

УДК: 539.3

Математическое моделирование одного нового способа разрушения ледяного покрова

А. В. Ткачева, В. И. Одинок

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН,
Россия, 61005, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, д. 1

E-mail: 4nansi4@mail.ru

Получено 10 апреля 2013 г.,
после доработки 3 июля 2013 г.

С использованием теории малых упругих деформаций и апробированного численного метода, строится математическая модель разрушения ледяного покрова ледокольным устройством новой конструкции.

Ключевые слова: математическая модель ледяного покрова, численный метод, ледокольное устройство, разрушения льда

Mathematical modeling of a new method of destruction of ice cover

A. V. Tkacheva, V. I. Odinkov

The Institute for Machine Engineering and Metallurgy of the Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, 1 Metallurgists Street, Komsomolsk-on-Amur, 61005, Russia

Abstract. — Mathematical model of a new icebreaker device is worked out using the theory of small elastic deformations and numerically approved.

Keywords: Mathematical model of the ice cover, numerical method, ice-breaking device, the destruction of the ice

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 677–691 (Russian).

Введение

Работа направлена построение математической модели поэтапного нарушения сплошности ледяного покрова ледокольным устройством новой конструкции.

Описание устройства.

Ледокольное судно [Пат. 2276037 РФ МПК В 63 В 35/08], изображенное на (рис. 1), состоит из надводной части 1, подводной части 2 и двух боковых частей 3, к которым крепятся части 1 и 2. Между надводной и подводной частями имеется полость для прохода ломаных частей льда. Носовая область 1 снизу выполнена с углом наклона β , боковые части 3 спереди имеют резцы 4. Подводная часть имеет отсеки для воздуха, топлива, двигателя судна. Боковые части содержат систему коммуникаций, гидропривод перемещения в вертикальной плоскости надводной части относительно подводной. При движении судна разрушение льда сначала производится резцами 4. Далее, пластина льда, утыкаясь в наклонную поверхность надводной части, испытывает под действием вертикальной силы, возникающей на наклонной поверхности, изгиб, которому препятствует передний конец подводной части. Появляется изгибающий момент, под действием которого происходит поперечный излом. Колотый лед проходит между надводной и подводной частями судна, подгоняемый специальными вращающимися фрезами.

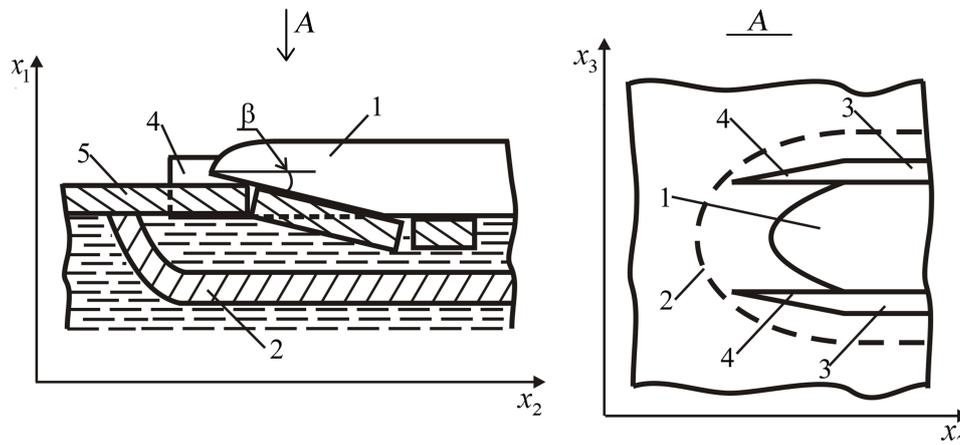


Рис. 1. Ледокольное судно: 1 — надводная часть, 2 — подводная часть, 3 — боковые части, 4 — резцы, 5 — лед

Построение математической модели

Согласно результатам экспериментальных исследований, описанных в работах [Ионов, Грамузов, 2001; Войтковский, 1999; Богородский, 1980], лед ведет себя упруго при температурах ниже -5°C и нагрузках менее 10 секунд и к нему применимы дифференциальные уравнения теории упругости.

Уравнения движения:

$$\sigma_{ij,j} + F_i - I_i = 0; \quad I_i = \rho \left(\dot{v}_i + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Закон Гука для малых деформаций:

$$\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}^*; \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon \delta_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$\varepsilon = 3k\sigma, \quad (3)$$

$$\xi_{ij} = \frac{d\varepsilon_{ij}}{d\tau} \Rightarrow \varepsilon_{ij} \cong \sum_m \xi_{ij} \Delta\tau_m; G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (4)$$

В уравнениях (1, 2) используется суммирование по повторяющимся индексам; ρ — плотность льда; $G = G(\theta)$ — модуль сдвига льда; $[\sigma_{ij}]$ — тензор напряжений; $[\varepsilon_{ij}]$ — тензор деформаций; v_i, F_i — проекции скорости перемещений и удельной объемной силы по координатным осям $x_i, i = 1, 2, 3; F_2 = F_3 = 0; \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \tau}, \tau$ — время деформации, k — коэффициент объемного сжатия, μ — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, (i = 1, 2, 3).$

В зависимости от температуры ледяного покрова меняются его механические свойства. Модуль упругости E будем рассчитывать по формуле $E = (87.6 - 0.21\theta - 0.0017\theta^2) \cdot 10^2 \text{ МПа}$ [Одинокоев, Сергеева, 2007], θ — температура льда. За предел прочности принимаем критические напряжения $\sigma_{кр}^{pac} = 4 \text{ (МПа)}$ и $\sigma_{кр}^{сж} = -9 \text{ (МПа)}$, при которых ледяной покров разрушается [Богородский, Гаврило, 1980]. Для определения температуры θ по толщине льда воспользуемся формулой, полученной в работе [Богородский, Гаврило, 1980]

$$\theta = -\frac{1}{a} - \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{x_1}{h} \left(\frac{2\theta_1}{a} + \theta_1^2 \right)}; \theta_1 = -30 \text{ }^\circ\text{C}; a = -0,0159 \text{ град}^{-1}. \quad (5)$$

Построение граничных условий

Граничные условия будем рассматривать с учетом симметрии в плоскости x_1x_2 (рис. 2).

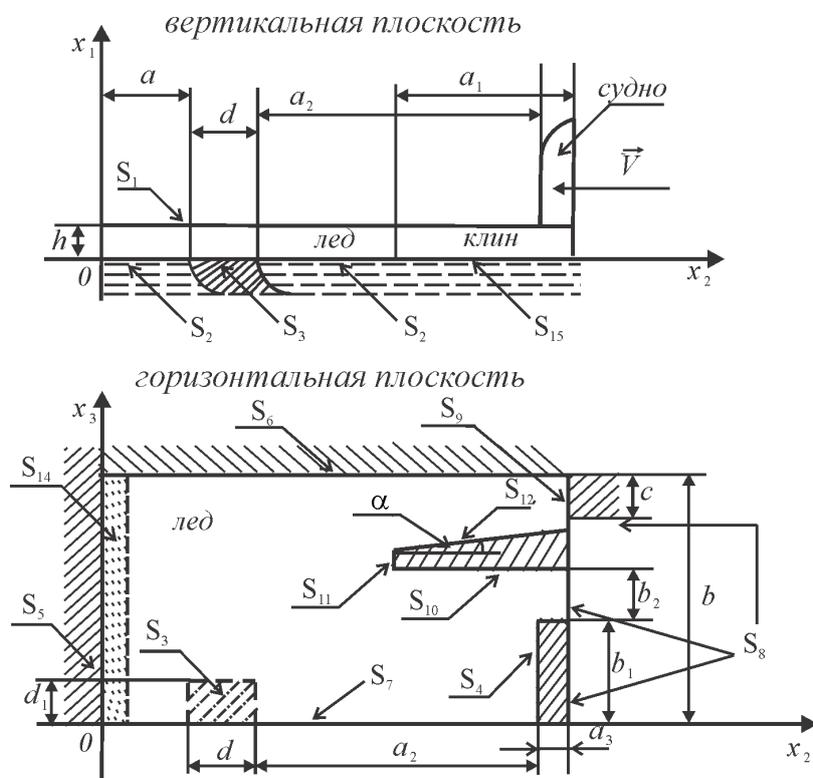


Рис. 2. Расчетная схема

В плоскости x_2x_3 , выделим области: S_1 — поверхность взаимодействия льда с атмосферой, S_4 — площадка контакта форштевня с льдом, S_2 — площадка взаимодействия льда с водой. Площадка S_3 и S_{14} моделируют соответственно взаимодействие подводной части судна с нижней поверхностью льда и неподвижность льда в направлении оси Ox_1 , т. е. $v_1|_{S_{14}} = 0$. Участок нижней поверхности льда, ограниченный поверхностью S_{15} — поверхность клина с водой. S_5 и S_6 — границы области льда, S_7 — поверхность симметрии. S_8 , — свободная кромка льда, находится в одной плоскости с поверхностью S_9 , на которой задаются граничные условия, моделирующие жесткое взаимодействие рассматриваемой области деформирования льда с неподвижным ледяным полем. На поверхностях S_{10} , S_{11} , S_{12} задаются граничные условия, отражающие взаимодействие внедряющегося в лед клина ледокола. Площадки S_{10} и S_{12} характеризуют боковые части клина, причем S_{12} находится под углом α к S_{10} .

Начальные условия задачи $v_i|_{t=0} = 0$, $\varepsilon_{ij}|_{t=0} = 0$ $i, j = 1, 2, 3$, т. е. лед находится в состоянии покоя.

Граничные условия для формализованной области будут (рис. 2)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_i} &= -p_0; \quad \sigma_{11}|_{S_i} = -(p_0 + \bar{\gamma}h), \quad i = 2, 15; \\ v_1|_{S_4} &= -v^* \operatorname{tg}(\beta) \quad v_1|_{S_i} = 0, \quad i = 3, 14; \quad \sigma_{22}|_{S_i} = -p_0, \quad i = 5, 8; \quad v_2|_{S_9} = 0; \quad v_3|_{S_i} = 0, \quad i = 6, 7, 10; \\ v_3|_{S_{12}} &= v^* \sin(\alpha); \quad v_2|_{S_{11}} = -v^*; \\ (\sigma_{12} = \sigma_{13})|_{S_i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 14, 15, 16; \quad (\sigma_{21} = \sigma_{23})|_{S_i} = 0, \quad i = 5, 8, 11; \\ (\sigma_{31} = \sigma_{32})|_{S_i} &= 0, \quad i = 6, 7, 10, 12. \end{aligned}$$

Здесь p_0 — атмосферное давление, $\bar{\gamma}$ — удельный вес льда, h — толщина льда, v^* — скорость передвижения судна, β — угол между носовым отсеком надводной части судна и льдом принят равным 15° , α — горизонтальный угол острия клина (рис. 2) принят равным 25° .

Для решения системы уравнений 1–5 с учетом граничных условий воспользуемся численным методом [Одинок, 1995] и численной схемой, описанной в работе [Одинок и др., 2008], и программным комплексом [Одинок и др., 2012].

Построение адаптивной сетки

Ледяной покров разбивается на прямоугольные элементы. Клин устройства разбивается на ортогональные криволинейные элементы (рис. 3).

Примем за независимые переменные BLK , BB_1 , α , BVK , тогда зависимые переменные T_i , $i = \overline{1, 8}$ вычисляются по ниже приведенным формулам.

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{BLK}{2 \sin \alpha} - \frac{BB_1}{2} - \frac{BLK \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{BVK}{2}, \\ T_2 &= BB_1, \\ T_3 &= \frac{BVK}{2} - \frac{BLK}{2 \sin \alpha} - \frac{BB_1}{2} + \frac{BLK \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha}, \\ T_4 &= \frac{BVK \cdot \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{BB_1 \cdot \cos \alpha \cdot \alpha}{2 \sin \alpha}, \end{aligned}$$

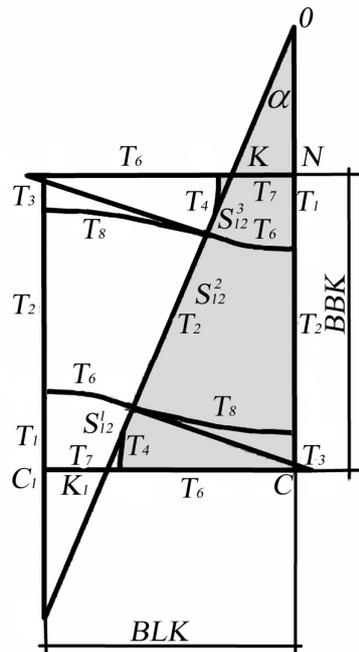


Рис. 3. Схема клина

$$T_5 = \frac{BLK \cdot \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{BB_1 \cdot \alpha}{2},$$

$$T_6 = \frac{BLK}{2} + \frac{BBK \cdot \sin \alpha}{2 \cos \alpha} - \frac{BBK}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{BB_1}{2 \sin \alpha} + \frac{BBK}{2 \sin \alpha} - \frac{BB_1 \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha},$$

$$T_7 = \frac{BLK}{2} - \frac{BBK \cdot \sin \alpha}{2 \cos \alpha} + \frac{BBK}{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha} - \frac{BB_1}{2 \sin \alpha} - \frac{BBK}{2 \sin \alpha} + \frac{BB_1 \cdot \cos \alpha}{2 \sin \alpha},$$

$$T_8 = \frac{BLK \cdot \alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{BB_1 \cdot \alpha}{2}.$$

Граничные условия на клине ледокольного судна переписуются с учетом ортогональности элементов клина.

$$v_2|_{S_{11}} = 0; \quad v_2|_{S_{12}^1} = v^* \sin(\alpha / 2), \quad v_2|_{S_{12}^2} = v^* \sin(\alpha), \quad v_2|_{S_{12}^3} = -0,5v^* \sin(-\alpha / 2).$$

Численная схема; решение

Численная схема описана в работе [Одинокоев, Сергеева, Захарова, 2012], рассмотрим ее подробнее.

Согласно выбранному численному методу система уравнений (1) переписем в разностной форме (6) для произвольного ортогонального элемента (рис. 4)

$$\begin{aligned} & S_{ik} \Delta S_{ij} (\sigma_{ii} - \sigma_{jj}) + S_{ii} \Delta S_{ik} (\sigma_{ii} - \sigma_{kk}) + 0,5 \Delta \sigma_{ii} S_{ij} S_{ik} + \\ & + 0,5 \Delta \sigma_{ik} S_{ki} S_{kj} + 0,5 \Delta \sigma_{ij} S_{ji} S_{jk} + (S_{ji} \Delta S_{jk} + 2S_{jk} \Delta S_{ji}) \sigma_{ij} + \\ & + (S_{ki} \Delta S_{kj} + 2S_{kj} \Delta S_{ki}) \sigma_{ik} + (F_i - I_i) \cdot 2V = 0; (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь V — объем элемента; $V = S_{12} \cdot S_{13} \cdot S_{21} / 8$; I_i — проекция инерционной силы, отнесенной к единице объема на оси α_i , $i = 1, 2, 3$.

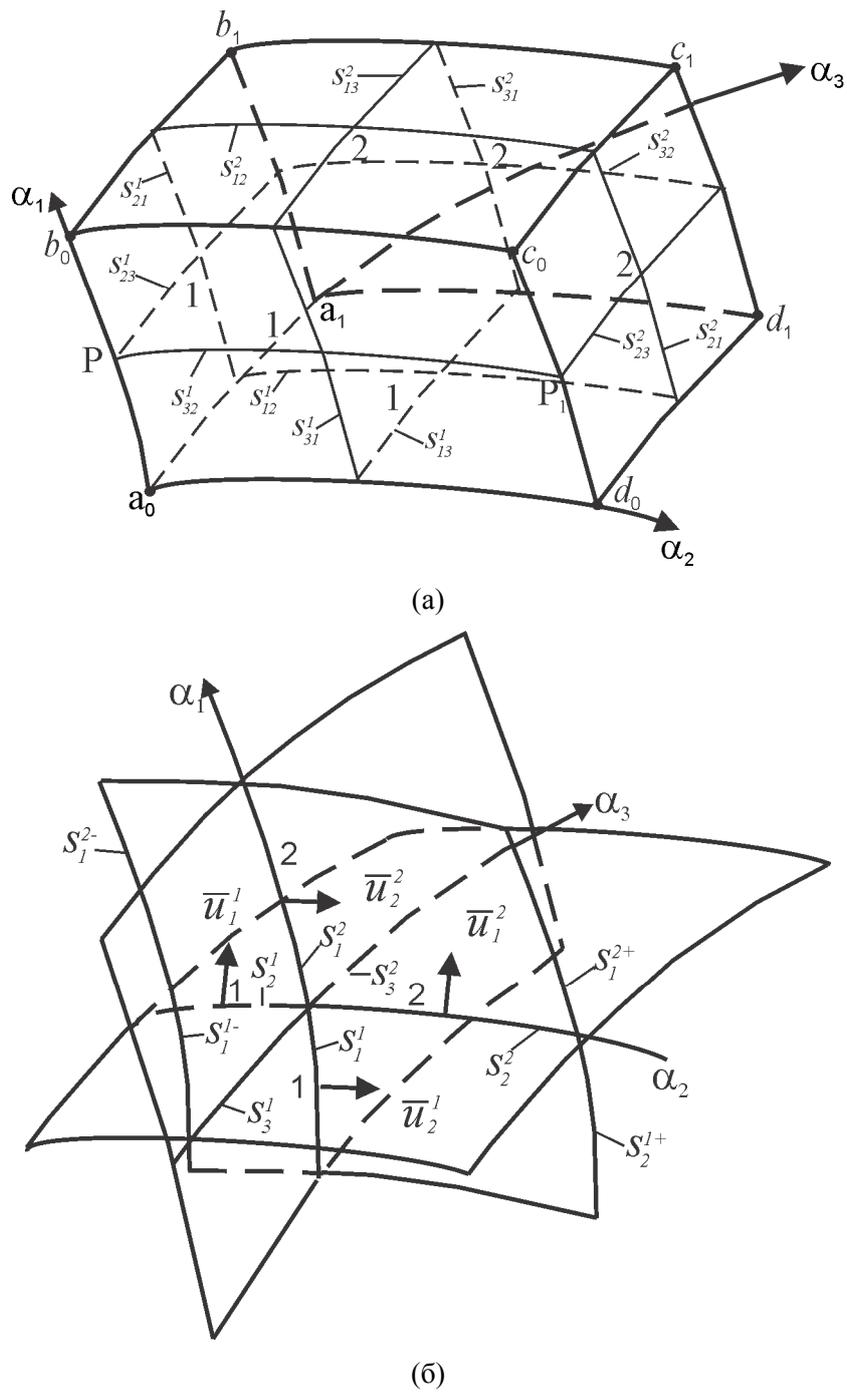


Рис. 4. Схема: (а) произвольный ортогональный элемент, (б) узел произвольного ортогонального элемента

Исключив из (2) гидростатическое напряжение получим

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} = 2G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}); \quad \sigma_{11} - \sigma_{33} = 2G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33});$$

$$(\sigma_{ij})_m = 2G(\varepsilon_{ij})_m, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (i \neq j). \quad (7)$$

Уравнения (3) перепишем в виде

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} - 3k_i \sigma = 0, \quad (8)$$

где $\sigma_{ij} = 0,5(\sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2)$; $\Delta\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^2 - \sigma_{ij}^1$; $(i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$; $\sigma_{ij}^t (i, j = 1, 2, 3; t = 1, 2)$ — напряжения, действующие на криволинейной поверхности t -элемента m ; $\sigma_{ij}^t, (i \neq j)$ — касательное напряжение в направлении x_j на криволинейной поверхности t элемента « m », нормалью к которой является касательная к координате α_i ;

$$S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2; \Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1; S_{ik}^j (i, k = 1, 2, 3; i \neq k; j = 1, 2)$$

— вычисляется как среднее от значений дуг границы граней (ребер).

$$\varepsilon_{ii} = \frac{2\Delta v_i}{S_{ji}} + 2 \frac{v_j}{S_{ji}} \cdot \frac{\Delta S_{ji}}{S_{ij}} + 2 \frac{v_k}{S_{ki}} \cdot \frac{\Delta S_{ki}}{S_{ik}}, (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k), \quad (9)$$

где $v_i = v_i^1 + v_i^2$; $\Delta v_i = v_i^2 - v_i^1$; $v_i^t (i = 1, 2, 3; t = 1, 2)$ — перемещение на грани элемента m в направлении α_i .

Сдвиговые деформации по элементу m определяются как среднее значений от деформации в узлах элемента

$$(\varepsilon_{ij})_m = 0.125(\varepsilon_{ij}^{a_0} + \varepsilon_{ij}^{b_0} + \varepsilon_{ij}^{d_0} + \varepsilon_{ij}^{c_0} + \varepsilon_{ij}^{a_1} + \varepsilon_{ij}^{b_1} + \varepsilon_{ij}^{d_1} + \varepsilon_{ij}^{c_1}).$$

Значение сдвиговых деформаций в узлах имеет вид

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{2\Delta \bar{v}_j}{S_i} - 0.5 \bar{v}_j \frac{S_j^+ - S_j^-}{S_i S_j} + \frac{2\Delta \bar{v}_i}{S_j} - 0.5 \bar{v}_i \frac{S_i^+ - S_i^-}{S_i S_j}, (i, j = 1, 2, 3; i \neq j), \quad (10)$$

где $S_i = S_i^1 + S_i^2$; $S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}$; $S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}$; $\Delta \bar{v}_i = \Delta \bar{v}_i^2 - \Delta \bar{v}_i^1$. Здесь S_i^{1+}, S_i^{1-} — дуга граней элемента, следующая за S_i^1 по координате j соответственно в положительную (+) и отрицательную (-) стороны; аналогично S_i^{2+}, S_i^{2-} — только относительно S_i^2 ; $\Delta \bar{v}_i^j, (i, j = 1, 2)$ вычисляются как среднее от значений v_i^j по граням, примыкающим к данному ребру. Система уравнений (6), (7), (8) согласно [Одинокоев, Сергеева, Ткачева, 2012] является совместной.

Рассмотрим уравнение (8). Выразим из него v_1^2 с учетом того, что $S_{23} = S_{13}, S_{13} = S_{32}, S_{31} = S_{21}$ получаем

$$v_1^2 = [v_1^1(1 - t_6 - t_8) - (v_2^1 + v_2^2)t_1 - (v_3^1 + v_3^2)t_2 - (v_2^2 - v_2^1)t_3 - (v_3^1 + v_3^2)t_4 t_5 - (v_3^2 - v_3^1)t_7 - (v_2^1 + v_2^2)t_9 t_{10}] / (1 + t_6 + t_8) + 3k_i \sigma \cdot S_{21} / 2(1 + t_6 + t_8). \quad (11)$$

Здесь

$$t_1 = \frac{\Delta S_{21}}{S_{12}}; t_2 = \frac{\Delta S_{31}}{S_{13}}; t_3 = \frac{\Delta S_{21}}{S_{32}}; t_4 = \frac{\Delta S_{32}}{S_{32}}; t_5 = \frac{S_{21}}{S_{23}};$$

$$t_6 = \frac{S_{12}}{S_{12}}; t_7 = \frac{S_{21}}{S_{13}}; t_8 = \frac{S_{13}}{S_{13}}; t_9 = \frac{S_{21}}{S_{32}}; t_{10} = \frac{\Delta S_{23}}{S_{23}}.$$

Реализуем ряд преобразований по всем элементам исследуемой области: от $\alpha_i = 0$ до $\alpha_i = \alpha_i^*$. При этом $v_2^t, v_3^t (t = 1, 2)$ являются независимыми переменными.

Пусть $\Gamma_i|_{\alpha_i=0}, \Gamma_i^*|_{\alpha_i=\alpha_i^*} (i = 1, 2, 3)$ — поверхности ограничивающие рассматриваемую область. При этом $\Gamma_{iv}, \Gamma_{iv}^*$ — поверхности, где заданы перемещения v_i ; $\Gamma_{i\sigma}, \Gamma_{i\sigma}^*$ — поверхности, где заданы напряжения σ_{ii} . Здесь выполняются равенства $\Gamma_i = \Gamma_{iv} + \Gamma_{i\sigma}$; $\Gamma_i^* = \Gamma_{iv}^* + \Gamma_{i\sigma}^*$.

Множество $\{v_1^1\}_{\Gamma_{i\sigma}}$ являются множество независимых переменных. На поверхности $\Gamma_{1\nu}^*$ реализуются новые уравнения

$$F_1^i = (v_1^2)^i \Big|_{\Gamma_{1\nu}^*} - (v_1^*)^i = 0. \quad (12)$$

где $(v_1^*)^i$ — скорости перемещения v_1 , заданные граничные условиями на поверхности $\Gamma_{1\nu}^*$. Число уравнений (12) в точности соответствует числу независимых параметров $\sigma_{11} \Big|_{\Gamma_{1\nu}^*}$.

Преобразуем уравнения (6) с учетом (7) и $S_{ik} = S_{jk}$; $i, j, k = 1, 2, 3$; $i \neq j \neq k$, выразив из них σ_{ii}^1

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^1 = & \sigma_{ii}^2 + \frac{4G(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{jj}) \cdot \Delta S_{ij}}{S_{ij}} + \frac{4G(\varepsilon_{ii} - \varepsilon_{kk}) \cdot \Delta S_{ik}}{S_{ik}} + \frac{\Delta \sigma_{ik} S_{ki}}{S_{ik}} + \\ & + \frac{\Delta \sigma_{ji} S_{ki}}{S_{ij}} + \frac{2(S_{jk} \cdot \Delta S_{jk} + 2S_{jk} \cdot \Delta S_{ji}) \sigma_{ij}}{S_{ij} \cdot S_{ik}} + \frac{2(S_{ki} \cdot \Delta S_{kj} + 2S_{kj} \cdot \Delta S_{ki}) \sigma_{ik}}{S_{ij} \cdot S_{ik}} + \\ & + \frac{2V(F_i - I_i)}{S_{ij} \cdot S_{ik}}; \quad (i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k). \end{aligned} \quad (13)$$

Данные рекуррентные соотношения будем удовлетворять от $\alpha_i = \alpha_i^*$ до $\alpha_i = 0$.

При этом на поверхностях будут иметь место уравнения вида

$$F_2^i = \sigma_{ii}^1 \Big|_{\Gamma_{i\sigma}} - \sigma_{ii}^* = 0, \quad (14)$$

где σ_{ii}^* — нормальные напряжения σ_{ii} , заданные на поверхности $\Gamma_{i\sigma}$ граничными условиями. Число уравнений в (14) равно числу неизвестных $(v_2) \Big|_{\Gamma_{2\sigma}^*}$, $(v_3) \Big|_{\Gamma_{3\sigma}^*}$, $(\sigma_{22}) \Big|_{\Gamma_{2m}^*}$, $(\sigma_{33}) \Big|_{\Gamma_{3m}^*}$.

Следующая группа уравнений образуется из (7):

$$\begin{aligned} F_3^i = & \sigma_{11} - \sigma_{22} - 2G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) = 0, \\ F_4^i = & \sigma_{11} - \sigma_{33} - 2G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Данных уравнений, записанных по каждому элементу области, будет ровно столько, сколько неизвестных скоростей v_2 , v_3 по внутренним граням элементов и неизвестных $v_2 \Big|_{\Gamma_{2\sigma}^*}$

$$F_5^m = (\sigma)_m - 1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})_m = 0, \quad (16)$$

где $m = \overline{1, n}$, n — количество элементов.

Этих уравнений (по каждому элементу области) будет равно столько, сколько неизвестных скоростей перемещений по внутренним граням элементов и неизвестных:

$$v_2 \Big|_{\Gamma_{2\sigma}^*}, v_3 \Big|_{\Gamma_{3\sigma}^*}, \sigma_{22} \Big|_{\Gamma_{2\nu}^*}, \sigma_{33} \Big|_{\Gamma_{3\nu}^*}.$$

Таким образом, существует множество независимых переменных:

$$X \left\{ \left[\sigma_{11} \Big|_{\Gamma_{1\nu}^*} \right], \left[v_i \Big|_{\Gamma_{i\sigma}} \right], i = 1, 2, 3, \left[v_i, i = 2, 3 \right], \left[v_i \Big|_{\Gamma_{i\sigma}^*}, i = 2, 3 \right], \left[\sigma_{ii} \Big|_{\Gamma_{i\nu}^*}, i = 2, 3 \right] \right\}.$$

Для решения данной задачи используется декартова система координат. Поэтому уравнение для определения напряжений и скоростей перемещений по граням прямоугольного элемента

будет определяться следующим образом:

$$v_1^2 = v_1^1 - (v_2^2 - v_2^1) \cdot \frac{S_{21}}{S_{32}} - (v_3^2 - v_3^1) \frac{S_{21}}{S_{13}}, \tag{17}$$

$$\sigma_{ii}^1 = \sigma_{ii}^2 + \frac{\Delta\sigma_{ik} S_{ki}}{S_{ik}} + \frac{\Delta\sigma_{ij} S_{ji}}{S_{ji}} + \frac{2V(F_i - I_i)}{S_{ij} \cdot S_{ik}}, \tag{18}$$

$$I_i = \rho \left(\bar{v}_1 \frac{\Delta v_i}{\Delta x_1} + \bar{v}_2 \frac{\Delta v_i}{\Delta x_2} + \bar{v}_3 \frac{\Delta v_i}{\Delta x_3} \right), \tag{19}$$

где $(\Delta v_i)_k$ — изменение скорости v_i ; $\Delta v_i = v_i^2 - v_i^1$ вдоль координаты x_k ; $\frac{\Delta v_i}{\Delta x_i} = \frac{v_i^2 - v_i^1}{\Delta x_i}$; \bar{v}_i — средняя скорость v_i «замороженная» на n -й итерации $\bar{v}_i = (\bar{v}_i)_{n-1}$.

Положим \bar{v}_i в (19) $\bar{v}_i = \text{const}$, тогда система уравнений (7), (13), (14) с учетом (8) будет линейной.

Порядок вычислений зависимых переменных следующий:

1. Удовлетворяем рекуррентному соотношению (11).
2. Вычисляем по внутренним узлам значение

$$\xi_{ij}^0 = \frac{2\Delta v_j}{S_i} + \frac{2\Delta v_i}{S_j}, \quad i \neq j,$$

где $S_i = S_i^1 + S_i^2$ и значение ξ_{ij}^0 , $i \neq j$ (10).

3. Вычисляются по внутренним узлам касательные напряжения

$$\sigma_{ij}^0 = G^0 \xi_{ij}^0, \quad G^0 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 G_i, \quad i \neq j.$$

4. Вычисляются напряжения σ_{ij} , $i \neq j$ по каждой внутренней грани $\sigma_{ij} = 0.25 \sum \sigma_{ij}^0$.
5. В соответствии с заданным законом трения вычисляются σ_{ij} , $i \neq j$ по внешним граням.
6. Удовлетворяем рекуррентным соотношениям (13).
Преобразование исходной системы уравнений (6), (7), (8) в эквивалентную систему (12), (14), (15), (16).

Коэффициенты и свободные члены новой эквивалентной системы линейных уравнений определяются численным методом.

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид

$$F_i = a_{ij} x_j + b_i = 0; \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Если положить все неизвестные равными нулю, то, проводя выше приведенную последовательность действий 1–5 и вычисляя F_k^i ($k = \overline{1, 5}$) в (12), (14), (15), (16), найдем свободные члены новой системы:

$$F_i^0 = b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Далее находятся коэффициенты a_{ij} . Для этого положим $x_k = 1$, $x_i = 0$, $i \neq k$, $i = \overline{1, n}$. Проводя указанную выше последовательность действий, находим F_i^k :

$$a_{ik} = (F_i^k - F_i^0) / 1, \quad i = \overline{1, n}.$$

Алгоритм решения задачи

1. Исследуемая область деформирования разбивается на элементы ортогональной формы. Рассчитывается матрица длин дуг элементов.
2. Время исследования (деформирования) τ разбивается на m временных промежутков $\tau = \sum_m \Delta \tau_m$.
3. Насчитывается поле температур по каждому элементу в соответствии с формулой (5).
4. Насчитываются значения модуля сдвига и коэффициент объемного сжатия по каждому элементу.
5. Задаются начальные условия задачи.
6. Задаем шаг по времени $\Delta \tau$.
7. Задаются граничные условия задачи.
8. Дается $(\bar{v}_i)_0$ в (6).
9. Насчитывается матрица коэффициентов и свободных членов новой эквивалентной системы в соответствии с последовательностью, описанной выше.
10. Решается система линейных уравнений методом Гаусса.
11. По каждому элементу (его граням) (i, j) насчитываются σ_{ij} , ν_i , ξ_{ij} , ε_{ij} .
12. Уточняются значения \bar{v}_i . Производится сравнение $(\bar{v}_i)_n$ и $(\bar{v}_i)_{n-1}$, n — номер итерации. Если заданная точность соответствия $(\bar{v}_i)_n$ и $(\bar{v}_i)_{n-1}$ удовлетворяется, то следует операция 12, в противном случае осуществляется операция 8.
13. Исследуются элементы, непосредственно контактирующие с деформирующим устройством, на наличие растягивающих напряжений, если такие элементы существуют, то на границе льда и устройства (S площадка контакта) следует переназначение граничных условий $\sigma_{ii}|_S = 0$; ($i = 1, 2, 3$), и осуществляется операция 9, иначе — 14.
14. Исследуются площадки элементов на наличие напряжений, превышающих предел прочности льда. Если такие элементы присутствуют, то в следствие разрушения этих элементов граничные условия перестраиваются $\sigma_{ij}|_S = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$), следует операция 9, иначе — 15.
15. Осуществляется шаг по времени $\tau = \tau + \Delta \tau_i$, если $\tau < \sum_m \Delta \tau$, то следует операция 5, если — нет, то — операция 16.
16. Окончание расчета.

Результаты исследований

В данной работе исследуем влияния ширины надводной части ледокольного судна на ледоразрушающую эффективность судна. Под ледоразрушающей эффективностью ледокольного устройства будем понимать разрушение ледяной покрова, производимое ледокольным устройством за определенный промежуток времени, с минимальной нагрузкой, оказываемой ледяным покровам на составные части устройства или на само устройство в целом.

Ширина надводной части складывается из ширины площадки носовой области, контактирующей со льдом, и расстояния между носовой областью и резцом (клином). Ширина носовой области принималась равной 2.5, 3.0, 3.5 м; расстояние между носовой областью и клином — 1, 1.5, 2 м.

Геометрические параметры устройства (рис. 2): $a = 29.0$ м; $a_1 = 3.0$ м; $a_2 = 3.0$ м; $a_3 = 1.0$ м; $b_1 = 1.5$ м; ширина основания клина равна 0.8 м; ширина острия клина — 0.03 м; $c = 19.0$ м, по всей этой длине лед жестко закреплен с припайным льдом; $d = 1.0$ м; $d_1 = 0.5$ м. Толщина льда $h = 0.5$ м, $\mu = 0.36$.

Скорость ледокольного судна 10 км/ч.

Рассмотрим на примере поэтапное разрушение ледяного покрова. Время исследования $\tau = 0.4 \text{ с}$ разбивается на 4 шага $\Delta\tau = 0.1 \text{ с}$. Результаты исследований изображены на рисунке 5.

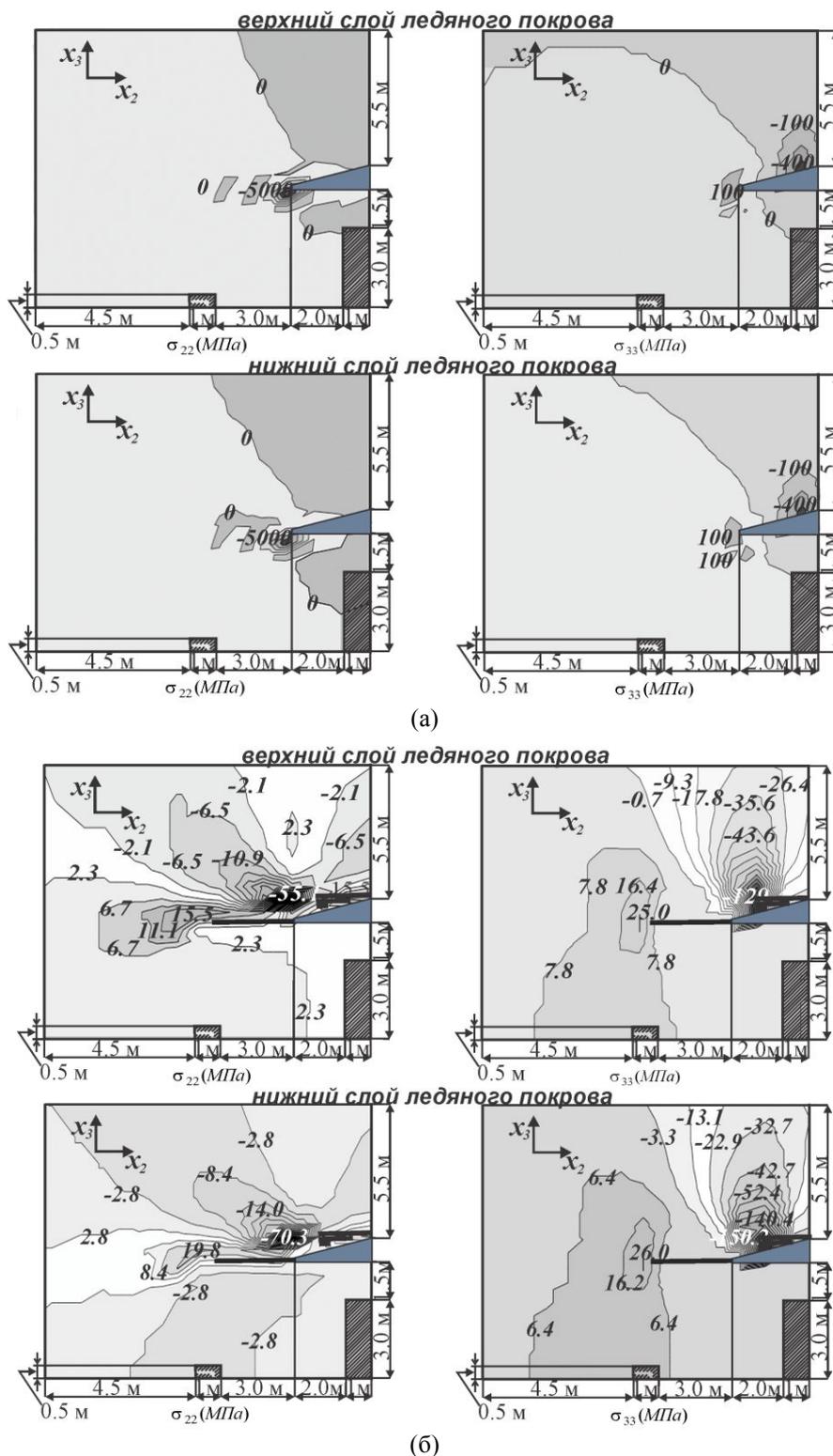


Рис. 5. Распределение напряжения в ледяном покрове, находящемся под действием устройства: а) $\tau = 0.1 \text{ с}$, б) $\tau = 0.2 \text{ с}$, в) $\tau = 0.3 \text{ с}$, г) $\tau = 0.4 \text{ с}$

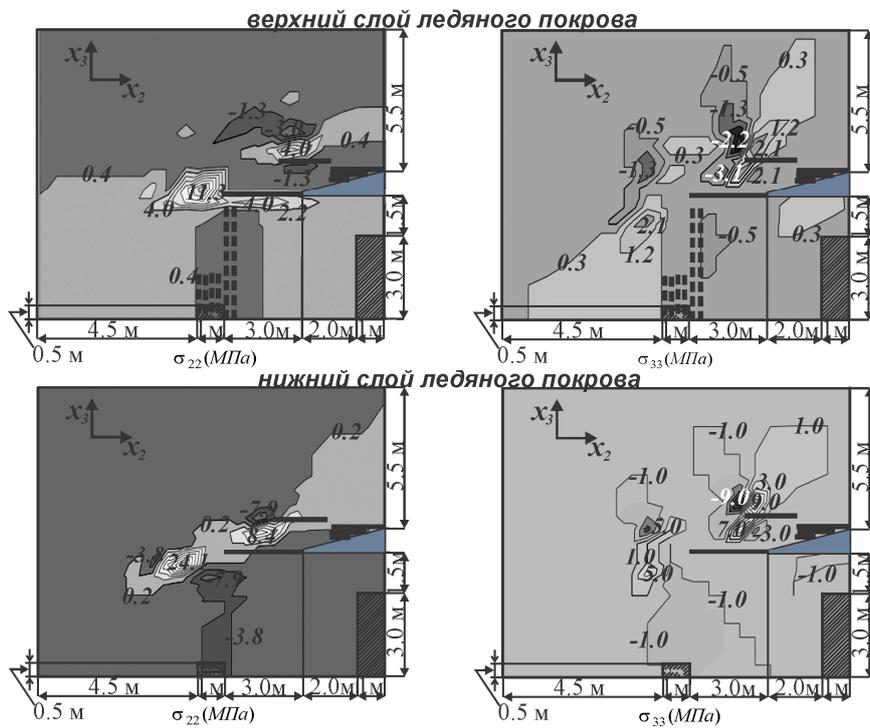
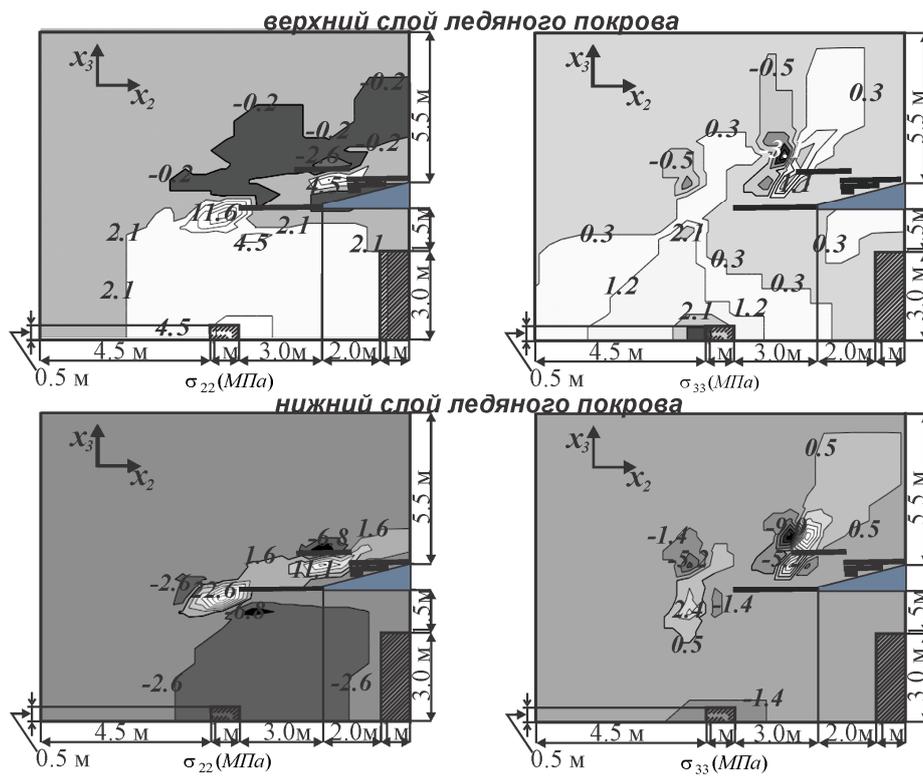


Рис. 5 (продолжение)

При внедрении устройства в лед ($\tau = 0.1 \text{ с}$) происходит сжатие льда по координате x_2 и растяжение — по x_3 . В области внедрения клина присутствуют максимальные сжимающие

напряжения σ_{22} , расположенные в ледяном покрове у острия клина 5000 (МПа). В этом месте присутствуют растягивающие напряжения σ_{33} по направлению x_3 , они равны 100 МПа. В области, расположенной у наклонной боковой поверхности клина, присутствуют сжимающие напряжения σ_{33} и σ_{22} . В области ледяного покрова, находящейся над подводной частью устройства, происходит сжатие по направлению x_2 , а по x_3 — растяжение, притом наибольшее сжатие присуще нижнему слою льда, который непосредственно контактирует с устройством.

При $\tau = 0.2$ с фронтально от клина пройдет магистральная трещина. Она разделит ледяной покров на две области внутреннюю и внешнюю. Внутренняя область расположена между двумя магистральными трещинами и основными частями устройства. Внешняя область расположена от наклонного бока клина и магистральной трещины к периферии. Длина магистральной трещины составит 3.0 м. Трещина представлена на рисунке 5б прямой линией. С боку клина в результате действия сжимающих напряжений σ_{22} и σ_{33} , превосходящих предел прочности, происходят разрушения ледяного покрова на мелкие фрагменты, на расстояние 0.5 м в направлении x_3 .

Вследствие образования трещин произошло падение напряжений на два порядка. Из рисунка 5б видно, что во внешней области ледяного покрова, расположенной вблизи клина, присутствуют большие сжимающие напряжения как по направлению x_2 , так и по x_3 , поэтому на следующей временной итерации здесь происходит нарушение сплошности параллельно магистральной трещине.

При $\tau = 0.3$ с в ледяном покрове (рис. 5) наблюдается разрушение по магистральной трещине, разрушение около клина и нарушение сплошности, которое находится во внешней области льда.

Ледяная пластина, которая находится во внутренней области, прогнется под действием вертикальной нагрузки, оказываемой со стороны надводной части устройства, подводная часть судна будет препятствовать прогибу в результате чего возникнет в ледяном покрове изгибающий момент. В верхнем слое ледяного покрова, который находится над подводной частью, в результате действия растягивающих напряжений, превосходящих критические, пойдет разрушение, в нижнем слое напряжения не превосходят критических на сжатие, разрушения не будет.

При $\tau = 0.4$ с происходит раскрытие поперечной трещины (рис. 5г). Трещина изображена прямыми пунктирными линиями. В вершине этой трещины присутствуют растягивающие напряжения σ_{22} , превышающие критические. В дальнейшем произойдет откол ледяного пласта находящегося во внутренней области ледяного покрова.

Сходимость

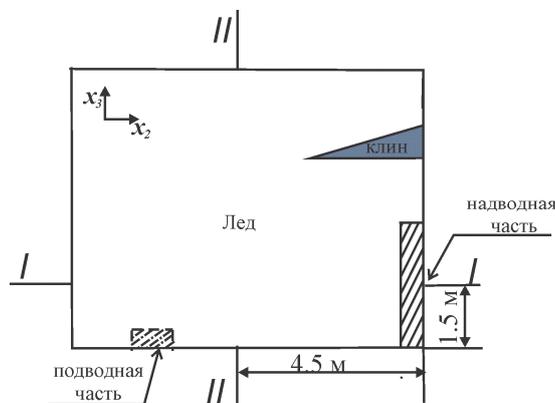


Рис. 6. Область интенсивного воздействия разрушающих элементов устройства

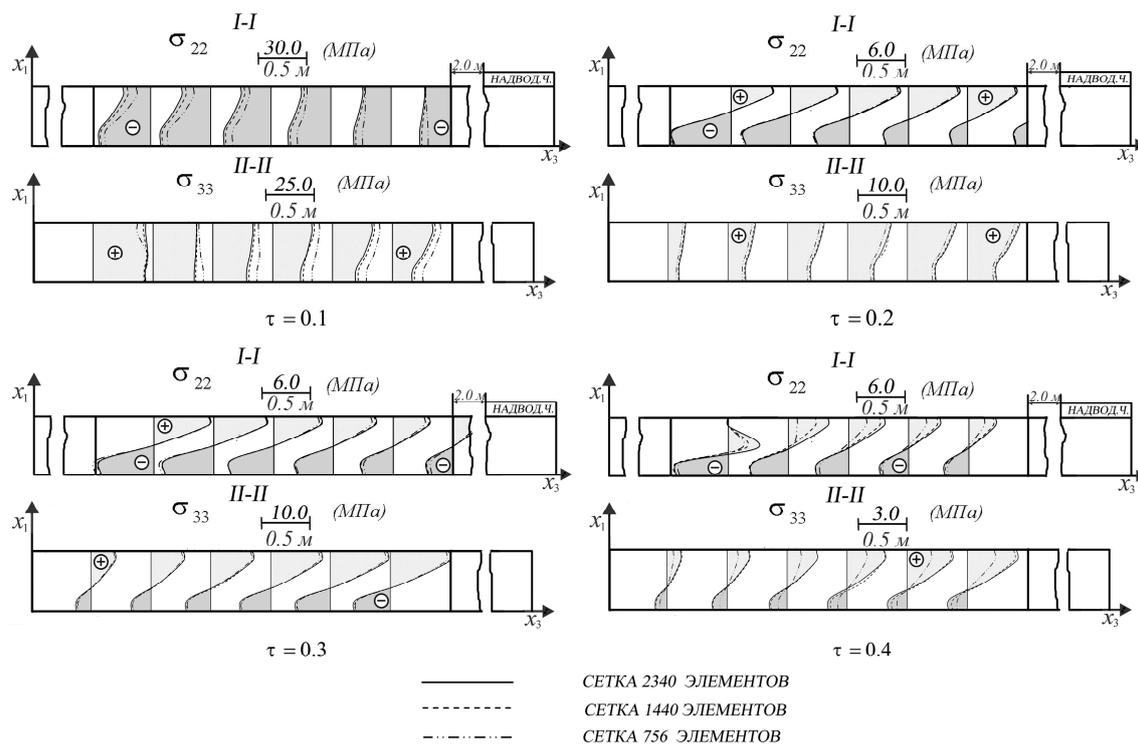


Рис. 7. Эпюра напряжений

Расчеты проводились с использованием программного комплекса [Пат. 2276037 РФ МПК В 63 В 35/08]. В сечениях рисунка 6 приведены эпюры напряжений рисунка 7. При увеличении количества элементов в исследуемой области ледяного покрова наблюдается быстрая сходимость численного решения.

Исследования влияния изменения расстояния между носовой областью надводной части и резцом (клином) на ледоразрушающую эффективность судна

Расстояние между носовой областью и клином b_2 принимаем равным 1, 1.5, 2 м.

Нагрузка на острие клина составит 0.781, 0.813, 0.851 тс при b_2 равном 2.0, 1.5 и 1.0 м соответственно. Нагрузка на наклонную боковую поверхность клина 2.022, 2.034, 2.048 тс, при b_2 — 2.0, 1.5 и 1.0 м. Нагрузка на надводную часть устройства 0.0077, 0.0074, 0.0072 тс при b_2 — 2.0, 1.5 и 1.0 м. Нагрузка на подводную часть устройства 0.0053, 0.0052, 0.0050 тс при b_2 — 2.0, 1.5 и 1.0 м.

С уменьшением параметра b_2 увеличивается нагрузка на клин. Характер разрушения во всех рассмотренных случаях будет одинаковым, сначала пройдут продольные трещины, а после — поперечные, за тем лишь исключением, что при b_2 , равном 1.0 м, процесс трещинообразования происходит быстрее.

При увеличении расстояния между клином и форштевнем нагрузка оказываемая льдом на ледокольное судно особо не увеличится, поэтому можно сделать вывод о том, что увеличение расстояния b_2 особого влияния на ледоразрушающую эффективность ледокольного судно не окажет.

Исследования влияние изменения ширины площадки контакта носовой области надводной части судна на разрушения ледяного покрова

Половина ширины носовой области b_1 принимаем равной 2.5, 3.0, 3.5 м.

Как и прежде, нагрузка на острие клина не изменяется, она составила соответственно 0.810, 0.813, 0.815 тс, нагрузка на наклонную боковую поверхность клина 2.039, 2.034, 2.027 тс, при соответствующих значениях b_1 , равных 2.5, 3.0 и 3.5 м.

Нагрузка на форштевень возрастает с ростом площади контакта форштевня со льдом 0.0030, 0.0074, 0.0082 тс при b_1 — 2.5, 3.0 и 3.5 м. Нагрузка на подводную часть устройства увеличивается с увеличением ширины форштевня 0.0048, 0.0052, 0.0054 тс при b_1 — 2.5, 3.0 и 3.5 м. Это можно объяснить тем, что увеличивается площадь ледяного пласта, находящегося во внутренней области устройства.

Ширина носовой области ледокольного судна оказывает значительное влияние на ледоразрушающую эффективность судна, поскольку при увеличении ширины возрастает нагрузка на саму надводную и подводную части при этом возрастает и сама ледоразрушающая способность. Ледоразрушающая эффективность ледокольного судна имеет место при ширине носовой области надводной части 2.5 м.

Заключение

В результате проделанной работы можно сделать следующий вывод о том, что в ледяном покрове при воздействии судна пойдут сначала продольные трещины, а затем поперечные. Для того чтобы увеличить ширину ледокольного судна, при этом сохранив ледоразрушающую эффективность устройства, необходимо увеличить расстояние между форштевнем и резцом устройства, при этом ширину форштевня принять равной 5 м.

Список литературы

- Богородский В. В., Гаверило В. П.* Физические свойства. Современные методы гляциологии. — Л.: Гидрометеоздат, 1980.
- Войтковский К. Ф.* Основы гляциологии. — М.: Наука, 1999.
- Ионов Б. И., Грамузов Е. М.* Ледовая ходкость судов. — СПб.: Судостроение, 2001. — 512 с.
- Одинокое В. И., Сергеева А. М.* Математическое моделирование процесса разрушения льда ледокольной приставкой. — Владивосток: Дальнаука, 2007. — С. 153.
- Одинокое В. И.* Численное исследование процесса деформации материалов бескоординатным методом. — Владивосток: Дальнаука, 1995.
- Одинокое В. И., Сергеева А. М., Ткачева А. В.* Математическое моделирование процесса разрушения ледяного покрова ледокольной судном Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012614206. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 12 мая 2012.
- Одинокое В. И., Сергеева А. М., Захарова Е. А.* Построение математической модели для численного анализа процесса разрушения ледяного покрова // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 12. — С.15–26.
- Пат. 2276037 РФ МПК В 63 В 35/08.* Ледокольное судно / Одинокое В. И., Колмогоров В. Л. — № 2004114052/11; Заяв. 06.05.2004; Опубл. 10.05.2006, Бюл. № 13.