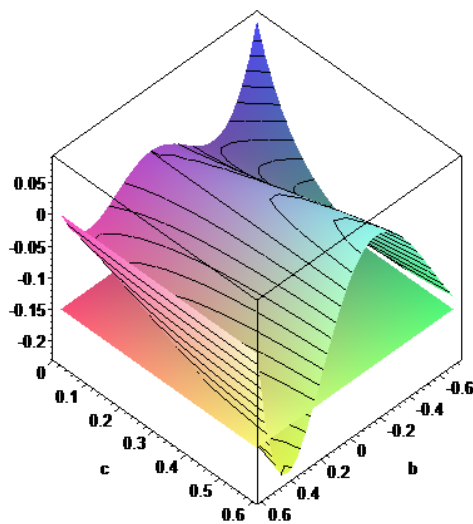
## Нахождение базового показателя $m$

При выборе в качестве базовой скорости  $V_a$  показатель степени  $m$  зависит от вершинного уменьшения квадрата скорости  $p = C_m$ , а оно, в свою очередь, также зависит от величины  $m$

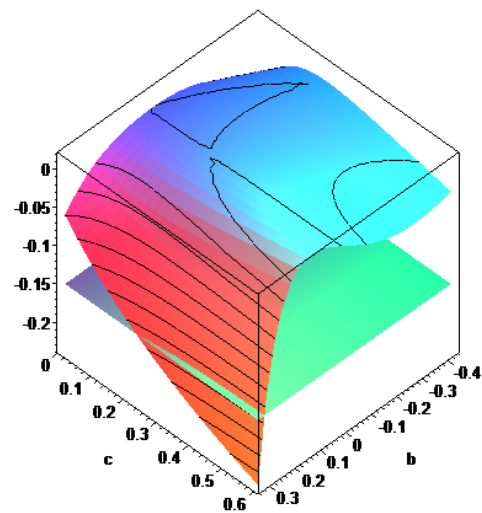
$$m = n_0 + \lambda V_a = n_0 + \lambda \frac{V_0}{\sqrt{C_m}} = n_0 + \lambda \frac{V_0}{\sqrt{p}}. \quad (5.1)$$

Критерий  $q(b)$ ,  $b_0=0.33$ ,  $n=3$ ,  $WT=330$ ,  $V_0=330$ ,  $\lambda_{am}=+0.03$

Критерий  $q(b)$ ,  $b_0=0.33$ ,  $n=5.3$ ,  $WT=330$ ,  $V_0=380$ ,  $\lambda_{am}=0.02$



(a)



(b)

Рис. 4. Поверхности  $\Delta n(V) = q(b, w)$  для  $V_0 = 330$  м/с, (a) и  $V_0 = 380$  м/с (b), ( $c \equiv w$ , плоскости — первый нижний критический уровень  $-0.15$ )

С другой стороны,

$$C_m(p) \equiv p = (1 + b_0^2) \left( 1 + m(p) \left( \frac{V_0}{V_T \sqrt{1 + b_0^2}} \right)^{m(p)} b_0 F \left( \frac{1}{2}, -\frac{m(p)}{2} + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) \right)^{\frac{2}{m(p)}}.$$

Тогда заменой  $\mu = \sqrt{p} = \frac{V_0}{V_a} > 1$  и с учетом соотношения  $V_T = \frac{W_T}{w^{1/n(V)}}$  для предельной скорости падения  $V_T$  при неизменном показателе сопротивления  $m$  получается трансцендентное

уравнение

$$1 + w \left( n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu} \right) \left( \frac{V_0}{W_T \sqrt{1 + b_0^2}} \right)^{n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu}} b_0 F \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu}}{2}; \frac{3}{2}, -b_0^2 \right) = \left( \frac{\mu^2}{1 + b_0^2} \right)^{\frac{n_0 + \frac{\lambda V_0}{\mu}}{2}}, \quad (5.2)$$

решение которого определит  $C_m = \left( \frac{V_0}{V_a} \right)^2$  и по нему —  $m$  (5.1).

Таким образом, в проективно двойственных координатах задача формулируется как *алгебраически-дифференциальное уравнение* (ADE), и она допускает решение при помощи испытанных средств математического софта, таких как Maple, Matlab и др.

## Численное интегрирование

Инструментом для расчетов служил программный продукт Maple 15 фирмы Maplesoft.

В обоих диапазонах — до- и сверхзвуковом — начальные скорости  $V_0$ , наклоны вылета  $b_0$  и относительные сопротивления  $w$  подбирались так, чтобы движущаяся точечная масса не покидала участок линейности поведения  $n(V)$  по ту или другую сторону пика. Это касалось прежде всего начальных наклонов  $b_0$ , выбираемых из малоугловой области прицельной стрельбы.

Вычисления добавок  $\delta u(b)$  и  $\delta s_m^{(l)}(b)$  производились двумя независимыми способами: 1) сверхточное эталонное интегрирование (3.3), (3.4) и (3.6) по различным разностным схемам, соответствующим методам *gear*, *ck45*, *rkf45* и др. (см. Maple Help); 2) по приближенным формулам (4.2) и (4.4) первого порядка теории возмущений.

При неизменном базовом показателе сопротивления  $m$  невозмущенная функция  $u_0(b) = \sqrt{s_m(b)(1 + b^2)}$ , удовлетворяющая уравнению (3.7), вычиталась из решения возмущенного уравнения (3.4), и получалась тем самым поправка к безразмерной скорости  $u_0(b)$  на скоростное изменение показателя. Аналогично определялась и другая добавка  $\delta s_m^{(l)}(b)$ . (Стоит отметить идеальное совпадение невозмущенных резольвентных функций  $s_m(b)$ , исчисляемых через разностные схемы и по формуле (3.4').

Характерные значения начальных наклонов траектории выбирались вблизи верхней границы малоугловой области прицельной стрельбы (*direct fire*)  $b_0 = 0.25 \dots 0.4$ . Для контроля правильности вычислений конечные наклоны  $b_1$  брались существенно превосходящими истинные их значения при приземлении  $b_1 \approx -0.35$ . В сверхзвуковой области это должно приводить к росту добавки  $\delta u(b)$  по мере увеличения отрицательного наклона, связанному с тем, что тело проходит точку минимума скорости  $b_{\min} \approx -0.2$  [Tan, Frick, Castillo, 1987], и далее скорость возрастает, превышая разворотное значение  $V_a$ . Это приводит к снижению показателя  $n(V)$  ниже базового значения  $m$ , как бы к скатыванию с правого склона пика (рис. 3b) и, следовательно, к преимуществу в силе сопротивления.

В дозвуковой — все с точностью до наоборот: рост скорости после прохождения минимума должен приводить в конечном итоге к восхождению точки на левый склон звукового пика (рис. 3a) и более быстрому росту со скоростью  $V$  силы сопротивления  $R(V)$ . Однако, сама скорость при этом не должна превышать порог  $W_T$ , равнявшийся 330 м/с.

Для демонстрируемых (рис. 5, 6) и также других значений параметра видно, что интегральные формулы (4.2) — (4.4) дают хорошее для первого порядка теории возмущений совпадение с результатами сверхточного счета по разностным схемам (*gear*, *ck45*, *rkf45*), дающим повсеместно одинаковый результат. Особенно хорошее оно в дозвуковой (предпороговой) области.

Несколько хуже ситуация в области сверхзвуковой (запороговой) —  $V_0 > W_T = 330$  м/с, где хорошее количественное совпадение расчетов по интегральным формулам и по разностным схемам имело место лишь для малых пороговых сопротивлений  $w \leq 0.15$ . Это, однако, соответствовало стартовым сопротивлениям  $0.23Mg$  для движения с переменным показателем  $n(V)$  и  $0.27Mg$  — при  $n(V) = m = 4.16$ . Здесь при полном качественном совпадении интегральные формулы дали превышение над разностными схемами примерно на 15–25 % для наклонов, меньших конечного  $b_1 \approx -0.35$ .

В целом это весьма неплохо для поправки первого приближения.

В обоих этих, а также других случаях обе добавки составляли величину от нескольких десятых процента до нескольких процентов от невозмущенных значений. И это, несмотря на то, что пороговые силы сопротивления  $w = 0.15 \dots 1.0$  были порядка веса  $Mg$ , а вариация аргумента экспоненты (3.6) на взлете достигала значений  $\lambda_-(V_a - V_{0a}) = 0.021(380 - 336) = 0.924$ , что намного превосходило не только первое критическое значение 0.15, но двукратно предел 0.45.

Для движения с дозвуковой скоростью ситуация еще более парадоксальная: здесь вариация показателя  $\lambda_+(V_a - V_0) = -0.03(327 - 264) = -1.89$  превышала по модулю единицу при начальном относительном сопротивлении всего на 5 % меньшем веса  $Mg$ , а точность поправки первого приближения измерялась малыми процентами.

Таким образом, пиковая зависимость показателя степени от скорости приводит к процентным поправкам к безразмерной резольвенте  $\delta s_m^{(l)}(b)$  уже при пороговых сопротивлениях  $w = 0.15 \dots 1.0$  и углах вылета  $b_0 \leq 0.4$ . При характерных значениях линейного масштаба  $\frac{W_T^2}{g} \approx 11000$  м поправка к дальности  $\delta L$  составит величину порядка многих десятков — нескольких сотен метров. Однако точные оценки требуют помимо изменения резольвенты также учет изменения конечного наклона приземления  $b_1$ , который в данной работе оценивался невозмущенным значением.

Что касается знака поправки  $\delta L$ , то преимущественная положительность  $\delta s_m^{(l)}(b)$  свидетельствует об увеличении длины полета  $L$ . И эффект, понятно, тем заметнее, чем больше величина начального наклона  $b_0$  (сравни рис. 5а и б).

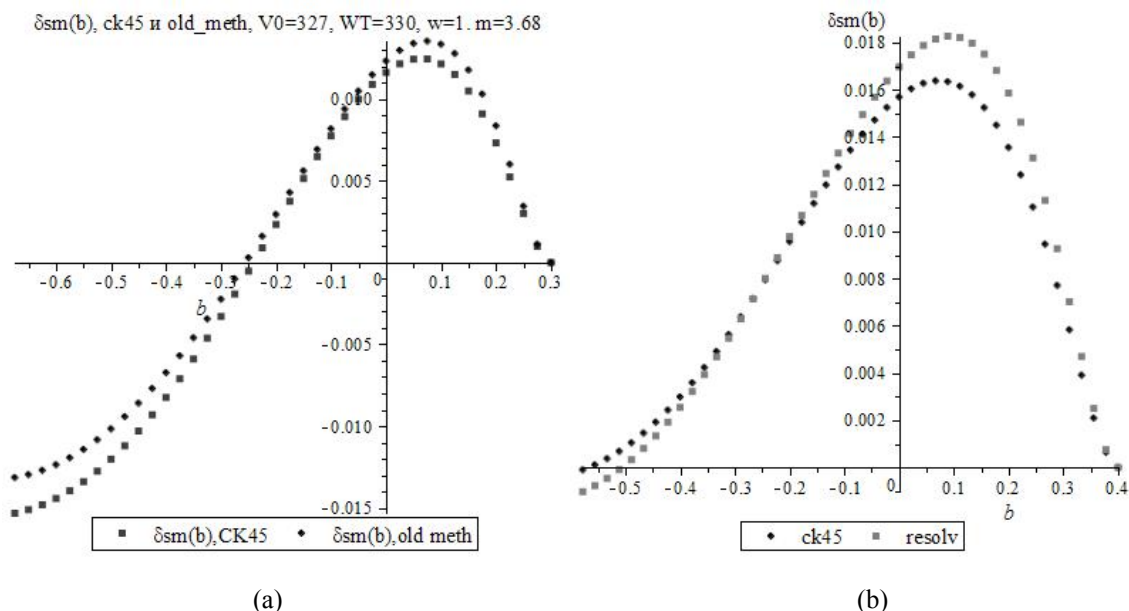


Рис. 5. Добавка  $\delta s_m^{(l)}(b)$  в дозвуковой области, определенная по методу ck45 и по формуле (4.4), (а)  $w = 1.0$ ,  $V_0 = 327$  м/с, (б)  $w = 0.8$ ,  $V_0 = 330$  м/с

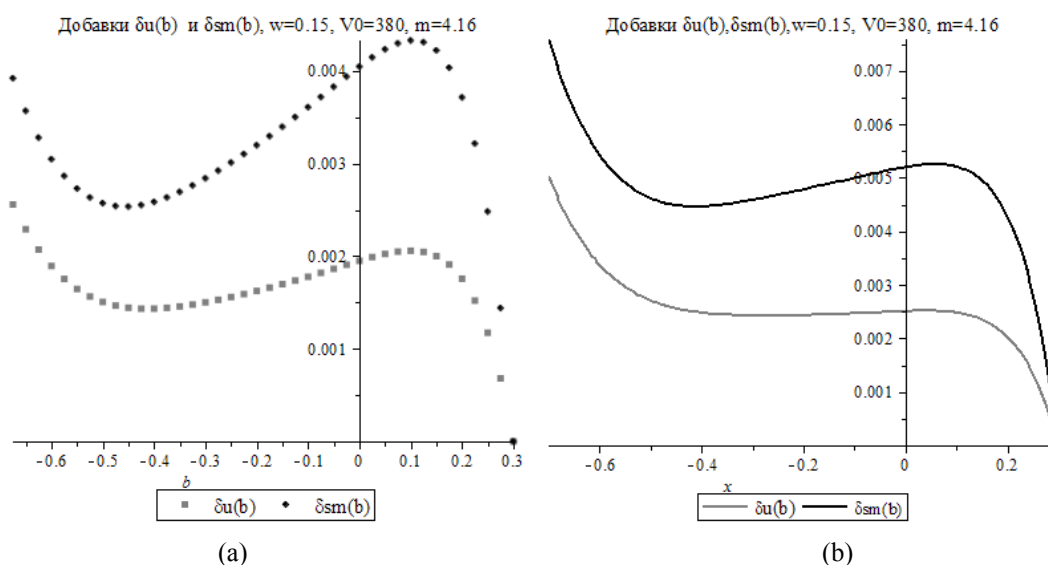


Рис. 6. Полетное поведение добавок  $\delta u(b)$  и  $\delta s_m^{(l)}(b)$  в сверхзвуковом диапазоне при  $w = 0.15$ ,  $V_0 = 380$  м/с (а) по методу *gear*, (б) по формулам (4.2) и (4.4)

## Заключение

1. Путем регрессионного анализа баллистических данных из различных источников обнаружена повсеместная линейная взаимосвязь (2.3) между логарифмом  $\lg K_i$  константы в кусочно-степенной формуле для скоростной зависимости силы сопротивления  $R_i(V) = K_i V^{n_i}$  и показателем  $n_i$ ,  $i$  — номер скоростного интервала.

2. С учетом такой взаимосвязи верифицирована интерполяционная формула для  $R(V)$  (2.2), хорошо работающая ( $adj - R^2 \approx 0.98-0.99$ ) в до- и сверхзвуковых областях при использовании экспериментальных значений показателя  $n_i$  из соответствующего скоростного поддиапазона  $i$ .

3. В приближении линейного роста/падения  $n(V)$  (2.6) на склонах звукового пика методами теории возмущений проинтегрировано резольвентное уравнение траектории (3.2) в проективно-двойственных переменных и обнаружена неожиданно хорошая точность получаемой аналитически поправки (4.5), проверяемая решением динамических уравнений разностными методами (*gear*, *ck45*, *rkf45* и др.).

4. Несложными рациональными выражениями смоделированы зависимости  $n(V)$  в до- (2.4) и сверхзвуковой (2.5) области, которые также могут быть инкорпорированы в уравнение (3.2) с целью расширения охватываемых скоростных диапазонов за область пика.

## Список литературы

- Забудский Н. А. Внешняя баллистика. — СПб.: Типография Императорской Академии наук, 1895. — 627 с.
- Чистяков В. В. Об одном резольвентном методе интегрирования уравнений свободного движения в среде с квадратичным сопротивлением // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 3. — С. 265–277.
- Чистяков В. В. Интегрирование уравнений свободного движения тяжелой точки в среде с вертикальным градиентом плотности // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012а. — Вып. 1. — С. 120 — 131.

- Чистяков В. В.* Интегрирование уравнений динамики тяжелой точки в среде с показательным законом сопротивления // Тезисы XIX Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование», Дубна 30 января – 4 февраля 2012г. — С. 213.
- Routh E. J.* A Treatise on Dynamics of a Particle with Numerous Examples. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1898. — 418 p.
- G1 drag function file, American Sniping Community Website, <http://www.snipercountry.com/ballistics/>
- Tan A., Frick C. H., Castillo O.* The fly ball trajectory: An older approach revisited, Am. J. Phys. 1987. — Vol. 55, No. 1. — P. 37–40.
- Thomas R. N.* Some Comments on the Form of Drag Coefficient at Supersonic Velocity: report no. 542; U.S. Army Ballistic Research Laboratory: Aberdeen Proving Ground, MD, April, 1945.